МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Технологический институт
Федерального государственного образовательного
учреждения высшего профессионального
образования
“Южный федеральный университет”

ЕГФ

КАФЕДРА ФИЗИКИ

УЧЕБНИК

ПРАКТИЧЕНСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ КУРС ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.

Погорелов Е.Н., Филипенко Н.А.

Таганрог 2009

Аннотация

Учебник предназначен для студентов технических специальностей, изучающих *ФИЗИКУ* в рамках общего трехсеместрового курса.

В *Части 1-й* учебника изложены основы *механики*.

Главное внимание уделяется подробному обсуждению основных понятий, определений законов; рассмотрены детали теории, носящие принципиальный характер, приведено достаточно большое число примеров.

По мнению авторов, такое представление материала способствует максимальной ясности изложения и соответствует основной цели учебника: максимально сократить для студентов путь от изучения теории до решения задач, представляющих практический интерес.

Рецензенты:

СОДЕРЖАНИЕ

рассматриваемые в механике. Упругая и квазиупругая силы. Сухое и вязкое трение.	
2.3. **Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.**	
2.4. **Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения. Принцип суперпозиции для ньютоновых гравитационных сил. Гравитационное поле. Напряженность гравитационного поля. Принцип эквивалентности. Движение спутников. Первая космическая скорость. Вес тела.**	
2.5. **Импульс материальной точки. Импульс механической системы и скорость ее центра масс. Второй закон Ньютона на языке импульса. Закон сохранения импульса. Закон сохранения проекции импульса на координатную ось. Столкновения.**	
ГЛАВА 3. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ	
3.1. **Работа силы. Мощности средняя и мгновенная.**	
3.2. **Кинетическая энергия системы. Теорема о кинетической энергии.**	
3.3. **Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Примеры консервативных сил, вычисление соответствующих потенциальных энергий. Консервативность суперпозиции консервативных силовых полей.**	
3.4. **Механическая энергия системы. Теорема об изменении механической энергии. Закон сохранения механической энергии.**	
3.5. **Примеры.**	
ГЛАВА 4. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	
4.1. **Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.**	
4.2. **Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы**	

относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.	
4.3. **Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.**	
4.4. **Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.**	
4.5. **Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.**	
4.6. **Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное движения.**	
4.7. **Гироскоп. Угловая скорость прецессии.**	
ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО). РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА	
5.1. **Основные положения нерелятивистской механики (механики Ньютона-Галилея).**	
5.2. **Опыт Майкельсона. Принцип относительности Эйнштейна. Относительность одновременности.**	
5.3. **Интервал между двумя событиями. Инвариантность интервала относительно перехода в другую систему отсчета. Преобразование Лоренца.**	
5.4. **Следствия преобразования Лоренца. Сокращение длин. Запаздывание движущихся часов. Релятивистский закон сложения скоростей.**	
ГЛАВА 6 ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО). РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА	
6.1. **Масса материальной точки (частицы). Второй закон Ньютона и закон сохранения импульса: необходимость переопределения импульса в релятивистской динамике.**	
6.2. **Релятивистский импульс (импульс релятивистской частицы).**	
6.3. **Равноправие** ct, x, y, z **. Релятивистская энергия**	

ВВЕДЕНИЕ

Первая часть учебника «Практически ориентированный курс физики» посвящена изложению основ механики. В главах 1 – 4 рассмотрена нерелятивистская механика Ньютона – Галилея, в главах 5,6 – элементы релятивистской механики. Уровень изложения соответствует объёму времени, отведённому на изучение курса.

Основная трудность, с которой сталкиваются студенты, изучающие общую физику за три семестра, состоит в том, что в условиях дефицита времени изложение практически всех вопросов, в том числе и принципиально важных, оказывается излишне кратким. При этом, как правило, опускаются подробности, даже относящиеся к основным понятиям и законам физики, а пояснения и комментарии сокращаются до минимума. В результате утрачивается впечатление последовательности и строгости изложения, отдельные фрагменты курса студент не может связать друг с другом, т.е. вывести последующее на основе предыдущего. Таким образом, малый объём курса оказывается существенным недостатком. При увеличении объёма материала возникает вопрос: на чём не следует экономить? – какую часть материала нужно давать максимально подробно?

В предлагаемом учебнике основное внимание уделяется обсуждению основных понятий и физических законов. Практическая ориентированность учебника проявляется прежде всего в том, что здесь даётся достаточно подробный комментарий к основным уравнениям, в особенности по поводу технологии применения этих уравнений к описанию физических процессов и к решению конкретных задач. Приведено достаточно большое число примеров. Как указано в аннотации, авторы надеются, что такое представление материала способствует сокращению пути от изучения теории к решению практически интересных задач. Минимизация этого пути и является основной целью «практически ориентированного» учебника.

Изложение нерелятивистской механики является достаточно традиционным. В качестве основы динамики рассматриваются законы Ньютона. Вначале пишутся уравнение движения материальной точки в виде $\vec{a} = \vec{F}/m$ и аналогичное уравнение движения центра масс. Затем вводится импульс и уравнения движения переписываются на языке импульса. Закон сохранения импульса рассматривается как непосредственное следствие уравнения поступательного движения системы. В главе 3 – «Работа, мощность, энергия» особое внимание уделяется построению выражений для потенциальной энергии, соответствующих различным консервативным силам. В динамике вращательного движения подчёркивается важность вновь введённой физической величины – момента импульса – и подробно обсуждаются ситуации, когда сохраняется момент импульса либо его проекция на ориентированную ось.

В изложении глав 5 и 6 , посвящённых основам релятивистской механики, имеется определённый «перекос» в сторону теоретической физики. Однако, на наш взгляд, это не должно приводить к дополнительным трудностям при изучении материала. – Все принципиальные моменты обсуждаются очень подробно. Кроме того, в начале 5-й главы (для сравнения) перечислены основные результаты нерелятивистской механики, и сопоставление их с результатами специальной теории относительности (СТО) должно помочь студенту осознать и логику релятивистского обобщения, и существенную новизну основных положений и выводов СТО.

В целом учебник имеет достаточно большой объём. Часть материала отнесена в глоссарий, в основном же тексте выделена та его часть, которая может быть пропущена при первом чтении.

ГЛАВА 1

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ (НЬЮТОНОВА) МЕХАНИКА

Рассматривается движение тел (или частиц) со скоростями, пренебрежимо малыми по сравнению со скоростью света в вакууме:

$$|\vec{\upsilon}| << c,$$

где c=3·10^8 м/с.

КИНЕМАТИКА

1.1. Основные понятия и определения, простейшие модели. Механическая система. Система отсчёта. Радиус-вектор, перемещение, закон движения материальной точки, уравнение траектории. Средняя и мгновенная скорости, среднее и мгновенное ускорения. Связь между кинематическими величинами, проекции кинематических величин на координатные оси.
1.2. Криволинейное движение материальной точки на плоскости. Ускорение при криволинейном движении. Тангенциальное и нормальное ускорения.
1.3. Неравномерное движение по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение. Тангенциальное и нормальное ускорения. Простое описание движения материальной точки по окружности. Связь между линейными и угловыми величинами. Радиус кривизны плоской траектории.
1.4. Преобразование скорости и ускорения при переходе в другую систему отсчёта: правила сложения скоростей и ускорений. Инерциальные системы отсчёта. Событие. Преобразование Галилея. Принцип относительности Галилея.

1.1. Основные понятия и определения, простейшие модели. Механическая система. Система отсчёта. Радиус-вектор, перемещение, закон движения материальной точки, уравнение траектории. Средняя и мгновенная скорости, среднее и мгновенное ускорения. Связь между кинематическими величинами, проекции кинематических величин на координатные оси.

Кинематикой называют раздел механики, изучающий способы описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения.

В рамках кинематики не интересуются вопросом о том, как те или иные воздействия со стороны влияют на движение рассматриваемого тела (или тел).

- Любой объект, механическим движением которого мы интересуемся, – **механическая система**.

- Простейшие модели механических систем:
- **материальная точка** – любой объект, формой и размерами которого в данной задаче (в данных условиях) можно пренебречь;
- **набор конечного числа материальных точек** – достаточно общая модель произвольной механической системы;
- **абсолютно твёрдое тело** (АТТ) – тело, форма и размеры которого при наличии тех воздействий, что описаны в условиях задачи, могут считаться неизменными.
- В принципе, АТТ можно рассматривать как набор материальных точек с неизменными расстояниями между ними.

Система отсчета (СО)

– необходима для описания движения любого физического объекта.

- Тело отсчёта, жёстко связанная с ним система координат и часы образуют **систему отсчёта.**

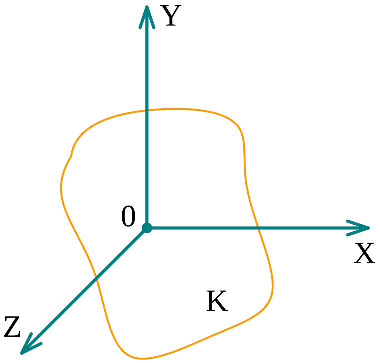


Рис.1.1

Обычно СО изображают так, как на рисунке 1.1, где О – начало координат (начало отсчёта); К – название системы отсчёта.

На рисунке показано тело отсчёта.

Положение материальной точки в пространстве в определённый момент времени задаётся тремя её координатами (например, декартовыми, x, y, z) или радиус-вектором $\vec{r}$:

$$r_x = x\,,\ r_y = y\,,\ r_z = z\,. \qquad (1.1)$$

При движении м.т. её координаты со временем изменяются. Они становятся функциями времени:

$$x = x(t)\,,\ y = y(t)\,,\ z = z(t)\,. \qquad (1.2\text{ а, б, в})$$

Аналогично,

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,. \tag{1.3}$$

- **Закон движения м.т.** – правило, по которому можно определить её положение в любой момент времени.

Если, например, зависимости (1.2) или зависимость (1.3) – известны, то говорят, что закон движения задан.

На рисунке 1.2 показаны некоторые величины, описывающие движение материальной точки *m*.

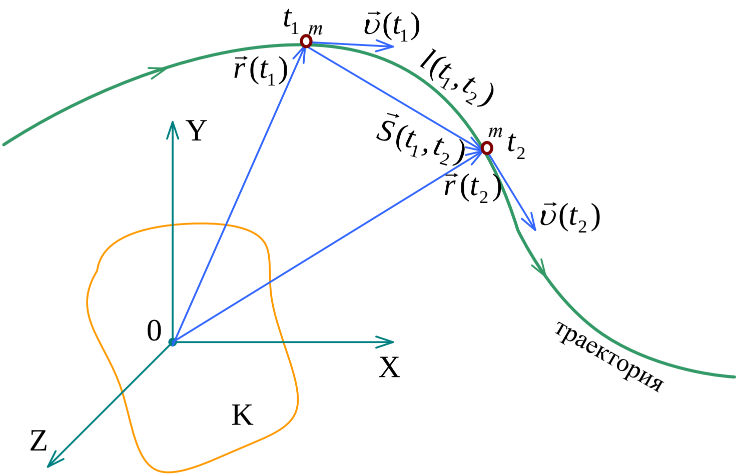


Рис.1.2

Здесь:

$\vec{r}(t_1)$ – радиус-вектор м.т. в момент t_1,

$\vec{r}(t_2)$ – радиус-вектор в момент t_2,

$\vec{S}(t_1, t_2)$ – перемещение за промежуток времени (t_1, t_2),

$l(t_1, t_2)$ – путь за (t_1, t_2) – длина отрезка траектории,

$\vec{\upsilon}(t_1)$ – мгновенная скорость м.т. в момент времени t_1,

$\vec{\upsilon}(t_2)$ – мгновенная скорость в момент t_2.

Векторы $\vec{\upsilon}(t_1)$ и $\vec{\upsilon}(t_2)$ – касательные к траектории.

Закон движения (1.2 а, б, в) можно рассматривать как уравнения траектории, заданной в параметрическом виде с параметром t. Если вся траектория лежит в некоторой плоскости, то можно считать эту плоскость координатной плоскостью XOY и положить z=0. Тогда закон движения определяется фактически **двумя** уравнениями (1.2 а) и (1.2 б), которые задают **плоскую** траекторию в параметрическом виде. Исключив из этой пары уравнений параметр t (время), получаем уравнение плоской траектории в виде $f(x,y)=0$.

Вернемся к рис. 1.2. Очевидно:

$$\vec{s}(t_1,t_2)=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)\equiv\Delta\vec{r}\,. \qquad (1.4)$$

При малых $\Delta t\equiv t_2-t_1$

$$\left|\vec{s}(t_1,t_2)\right|\approx l(t_1,t_2)\,. \qquad (1.5)$$

Сформулируем ряд определений кинематических величин.

- **Средней скоростью** перемещения (просто **средней скоростью**) материальной точки за промежуток времени (t_1, t_2) называется величина:

$$\vec{\upsilon}_{cp}(t_1,t_2)\equiv\frac{\vec{s}(t_1,t_2)}{t_2-t_1}\equiv\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\,. \qquad (1.6)$$

- **Мгновенной скоростью** материальной точки (в момент времени t) называется величина:

$$\vec{\upsilon}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{cp}(t,\ t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\,. \qquad (1.7\ а)$$

То же самое:

$$\vec{\upsilon}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}\,. \qquad (1.7\ б)$$

Точка в (1.7 б) обозначает производную по времени.

- **Средней путевой скоростью** материальной точки называется величина

$$\upsilon_{cp}^{(\ell)} \equiv \frac{l(t_1,t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta l}{\Delta t}\,, \qquad (1.8)$$

где $\Delta l \equiv l(t_2,t_1)$ – путь, пройденный материальной точкой за $\Delta t \equiv t_2 - t_1$.

При $\Delta t \to 0$ получаем мгновенную путевую скорость:

$$\upsilon^{(\ell)} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}\,. \qquad (1.9)$$

Если функция времени $l=l(t)$ есть путь, пройденный за промежуток времени $(0,t)$, то

$$\upsilon^{(\ell)} \equiv \frac{dl}{dt}\,. \qquad (1.10)$$

Учитывая равенство (1.5) и определения (1.6), (1.7а), (1.8) и (1.9), нетрудно показать, что мгновенная путевая скорость совпадает с модулем вектора мгновенной скорости $|\vec{\upsilon}| \equiv \upsilon$:

$$\upsilon^{(\ell)} = \upsilon\,. \tag{1.11}$$

- **Средним ускорением** материальной точки за промежуток времени (t_1, t_2) называется величина:

$$\vec{a}_{cp}(t_1,t_2) \equiv \frac{\vec{\upsilon}(t_2)\text{-}\vec{\upsilon}(t_1)}{t_2\text{-}t_1} \equiv \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\,. \tag{1.12}$$

- **Мгновенным ускорением** материальной точки (в момент t) называется величина:

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \dot{\vec{\upsilon}}\,. \tag{1.13}$$

Очевидно:

$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,. \tag{1.14}$$

Если закон движения задан, например, известна зависимость $\vec{r}(t)$, то мы имеем о движении **полную информацию**, и все величины, определённые равенствами (1.6) – (1.14) легко вычисляются, **точно так же, как и их проекции на декартовы оси**.

Переход $\vec{r}(t) \to \vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{\upsilon}(t) \to \vec{a}(t)$ выполняется с помощью дифференцирования.

Обратно: $\vec{\upsilon}(t) \to \vec{r}(t)$, $\vec{a}(t) \to \vec{\upsilon}(t)$ выполняется с помощью интегрирования. Чтобы найти $\vec{r}(t)$ по заданной $\vec{\upsilon}(t)$, необходимо знать начальное значение $\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(0)$;

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt' = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt'. \qquad (1.15)$$

Аналогично:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}(0) + \int_0^t \vec{a}(t')dt' = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'. \qquad (1.16)$$

Пример: пусть м.т. движется с $\vec{a} = const$.

Тогда с помощью (1.16) можно найти

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t. \qquad (1.17)$$

Интегрируя ещё раз, получаем закон движения:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \qquad (1.18)$$

Выше приведены равенства, связывающие кинематические величины в общем случае, т.е. при произвольном движении материальной точки. Они представляют собой либо определения, либо непосредственные следствия определений. Для движений конкретного вида можно получить соответствующие равенства, характерные именно для данного движения. При $\vec{a} = const$, например, используя (1.17), (1.18), находим:

$$2\vec{a}\,\vec{s} = \upsilon^2 - \upsilon_0^2\,, \qquad (1.19)$$

где $\vec{s} = \vec{s}(0,t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ – перемещение материальной точки за промежуток времени (0,t).

Ясно, что все приведённые векторные равенства можно записать в проекциях. Таким образом получаем, например,

$$(\upsilon_x)_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad \upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \qquad (1.20а,б)$$

$$(a_x)_{ср} = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}, \qquad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \qquad (1.21а,б)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \upsilon_x(t')dt', \qquad (1.22)$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + \int_0^t a_x(t')dt' \qquad (1.23)$$

и т.д.

1.2. Криволинейное движение материальной точки на плоскости.
Ускорение при криволинейном движении. Тангенциальное и нормальное ускорения.

Очевидно, при криволинейном движении ускорение материальной точки отлично от нуля, $\vec{a} \neq 0$, т.к. вектор скорости $\vec{\upsilon}$ изменяется, по крайней мере, по направлению.

Запишем вектор скорости м.т. в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} \,, \tag{1.24}$$

где

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}|, \; \vec{\tau} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \,. \tag{1.25}$$

Очевидно: $|\vec{\tau}| = 1$,

$\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по скорости $\vec{\upsilon}$. Формула (1.24) даёт представление вектора скорости в виде произведения двух сомножителей, первый отвечает за величину скорости, а второй – за её направление.

Дифференцируя (1.24), запишем выражение для ускорения:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} \,. \tag{1.26}$$

Обозначим:

$$\vec{a}_\tau \equiv \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} \,, \tag{1.27}$$

$$\vec{a}_n \equiv \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} \,. \tag{1.28}$$

Таким образом, мы представили ускорение $\vec{a}$ в виде суммы:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \,. \tag{1.29}$$

Первое слагаемое в правой части (1.29):

$$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\upsilon} \text{ при } {d\upsilon}/{dt} > 0 \,, \tag{1.30 а}$$

$$\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\upsilon} \text{ при } {d\upsilon}/{dt} < 0 \,. \tag{1.30 б}$$

- Величина $\vec{a}_\tau$ – **касательное** или **тангенциальное** ускорение.

Рассмотрим величину $\vec{a}_n$.

На рисунке 1.3 изображён отрезок криволинейной траектории м.т., лежащий в плоскости чертежа, на котором показаны два бесконечно близких положения м.т., скорости $\vec{\upsilon}$ и векторы $\vec{\tau}$ в этих положениях.

На рисунке 1.4 треугольник векторов $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}(t+dt)$ и $d\vec{\tau}$ – равнобедренный, $d\varphi$ – бесконечно малый угол поворота вектора $\vec{\tau}$ за время dt.

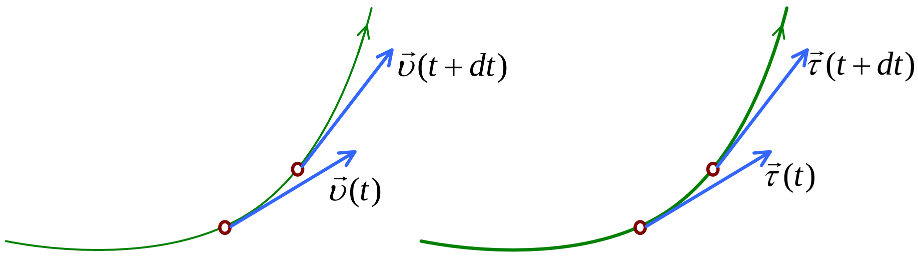


Рис.1.3

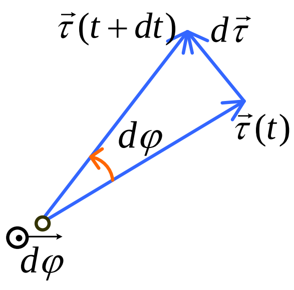


Рис.1.4

Можно считать:

$$d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}(t)\,. \tag{1.31}$$

Рассматривая этот треугольник как бесконечно малый сектор, имеем

$$\frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = |d\varphi|\,. \tag{1.32}$$

Но $|\vec{\tau}| = 1$. Отсюда

$$|d\vec{\tau}| = |d\varphi|\,. \tag{1.33}$$

Если ввести бесконечно малый вектор поворота $\overrightarrow{d\varphi}$, направление которого указано на рисунке 1.4 – «к нам», – то будем иметь с учётом (1.31) и (1.33):

$$d\vec{\tau} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{\tau}\,\right]. \tag{1.34}$$

Таким образом, во-первых (см. (1.31), (1.28)),

$$\vec{a}_n \perp \vec{\upsilon}\,. \tag{1.35}$$

Следовательно, равенство (1.29) – разложение вектора ускорения на две взаимно перпендикулярных составляющих.

- Составляющая $\vec{a}_n$ называется **нормальной составляющей**, она нормальна, т.е. перпендикулярна, к вектору скорости м.т.

Во-вторых, эту величину можно представить в виде

$$\vec{a}_n = \upsilon\left[\frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}, \vec{\tau}\right] = \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}, \vec{\upsilon}\right]. \tag{1.36}$$

Направления $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$ в случае $d\upsilon/dt > 0$ показаны на рисунке 1.5.

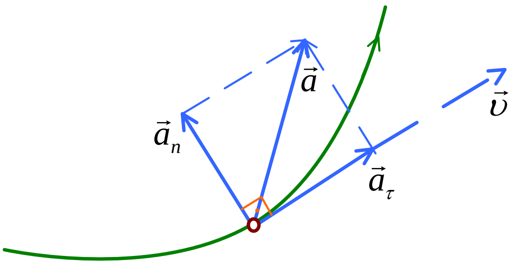


Рис.1.5

Если считать малый отрезок криволинейной траектории частью окружности, то

- величину

$$\vec{\omega} \equiv \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt} \tag{1.37}$$

следует назвать **вектором угловой скорости** материальной точки.

В самом деле, мы определили $\overrightarrow{d\varphi}$ как вектор бесконечно малого поворота вектора скорости. Но при движении по окружности углы поворота радиуса-вектора материальной точки, проведённого из центра окружности, и вектора скорости – одинаковы. Таким образом, $\vec{\omega}$ определяет как направление поворота, так и величину угла поворота радиуса-вектора за единицу времени.

Направление движения м.т. по окружности и направление $\vec{\omega}$ связаны **правилом буравчика.**

Отметим: для проекции $\vec{a}$ на вектор $\vec{\upsilon}$ можно записать

$$a_\upsilon = (\vec{a}_\tau)_\upsilon, \tag{1.38}$$

и в силу (1.30) тогда имеем:

$$a_\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt}, \tag{1.39 а}$$

$$|a_\upsilon| = |\vec{a}_\tau|. \tag{1.39 б}$$

1.3. Неравномерное движение по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение. Тангенциальное и нормальное ускорения. Простое описание движения материальной точки по окружности. Связь между линейными и угловыми величинами. Радиус кривизны плоской траектории.

На рисунке 1.6 показана окружность радиуса r, по которой движется материальная точка. За бесконечно малый промежуток времени dt радиус-вектор м.т. изменится на $d\vec{r}$: от значения $\vec{r}(t)$ до значения $\vec{r}(t+dt)$. При движении против часовой стрелки $\vec{\omega}$ направлена к нам, по часовой – «от нас». Вообще говоря, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) \neq const$.

Используя сходство треугольников, построенных из векторов, которые показаны на рис. 1.4 и 1.6, нетрудно получить равенство, аналогичное соотношению (1.34):

$$d\vec{r} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}\right]. \tag{1.40}$$

Поделив (1.40) на dt, будем иметь

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \qquad (1.41)$$

Дифференцируя (1.41), находим ускорение:

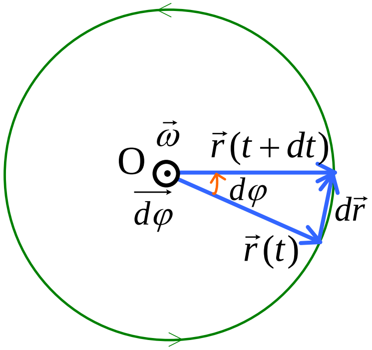


Рис.1.6

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, \vec{\upsilon}]. \qquad (1.42)$$

Второе слагаемое в (1.42) – см. (1.36) –

$$[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}] = \vec{a}_n. \qquad (1.43)$$

Первое – очевидно, равно $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a}_\tau = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right]. \qquad (1.44)$$

Введём определение.

Угловым ускорением материальной точки назовём величину

$$\vec{\varepsilon} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (1.45)$$

Теперь ускорение её запишется с учётом (1.41) в виде

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]]. \qquad (1.46)$$

Двойное векторное произведение в (1.46) вычислим по известной формуле

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}), \qquad (1.47)$$

что даёт

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}). \qquad (1.48)$$

Учитывая, что $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, получаем:

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = -\omega^2 \vec{r}. \qquad (1.49)$$

Таким образом, в разложении (1.29)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

слагаемые имеют вид:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}], \qquad (1.50\ \text{а})$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}. \qquad (1.50\ \text{б})$$

- Очевидно, нормальная составляющая ускорения – это хорошо известное из школьного курса **центростремительное ускорение**.

- Ускорение материальной точки $\vec{a}$, движущейся по окружности, называют также **полным ускорением**.

Если движение материальной точки по заданной окружности рассматривать как движение в трёхмерном пространстве, то наиболее простое описание такого движения осуществляется в цилиндрических координатах. Будем считать, что окружность имеет радиус R и располагается в плоскости $z = 0$. Тогда закон движения материальной точки имеет вид:

$$z = 0, \tag{1.51 а}$$

$$r = R, \tag{1.51 б}$$

$$\varphi = \varphi(t), \tag{1.51 в}$$

где φ – полярный угол – угловая координата материальной точки.

Таким образом, фактически закон движения полностью определяется **единственным** нетривиальным равенством (1.51 в). Такое движение называется **одномерным**. Движение м.т. по заданной окружности – **одномерное движение**.

Поступательный аналог – движение материальной точки вдоль прямой: если совместить эту прямую с осью OX, то закон движения м.т. запишется так:

$$y = 0, \tag{1.52 а}$$

$$z = 0, \tag{1.52 б}$$

$$x = x(t). \tag{1.52 в}$$

Это – также одномерное движение, закон его вполне определяется равенством (1.52 в).

На рис.1.7 показана окружность, по которой движется материальная точка. Ось OZ

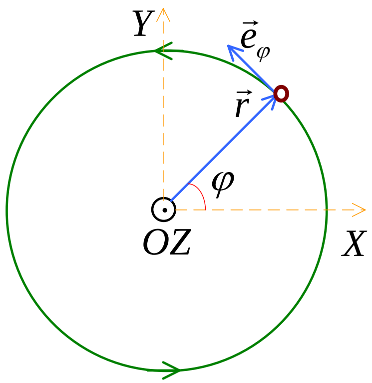


Рис.1.7

направлена «к нам», $\vec{e}_\varphi$ – единичный вектор, указывающий направление отсчёта положительных углов. Это направление на окружности связано с направлением OZ правилом буравчика.

Для движения вдоль оси OX (1.52 в) имеем

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \qquad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (1.53а, б)$$

Для движения по окружности (1.51 в) соответствующие равенства выглядят так:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.54а, б)$$

Равнопеременное движение вдоль оси OX описывается равенствами:

$$a_x = const, \qquad (1.55 а)$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t\,, \tag{1.55 б}$$

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}\,, \tag{1.55 в}$$

$$\Delta x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}\,. \tag{1.55 г}$$

Равнопеременное движение по окружности:

$$\varepsilon_z = const\,, \tag{1.56 а}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t\,, \tag{1.56 б}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}\,, \tag{1.56 в}$$

$$\Delta\varphi = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}\,, \tag{1.56 г}$$

где $\Delta\varphi$ – угловое перемещение материальной точки.

В таблице 1 представлены линейные и соответствующие (аналогичные) им угловые величины, характеризующие движение материальной точки.

Таблица 1

линейные	$d\vec{r}$	$\vec{\upsilon}$	$\vec{a}_\tau$	x	υ_x	a_x
угловые	$\overrightarrow{d\varphi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z

Выпишем ещё раз уравнения, связывающие линейные и угловые переменные, характеризующие движение материальной точки по окружности $(|\vec{r}| = R)$:

$$d\vec{r} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}\right], \qquad \left|d\vec{r}\right| = \left|\overrightarrow{d\varphi}\right| \cdot R\,; \quad (1.57а,б)$$

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right], \qquad \upsilon = \omega\, R\,, \qquad \upsilon_{\varphi} = \omega_z R\,; \quad (1.58а, б,)$$

$$\vec{a}_{\tau} = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right], \qquad a_{\tau} = \varepsilon\, R\,, \qquad a_{\varphi} = \varepsilon_z R\,; \quad (1.59а, б, в)$$

здесь $\upsilon_{\varphi}, a_{\varphi}$ – проекции скорости и ускорения на вектор $\vec{e}_{\varphi}$,

$$\left|\upsilon_{\varphi}\right| = \upsilon, \quad \left|a_{\varphi}\right| = \left|\vec{a}_{\tau}\right|; \qquad (1.60\ а,\ б)$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}\,, \qquad a_n = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}\,. \qquad (1.61\ а,\ б)$$

Замечания.

1. При вращении твёрдого тела все материальные точки, из которых оно построено, движутся с одной угловой скоростью $\vec{\omega}$, направление которой связано с направлением вращения правилом буравчика – см. рисунок 1.8. Угловое ускорение у всех точек – одно и то же, угловое перемещение – одно и то же. Поэтому мы можем говорить об угловой скорости, угловом ускорении и угле поворота ($\Delta\varphi$) **тела**. Например, равнопеременное вращение тела описывается уже знакомыми нам уравнениями (1.56 а), (1.56 б), (1.56 г).

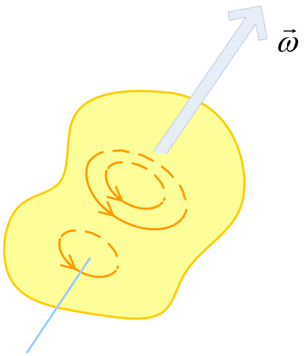


Рис.1.8

2. Малую окрестность точки плоской криволинейной траектории материальной точки можно рассматривать как малую дугу некоторой окружности. Радиус этой окружности – **радиус кривизны траектории** в окрестности данной точки, $R_{кр}$. Эта величина удовлетворяет равенству (последнее из сводки уравнений):

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R_{кр}}. \qquad (1.62)$$

1.4. Преобразование скорости и ускорения при переходе в другую систему отсчёта: правила сложения скоростей и ускорений. Инерциальные системы отсчёта. Событие. Преобразование Галилея. Принцип относительности Галилея.

Движение материальной точки (тела) относительно разных **систем отсчета (СО)** выглядит по-разному, т.е. описывается разными законами движения. В механике часто возникает необходимость отыскать и использовать такую систему отсчета, относительно которой закон движения имеет наиболее простой вид. При этом получается, что задачу, поставленную в одной **СО**, решают, используя другую **СО**. Понятно, что для этого надо хорошо представлять себе, **как** изменяются физические (в том числе и кинематические) величины при переходе от одной **СО** к другой.

Пусть имеются две системы отсчета: К и К′, относительно которых рассматриваются движения материальной точки m. Положение ее в системе отсчета К определяется радиус-вектором $\vec{r}$, а в К′ – вектором $\vec{r}\,'$. Будем считать, что движение одной СО относительно другой является поступательным (т.е. поступательно движется тело отсчета системы К′ относительно К и наоборот). В этом случае соответствующие координатные оси в К и К′ можно считать в любой момент сонаправленными (рис. 1.9):

$$OX \uparrow\uparrow O'X',\ OY \uparrow\uparrow O'Y',\ \ OZ \uparrow\uparrow O'Z'. \tag{1.63}$$

Положение начала отсчета O' системы К′ относительно К зададим радиус-вектором $\vec{R}$ и назовем К **условно** неподвижной СО, а К′ – **условно** движущейся.

Векторы, изображенные на рис. 1.9, подчинены очевидному равенству:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}. \tag{1.64}$$

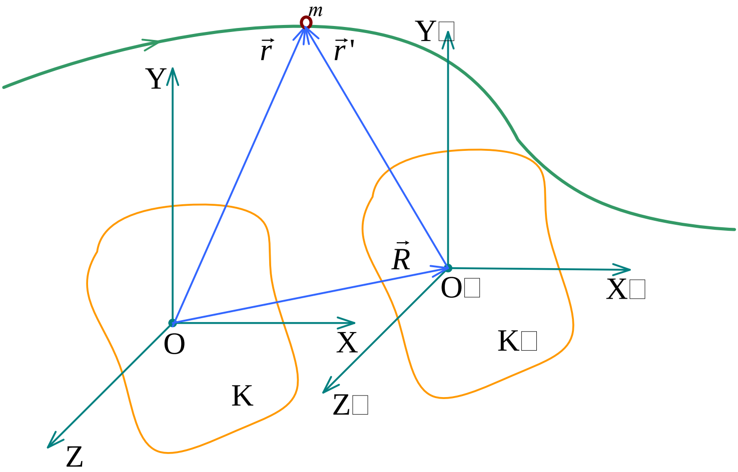


Рис. 1.9

Один из **постулатов нерелятивистской механики** (и физики вообще) гласит:

- **во всех системах отсчета ход времени одинаков**; для любых двух систем К и К′ имеем

$$t = t', \qquad (1.65)$$

т.е. можно ввести **абсолютное время** (t).

При движении м.т. m и систем К и К′ друг относительно друга величины $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ и $\vec{R}$ являются функциями времени t. Продифференцировав (1.64) по t, получаем

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}, \qquad (1.66)$$

где $\vec{\upsilon} \equiv \dot{\vec{r}}$ – скорость м.т. (частицы) m относительно системы К, $\vec{\upsilon}' \equiv \dot{\vec{r}}'$ – ее (m) скорость относительно К′ и $\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}}$ – скорость системы К′ относительно К.

Равенство (1.66) – **правило сложения скоростей**.

Продифференцировав его по времени, получаем **правило сложения ускорений**:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}. \tag{1.67}$$

Здесь $\vec{a} \equiv \dot{\vec{\upsilon}}$ – ускорение частицы m относительно К, $\vec{a}' \equiv \dot{\vec{\upsilon}}'$ – ускорение частицы m относительно К′ и $\vec{A} \equiv \dot{\vec{V}}$ – ускорение К′ относительно К.

Подчеркнем, что правила (1.66), (1.67) работают в нерелятивистской области, когда все рассматриваемые скорости малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Напомним, кроме того, что мы рассматривали такие две системы отсчета, относительное движение которых является **поступательным**.

Иногда говорят: «Тело (частица) участвует в двух движениях». Это надо понимать так (**и только так!**), что тело движется относительно некоторой системы отсчета (К′), которая сама движется относительно другой системы отсчета (К), **условно** принимаемой за неподвижную.

Все системы делятся на **инерциальные** и **неинерциальные**. **Закон инерции (первый закон Ньютона)** гласит:

- существует выделенный класс систем отсчета, относительно которых свободная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, либо покоится, – такие системы отсчета называются **инерциальными**.

Под **свободной** понимают здесь материальную точку, на которую не действуют никакие силы, т.е. частицу ни с чем не взаимодействующую.

Если К и К′ – инерциальные системы отсчета (**ИСО**), то для свободной частицы как $\vec{\upsilon} = const$, так и $\vec{\upsilon}' = const$, откуда следует (см. 1.66) $\vec{V} = const$.

Таким образом, СО, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно некоторой ИСО, также является инерциальной.

Ускорение материальной точки во всех инерциальных системах отсчета одно и то же: для любых двух ИСО К и К′ имеем

$$\vec{a} = \vec{a}'. \qquad (1.68)$$

Рассмотрим еще одно важнейшее понятие – понятие **события**. Пусть в некоторый момент времени t материальная точка оказалась в положении, характеризуемом координатами *x*, *y*, *z* (или радиус-вектором $\vec{r}$). Это – пример события.

- **Событие определяется местом, где оно произошло, и моментом времени, когда оно произошло**, т.е. четверкой величин (t, *x*, *y*, *z*), или что то же самое, – набором ($t, \vec{r}$).

Еще примеры событий: вспышка маленькой лампочки, прибытие светового сигнала в данный момент времени в данную точку пространства, срабатывание точечного (малых размеров) датчика, зарегистрировавшего заряженную частицу, и т.д.

Величины, определяющие событие, в различных системах отсчета – различны: в системе К это (t , *x*, *y*, *z*), а в системе К′ – (t', x', y', z'), или соответственно, ($t, \vec{r}$) и ($t', \vec{r}\,'$).

Пусть имеются две инерциальные системы отсчета К и К′ и пусть ИСО К′ движется относительно К по закону (см. (1.64) и рис. 1.9)

$$\vec{R} = \vec{V} \cdot t. \qquad (1.69)$$

При $t = 0$ (1.69) дает $\vec{R} = 0$, т.е. в начальный момент времени начала отсчета О и О′ систем К и К′ совмещены.

Положим, нам известны координаты и время некоторого события ($t', \vec{r}\,'$) в системе К′. Как вычислить координаты и время этого события в системе К? Ответ на этот вопрос дается равенствами (1.65) и (1.64) с подстановкой (1.69):

$$t = t', \qquad (1.70\ а)$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t'. \qquad (1.70\ б)$$

Система (1.70) называется **преобразованием Галилея**. Оно, как говорят, описывает переход от одной ИСО к другой. (Аналогичная система равенств в релятивистской кинематике именуется преобразованием Лоренца).

Если выбрать систему координат в К и К′ так, чтобы ОХ и О′Х′ были направлены по скорости $\vec{V}$ (см. рис. 1.10), то вместо (1.70) имеем

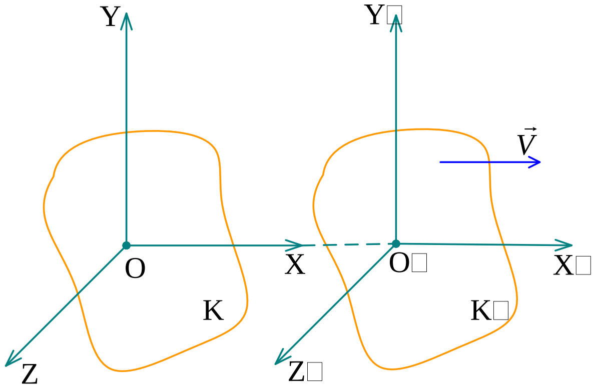


Рис. 1.10

$$t = t', \qquad (1.71\ а)$$

$$x = x' + Vt', \qquad (1.71\ б)$$

$$y = y', \qquad (1.71\ в)$$

$$z = z'. \qquad (1.71\ г)$$

Систему равенств (1.71) называют **частным преобразованием Галилея.**

В случае когда система отсчета К′ движется относительно К в направлении, противоположном осям ОХ и О′Х′, равенство (1.71 б) следовало бы записывать в виде

$$x = x' + V_x t', \qquad (1.72\ а)$$

либо в виде

$$x = x' - Vt'. \qquad (1.72\ б)$$

Однако, как правило, использую запись (1.71 б), подразумевая под V проекцию V_x. Таким образом, величина V в (1.71 б) может быть и положительной (К′ движется относительно К по ОХ) и отрицательной (К′ движется противоположно ОХ).

Принцип относительности Галилея гласит:

- во всех инерциальных системах отсчета законы механики формулируются одинаково (т.е. уравнения, выражающие законы механики, имеют один и тот же вид).

Принцип относительности Галилея также можно сформулировать как требование **инвариантности законов механики относительно преобразования Галилея**.

Принцип относительности утверждает **равноправие всех инерциальных систем отсчета**.

Гелиоцентрическая система отсчета с началом в центре Солнца и координатными осями, направленными на удаленные звезды, с высокой степенью точности является инерциальной.

Одна из редакций принципа относительности Галилея: никакие механические эксперименты не позволяют идентифицировать инерциальную систему отсчета, т.е., например, определить, совпадает она с гелиоцентрической или нет. **Все** механические явления во **всех ИСО** протекают одинаково.

ГЛАВА 2

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. СИЛЫ, РАССМАТРИВАЕМЫЕ В МЕХАНИКЕ.

2.1. Законы Ньютона. Основная задача динамики. Центр масс. Уравнение движения центра масс.
2.2. Фундаментальные взаимодействия. Силы, рассматриваемые в механике. Упругая и квазиупругая силы. Сухое и вязкое трение.
2.3. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.
2.4. Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения. Принцип суперпозиции для ньютоновых гравитационных сил. Гравитационное поле. Напряженность гравитационного поля. Принцип эквивалентности. Движение спутников. Первая космическая скорость. Вес тела.
2.5. Импульс материальной точки. Импульс механической системы и скорость ее центра масс. Второй закон Ньютона на языке импульса. Закон сохранения импульса. Закон

сохранения проекции импульса на координатную ось. Столкновения.

2.1. Законы Ньютона. Основная задача динамики. Центр масс. Уравнение движения центра масс.

Как уже упоминалось в предыдущей лекции, для описания движения любой механической системы необходимо выбрать **систему отсчета (СО)**, относительно которой это движение рассматривается. Как правило, наиболее простым описание оказывается в так называемых (т.н.) **инерциальных системах отсчета (ИСО)**. В дальнейшем мы будем всегда (если не оговорено противное) использовать именно эти **СО**.

Первый закон Ньютона (закон инерции) содержит определение **ИСО** и постулат о существовании ИСО. Он гласит:

- существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых **свободная** материальная точка движется прямолинейно и равномерно либо покоится.

Материальная точка является **свободной**, если отсутствуют какие бы то ни было **воздействия** на нее со стороны других материальных точек или тел. Свободная материальная точка либо покоится относительно **ИСО**, либо **движется по инерции**, и это движение в **ИСО** – равномерное и прямолинейное.

Из определения **ИСО** следует, что любая **СО**, движущаяся относительно некоторой **ИСО** поступательно, равномерно и прямолинейно, также является **инерциальной системой отсчета**. Таким образом, существует бесконечное множество **ИСО**.

При наличии воздействия на материальную точку скорость $\vec{\upsilon}$ ее изменяется, м.т. приобретает ускорение, которое зависит от **инертности** материальной точки, а также от **направления** и **интенсивности воздействия**.

Мерой инертности материальной точки (тела) является ее **масса** (m). Масса материальной точки – положительный скаляр.

Воздействие на м.т. со стороны другой механической системы (материальной точки, тела) определяется векторной величиной – **силой** $\vec{F}$.

Введенные нами понятия массы (инертной) и силы, действующей на материальную точку, известны вам из школьного курса физики. Наиболее отчетливое определение этих понятий приведено в учебнике Савельева И.В. «Курс общей физики. Т.1.» [1]. Важно отметить следующее: масса произвольной материальной точки и действующая на нее сила могут быть измерены **независимо друг от друга**. Единственное, что для этого требуется, – наличие эталонной массы.

Второй закон Ньютона гласит:

- ускорение, приобретаемое материальной точкой массы m под действием силы $\vec{F}$, сонаправлено с силой, а величина его прямо пропорциональна величине силы и обратно пропорциональна массе материальной точки:

$$\vec{a} = b\frac{\vec{F}}{m}, \qquad (2.1\ а)$$

где b=*const* – положительная постоянная, зависящая от выбора системы единиц.

В системе **СИ**, когда [m]=кг, [a]=м/с^2, [F]=Н, мы имеем b=1 и **второй закон** можно записать в форме (наиболее удобный вариант)

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (2.1\ б)$$

Если на материальную точку действуют не одна сила, а две или несколько – $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n$ – то

- ускорение, приобретаемое м.т. под действием двух или нескольких сил, равно геометрической сумме ускорений, приобретаемых ею под действием каждой из сил в отдельности.

Приведенное утверждение – **принцип независимости действия сил**. Применяется он просто: в правую часть (2.1 б) ставят векторную сумму сил $\vec{F}_{\text{k}}$ $(k = 1,2,...,n)$:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \, . \tag{2.1 в}$$

Мы будем, как правило, пользоваться записью второго закона в виде (2.1 б), понимая под $\vec{F}$ в случае наличия двух или нескольких сил их векторную сумму, т.е. правую часть (2.1 в).

Равенство (2.1 б) – как и (2.1 а), (2.1 в) – называется также **уравнением движения материальной точки**.

Третий закон Ньютона описывает взаимодействие двух тел (материальных точек).

- При взаимодействии двух тел (материальных точек) силы, которыми они действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \, , \tag{2.2}$$

где $\vec{F}_{1,2}$ – сила, действующая на тело 1 со стороны тела 2, а $\vec{F}_{2,1}$ – сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1.

Основная задача динамики механической системы в простейшей постановке формулируется так.

- Заданы силы, действующие на механическую систему, известно начальное состояние системы. Найти закон движения системы.

Рассматривая достаточно общую модель системы – набор материальных точек, – можно сформулировать основную задачу более подробно. При этом следует иметь в виду, что механическое состояние системы определяется в данный момент времени положениями и скоростями всех ее частей.

Итак, более подробно основная задача динамики формулируется следующим образом.

- Известны все силы $\vec{F}_i$, действующие на все материальные точки системы, известны начальные положения $\vec{r}_{i0}$ и начальные скорости $\vec{\upsilon}_{i0}$ всех материальных точек системы. Найти закон движения системы, т.е. закон движения $\vec{r}_i(t)$ для каждой материальной точки, входящей в состав системы.

Здесь под $\vec{F}_i$ понимается сумма сил, действующих на i-ю материальную точку.

Пусть система состоит из одной материальной точки массы m. Известна $\vec{F}(t)$ – сумма сил, действующих на нее. Заданы начальные значения радиуса-вектора и скорости м.т. $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$. Найдем закон движения материальной точки.

Ускорение определяем с помощью уравнения движения (второго закона Ньютона)

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}, \tag{2.3}$$

а дальше пользуемся соотношениями кинематики (см. ГЛАВУ 1, равенства (1.12), (1.11)), интегрируем (2.3) два раза по времени:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \frac{\vec{F}(t'')}{m} dt'', \tag{2.4}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt' = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{\vec{F}(t'')}{m} dt'' \right) dt' \quad . \quad (2.5)$$

Законы Ньютона составляют основу динамики. По существу это **физические постулаты**, т.е. утверждения, основанные на очень большом объеме экспериментальных данных. Дальнейшее продвижение в теории опирается на эти законы.

Рассмотрим далее важное понятие – **центр масс (центр инерции)**. Говоря о механической системе, будем иметь в виду набор материальных точек.

Пусть $\mathrm{m}_1, m_2, \dots, m_n$ – массы материальных точек системы, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ – их радиусы-векторы.

- **Центром масс** (**центром инерции**) механической системы называется точка, положение которой определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_c \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} . \quad (2.6)$$

Часто пользуются более простым (менее подробным) символом суммирования, например, массу системы записывают в виде:

$$m \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \equiv \sum_i m_i \quad . \quad (2.7)$$

Определение (2.6) можно записать в проекциях, тогда, например, для координаты x центра масс получим

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}. \qquad (2.8)$$

Отметим следующее.

1. Определение (2.6) можно применить и к твердому телу, рассматривая его как набор материальных точек.

2. Определение (2.6) является естественным: нетрудно убедиться в том, что положения центров масс симметричных систем (например, однородного шара или отрезка с равномерно распределенной массой), вычисленные по формуле (2.6), совпадают с центром симметрии этих систем, как и должно бы быть.

3. Пусть имеется набор **тел** с массами $\mathrm{m}_1, m_2, ..., m_s$. Тела, вообще говоря, **протяженные**, т.е. рассматриваемая совокупность тел не сводится к набору s материальных точек. Если известны положения центров масс тел $\vec{r}_{c1}, \vec{r}_{c2}, ..., \vec{r}_{cs}$, то центр масс всей системы определяется как для набора материальных точек:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_{c1} + m_2\vec{r}_{c2} + ... + m_s\vec{r}_{cs}}{m_1 + m_2 + ... + m_s}. \qquad (2.9)$$

4. Школьникам знакомо понятие “центр тяжести”. Центр масс системы совпадает с его центром тяжести, если поле силы тяжести однородно ($\vec{g} = const$).

5. В отсутствии внешних воздействий центр масс механической системы движется относительно **ИСО** прямолинейно и равномерно либо покоится. Это – следствие **уравнения движения центра масс** (см. ниже).

- Система, на которую не действуют внешние, т.е. не входящие в состав системы тела или материальные точки, называют **замкнутой (или изолированной)**.

Ниже мы приведем определение замкнутой системы еще раз в несколько иной редакции. Разумеется, оно будет эквивалентно данному определению.

Перепишем определение центра масс с учетом (2.7):

$$m\vec{r}_c = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad . \qquad (2.10)$$

Продифференцировав его по времени два раза, получим два важных равенства:

$$m\vec{\upsilon}_c = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \, , \qquad (2.11)$$

$$m\vec{a}_c = \sum_i m_i \vec{a}_i \, , \qquad (2.12)$$

где $\vec{\upsilon}_c \equiv \dot{\vec{r}}_c$ – скорость центра масс, $\vec{a}_c \equiv \ddot{\vec{r}}_c$ – ускорение центра масс.

К равенству (2.11) мы еще вернемся, а сейчас рассмотрим (2.12). Оно подсказывает нам, что для получения уравнения движения центра масс нам следует записать уравнение движения каждой *i*-й материальной точки, а затем эти уравнения сложить.

Прежде чем заняться этим, договоримся об обозначениях. Под $\vec{F}_i$ мы понимаем сумму всех сил, действующих на *i*-ю материальную точку.

Уравнение движения *i*-й материальной точки имеет вид:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i \, . \qquad (2.13)$$

Величину $\vec{F}_i$ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \vec{F}_i^{(in)} \, , \qquad (2.14)$$

где $\vec{F}_i^{(ex)}$ – сумма **внешних** сил, действующих на i-ю материальную точку, а $\vec{F}_i^{(in)}$– сумма действующих на нее **внутренних** сил. **Внешние** силы действуют со стороны объектов, не входящих в состав рассматриваемой механической системы (**внешние воздействия**), а **внутренние** – это те, которые действуют на i-ю точку со стороны других материальных точек данной системы. Подробно:

$$\vec{F}_i^{(in)} = \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,\kappa} \,. \qquad (2.15)$$

Суммирование в правой части (2.15) производится по номеру k, $\vec{F}_{i,\kappa}$ – сила, действующая на i-ю материальную точку со стороны k-й материальной точки.

Подставив выражение (2.14) в уравнение движения (2.13) и просуммировав по i, получим

$$\sum_{i}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(in)} \,. \qquad (2.16)$$

Первое слагаемое в правой части (2.16) – **сумма всех внешних сил, действующих на все материальные точки системы**. Обозначим эту величину

$$\vec{F}^{(ex)} \equiv \sum_{i}^{n} \vec{F}_i^{(ex)} \,. \qquad (2.17)$$

Мы будем называть ее **суммой внешних сил, действующих на систему**.

Второе слагаемое можно с учетом (2.15) записать так:

$$\sum_{i}^{n} \vec{F}_i^{(in)} = \sum_{\substack{i=1 \\ \kappa \neq i}}^{n} \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_{i,\kappa} . \qquad (2.18)$$

Это сумма **всех внутренних сил, действующих на все материальные точки системы**.

Если в сумме (2.18) есть, например, отличное от нуля слагаемое $\vec{F}_{5,17}$, т.е. если на 5-ю материальную точку со стороны 17-й действует сила, отличная от нуля, то, по **третьему закону Ньютона**, на 17-ю материальную точку со стороны 5-й также действует сила $\vec{F}_{17,5}$, равная по величине и противоположная по направлению силе $\vec{F}_{5,17}$, так что сумма их равна нулю:

$$\vec{F}_{5,17} + \vec{F}_{17,5} = 0. \qquad (2.19)$$

В сумму (2.18) внутренние силы входят парами, для каждой из которых выполняется условие вида (2.19). Таким образом, сумма всех внутренних сил, действующих на все материальные точки системы, равна нулю. Тогда (2.16) можно переписать так:

$$\sum_{i}^{n} m_i \vec{a}_i = \vec{F}^{(ex)} . \qquad (2.20)$$

Используя (2.12), окончательно будем иметь:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}^{(ex)} . \qquad (2.21)$$

Это и есть **уравнение движения центра** масс.

Его называют также уравнением поступательного движения системы. Говорят, что это уравнение описывает движение системы как целого. В самом деле, информацию о том, как движутся материальные точки друг относительно друга, мы потеряли, заменив систему из ***n*** уравнений (2.13) одним уравнением (2.21).

Подумайте, что можно сказать о движении центра масс системы, если $\vec{F}^{(ex)} = 0$*?* $F_x^{(ex)} = 0$*?*

2.2. Фундаментальные взаимодействия. Силы, рассматриваемые в механике. Упругая и квазиупругая силы. Сухое и вязкое трение.

Все наблюдаемые взаимодействия сводятся к четырем качественно различным видам взаимодействий. Эти основные, исходные, первичные взаимодействия называют **фундаментальными**.

Фундаментальное взаимодействие элементарно, т.е. оно не может быть представлено как композиция других, более простых взаимодействий.

Существует **четыре вида** фундаментальных взаимодействий: **гравитационное**, **электромагнитное**, **сильное** и **слабое**.

Оказывается, например, что силы, обусловленные межмолекулярным взаимодействием и наблюдаемые в макроскопических явлениях, такие, как силы упругости, силы давления, трения (сухого и вязкого), поверхностного натяжения, – имеют **электромагнитное происхождение**. Это объясняется тем, что взаимодействие между нейтральными молекулами (или атомами) определяется электромагнитным взаимодействием заряженных частиц, из которых они построены.

Вопросы, относящиеся к фундаментальным взаимодействиям, подробно обсуждаются в разделе “Элементарные частицы”.

В разделе “Механика” обычно ограничиваются рассмотрением гравитационных сил и некоторых сил, имеющих электромагнитную природу. К последним относятся, во-первых, собственно электрические и магнитные силы, действующие на точечные заряды (заряженные материальные точки, заряженные частицы) со стороны заданного электромагнитного поля, и, во-вторых, силы упругости, силы давления, силы трения.

Рассмотрим легкую (невесомую) пружинку, один конец которой закреплен, а второй свободен (т.е. может двигаться). Приложив к свободному концу силу $\vec{F}$, направленную вдоль пружинки, мы ее растянем или сожмем. На рис. 2.1 показана растянутая пружинка, ось

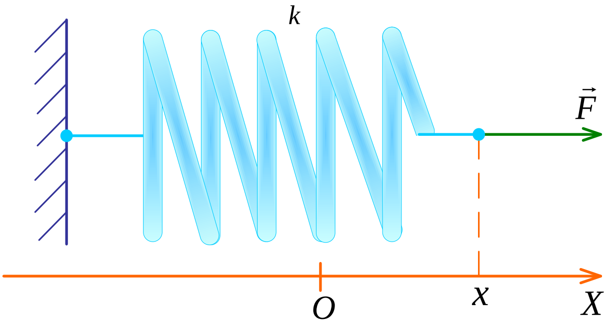


Рис. 2.1

OX направлена от закрепленного конца к свободному концу пружинки вдоль нее; начало *O* выбрано в точке, где находится свободный конец недеформированной пружинки. Удлинение пружинки –

$$\Delta l = l - l_0, \tag{2.22}$$

где l_0 – длина недеформированной пружинки, l– ее длина в данный момент времени (в данном положении). Очевидно (см. рис. 2.1),

$$\Delta l = x, \tag{2.23}$$

где x – отклонение свободного конца от положения равновесия.

Если пружинка упругая, то **величина ее удлинения прямо пропорциональна величине деформирующей силы** $\left|\vec{F}\right|$:

$$\left|\Delta l\right| = \frac{1}{k}F \quad , \qquad (2.24)$$

где k – положительная постоянная. Ее называют **коэффициентом упругости** или **коэффициентом жесткости** пружинки.

Уравнение (2.24) – **закон Гука**.

Этот закон описывает **упругую деформацию** тела.

- **Деформация** (напомним) – это изменение формы и (или) размеров тела.
- **Деформация** называется **упругой**, если деформированное тело после снятия нагрузки восстанавливает свою форму и размеры. В противном случае деформация называется **пластической**.

Таким образом, упругая – это **обратимая** деформация, а пластическая – **необратимая**.

На рис. 2.2 показаны силы, приложенные к свободному концу пружинки (сравни с рис. 2.1). Сила $\vec{F}'$ действует со стороны пружинки на тело, деформировавшее ее, например пальцы, а $\vec{F}$ – со стороны этого тела на пружинку. Свободный конец пружинки – точка контакта между ними.

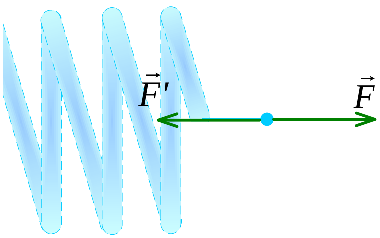


Рис. 2.2

- Сила $\vec{F}'$ – это **сила упругости**.

Она связана с внешней силой $\vec{F}$ третьим законом Ньютона:

$$\vec{F}' = -\vec{F}\,. \tag{2.25}$$

В проекции на ось *OX* имеем

$$F_x' = -F_x\,. \tag{2.26}$$

Нетрудно сообразить, что **закон Гука** (2.24) можно записать в форме, учитывающей знак удлинения пружинки:

$$x \equiv \Delta l = \frac{1}{k} F_x\,, \tag{2.27}$$

откуда получается:

$$F_x = k\Delta l, \qquad F_x = kx. \tag{2.28 а, б}$$

$$F_x' = -k\Delta l, \qquad F_x' = -kx. \tag{2.29 а, б}$$

Форма (2.29 б) записи закона Гука хорошо известна школьникам. Это уравнение можно заменить векторным

$$\vec{F}' = -k\vec{r}\,, \tag{2.30}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор свободного конца деформированной пружинки, проведенный из начала *O*, которое совпадает с его положением в отсутствие деформации ($F \to 0$).

В физике достаточно типичной является такая ситуация. Материальная точка находится в некотором статическом силовом поле $\vec{f}(\vec{r})$, причем сила $\vec{f}$, действующая на материальную точку, определяется ее положением $(\vec{r})$ следующим образом:

$$\vec{f}(\vec{r}) = -æ\vec{r}\,, \tag{2.31}$$

где æ – положительная постоянная, имеющая размерность коэффициента упругости (Н/м).

Приведем пример. В модели Томсона атома водорода считается, что положительный заряд ядра равномерно распределен по объему шара, и в этой сферической “капле” движется точечный электрон. Сила, действующая со стороны ядра, – это простая кулоновская сила; показано, что если начало отсчета совместить с центром “капли”, то сила $\vec{f}$, действующая на электрон, связана с его радиусом-вектором равенством (2.31)

$$æ = k_0 \frac{e^2}{R^3}\,, \tag{2.32}$$

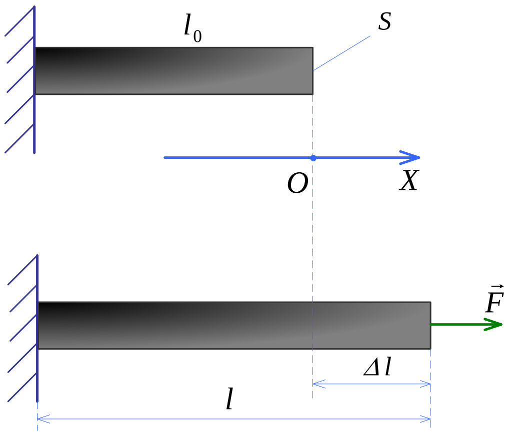


Рис. 2.3

где k_0 – коэффициент из закона Кулона, e – элементарный заряд, R – радиус заряженной “капли” – он же – радиус атома водорода. Таким образом, сила $\vec{f}$, не будучи силой упругости, **вычисляется по точно такому же правилу, как и упругая сила** $\vec{F}'$, в равенствах (2.30) и (2.31) различны только коэффициенты k и æ.

- Сила, вычисляемая по правилу (2.31) называется **квазиупругой силой**, коэффициент æ – коэффициент квазиупругости.

“Квази” – означает “как бы”.

Возьмем вместо пружинки однородный стержень длиной l_0 и площадью сечения S. На рис. 2.3 вверху показан недеформированный стержень, внизу – удлиненный; сила $\vec{F}$**,** растягивающая стержень, приложена к его свободному торцу. Если деформация мала

$$|\Delta l| << l_0, \tag{2.33}$$

то для любого материала стержня можно считать выполненным **закон Гука**.

Рассмотрим закон в форме

$$F_x = k\Delta l. \tag{2.28 а}$$

Здесь k– коэффициент упругости (жесткости) стержня. Он зависит, очевидно, от материала образца, площади сечения S и длины стержня l_0.

Введем ряд определений и представим закон Гука в форме, пригодной для описания упругих деформаций стержня в малой окрестности точки, т.е. локального описания. Такое описание позволит рассматривать **неоднородные деформации** стержня, при которых разные его части, имевшие в недеформированном состоянии одинаковые длины, растянуты или сжаты по-разному.

- **Относительной деформацией** (**относительным удлинением**) образца называется величина

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta l}{l_0}\,. \tag{2.34}$$

- **Напряжением**, приложенным к образцу, называется величина

$$\sigma \equiv \frac{F_x}{S}\,. \tag{2.35}$$

Используя определения (2.34), (2.35), перепишем закон Гука (2.28 а) в виде

$$\sigma = \left(\frac{kl_0}{S}\right)\varepsilon\,. \tag{2.36}$$

Обозначив

$$E \equiv \frac{kl_0}{S}\,, \tag{2.37}$$

приводим закон Гука к каноническому виду:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon\,. \tag{2.38}$$

Здесь E – **модуль Юнга**.

Форма (2.38) записи закона Гука имеет следующие преимущества.

1. Модуль Юнга E определяется только материалом образца и не зависит от его размеров (как коэффициент упругости k); E – табличная величина. Например, для стали E=2,1·10^{11} Па; 1Па=1Н/м^2.

Коэффициент упругости стержня данного сечения S и данной длины l_0, выполненного из определенного материала (E), можно вычислить с помощью формулы (2.37):

$$k = \frac{E \cdot S}{l_0}. \tag{2.39}$$

2. Напряжение σ – сила, действующая на единицу площади сечения – величина локальная, точно так же, как и относительное удлинение ε. Уравнение (2.38) позволяет описывать деформацию малых объемов образца, таким образом, появляется возможность описания **неоднородных деформаций** тел.

Пусть, например, требуется вычислить удлинение **тяжелого** стержня, подвешенного на нити. Очевидно, напряжение σ зависит от того, где располагается рассматриваемое сечение. Стержень растягивается под действием силы тяжести.

Будем пренебрегать изменением формы стержня и изменением его поперечных размеров. На рис. 2.4.а показан недеформированный стержень, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, на рис. 2.4 б – этот же стержень в подвешенном состоянии. Сечение S, имевшее координату x, смещается в точку с координатой x'.

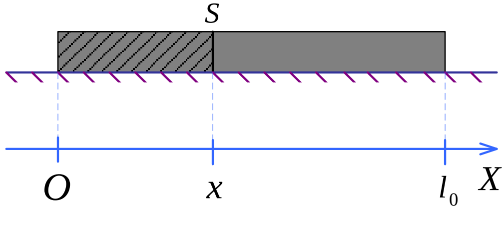


Рис. 2.4 а

Если бы мы знали, какова функция $x'(x)$, то нашли бы длину растянутого стержня просто по формуле

$$l = x'(l_0). \tag{2.40}$$

Таким образом, для решения задачи нужно найти эту пока неизвестную функцию.

Рассмотрим бесконечно тонкий слой стержня. На рис. 2.5 а слой имеет толщину dx, он не деформирован.

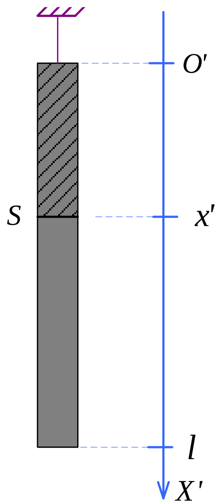


Рис. 2.4 б

На рис. 2.5 б показан деформированный слой, толщина его равна dx'.

Относительное удлинение слоя

$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx'}{dx} - 1, \tag{2.41}$$

можно считать $\varepsilon = \varepsilon(x)$.

Напряжение, приложенное к сечению S, найдем, рассмотрев ту часть стержня, которая на рис.2.4 а и 2.4 б заштрихована. Обозначим через $m(x)$ массу этой части стержня, а через M – массу всего стрежня.

Очевидно,

$$\frac{m(x)}{x} = \frac{M}{l_0}, \tag{2.42}$$

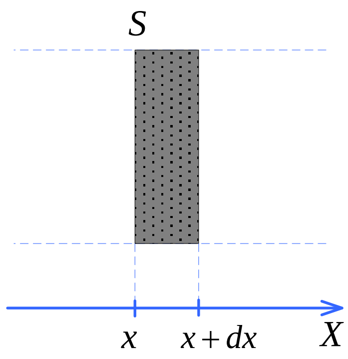


Рис. 2.5 а

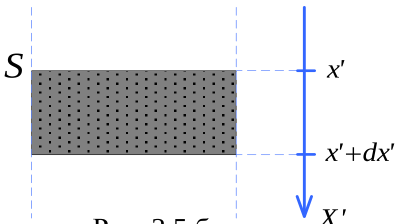


Рис. 2.5 б

откуда получаем

$$m(x) = \frac{M}{l_0} x. \tag{2.43}$$

На рис. 2.6 показаны силы, действующие на выделенную часть стержня: $m(x)\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}$ – сила, действующая на выделенную верхнюю часть стержня со стороны нижней его части; она приложена в сечении S и является силой, деформирующей, растягивающей верхнюю часть стержня, верхний торец которого можно считать закрепленным; $\vec{T}$ – сила натяжения нити.

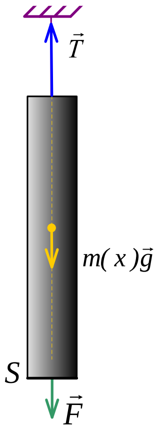


Рис. 2.6

Мы здесь имеем дело с телом, покоящимся относительно инерциальной системы отсчета. Такое тело, как говорят, **находится в состоянии равновесия**. Ускорение центра масс тела тождественно (при всех t) равно нулю

$$\vec{a}_c = 0. \qquad (2.44)$$

Из уравнения движения центра масс (2.21) тогда следует, что сумма внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю:

$$\vec{F}^{(ex)} = 0. \qquad (2.45)$$

- Равенство (2.45) называется **условием равновесия тела**. Для изображенной на рис. 2.6 части стержня имеем:

$$m(x)\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0. \qquad (2.46)$$

Аналогично, для всего стержня:

$$M\vec{g} + \vec{T} = 0. \qquad (2.47)$$

Проецируя уравнения (2.46), (2.47) на ось $O'X'$, направленную вниз (она на рис. 2.6 не показана), с учетом того, что $F = F(x) = \sigma(x) \cdot S$, получаем:

$$m(x)g - T + \sigma(x) \cdot S = 0, \qquad (2.48)$$

$$Mg - T = 0, \qquad (2.49)$$

откуда следует:

$$m(x)g + \sigma(x) \cdot S - Mg = 0. \qquad (2.50)$$

Тогда

$$\sigma(x) = \frac{(M - m(x))g}{S} = \frac{\left(M - \dfrac{M}{l_0}x\right)g}{S} = \frac{M(l_0 - x)g}{Sl_0}. \qquad (2.51)$$

Подставим в закон Гука

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x) \qquad (2.52)$$

выражения (2.51), (2.41):

$$\frac{M(l_0 - x)g}{Sl_0} = E\left(\frac{dx'}{dx} - 1\right). \qquad (2.53)$$

Отсюда

$$dx' = \left(\frac{M(l_0 - x)g}{ESl_0} + 1\right)dx. \qquad (2.54)$$

Интегрируя уравнение (2.54), с учетом условия $x = 0 \Rightarrow x' = 0$, получаем

$$x'(x) = \left(\frac{Mg}{ES} + 1\right)x - \frac{Mgx^2}{2ESl_0}. \qquad (2.55)$$

Подставив в (2.55) $x = l_0$, найдем длину растянутого стержня:

$$l = \left(\frac{Mg}{2ES} + 1\right)l_0. \qquad (2.56)$$

Удлинение стержня, таким образом,

$$\Delta l = l - l_0 = \frac{Mg}{2ES}l_0. \qquad (2.57)$$

На основе изложенного выше может сложиться впечатление, что при упругих деформациях всегда выполняется закон Гука (2.33), утверждающий, что относительная деформация образца прямо пропорциональна приложенному напряжению. Это не совсем так. Область упругости (интервал значений σ или ε, при которых деформация обратима) несколько шире области пропорциональности. Это различие невелико и определяется по-разному для разных материалов. Конкретные цифры приведены в учебниках (см., например [1]).

Трение, которое мы рассмотрим очень коротко, подразделяется на **сухое** и **вязкое** (жидкое).

- Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, смазки между ними, называют **сухим**.
- Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется **вязким** или **жидким**.

Применительно к **сухому трению** различают **трение скольжения**, **трение покоя** и **трение качения**. Последнее в наших лекциях не рассматривается.

При **скольжении** одного тела по поверхности другого на каждый элемент поверхности первого тела, находящийся в контакте со вторым телом, действуют силы. Они показаны на рис. 2.7. а, $\vec{\upsilon}$ – скорость первого тела относительно второго. Это – силы реакции элементов поверхности второго тела. На рис. 2.7 б показан результат сложения этих сил; $\vec{R}$ – **сила реакции поверхности** второго тела или просто **реакция поверхности**.

Эту силу принято разлагать на две составляющие. Первая направлена перпендикулярно поверхности и называется **нормальной реакцией поверхности** (иногда говорят «опоры») $\vec{N}$, а вторая направлена вдоль поверхности и называется **силой трения скольжения** $\vec{F}_{тр}^{(ск)}$. Итак,

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}^{(ск)}, \tag{2.58}$$

причем $\vec{N} \perp \vec{F}_{тр}^{(ск)}$.

Силы, действующие со стороны поверхности первого тела на второе, показаны на рис. 2.8 а, 2.8 б, 2.8 в. Они связаны с соответствующими силами, действующими на первое тело, третьим законом Ньютона:

$$\vec{R}' = -\vec{R}\,, \tag{2.59}$$

$$\vec{N}' = -\vec{N}\,, \tag{2.60}$$

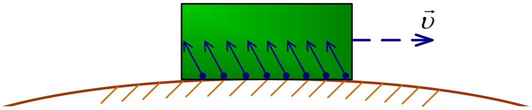


Рис. 2.7 а

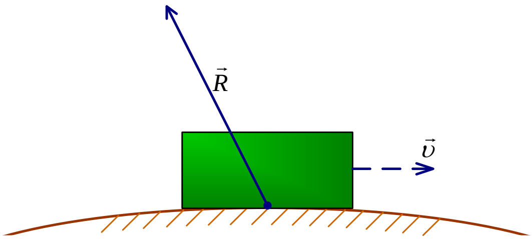


Рис. 2.7 б

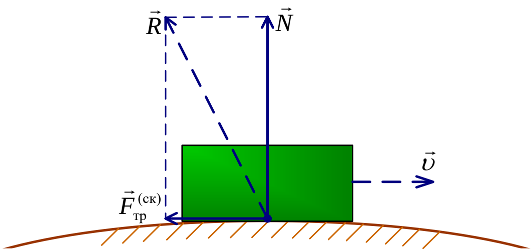


Рис. 2.7 в

$$\vec{F}_{\text{тр}}^{(\text{ск})}{}' = -\vec{F}_{\text{тр}}^{(\text{ск})}\,. \tag{2.61}$$

Оказывается, что сила трения скольжения не зависит от площади соприкосновения трущихся тел и пропорциональна величине **силы нормального давления (нормальной реакции**

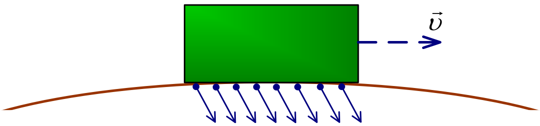


Рис. 2.8 а

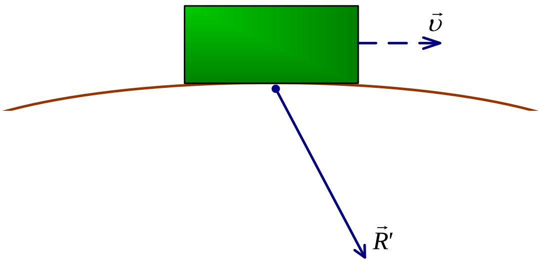


Рис. 2.8 б

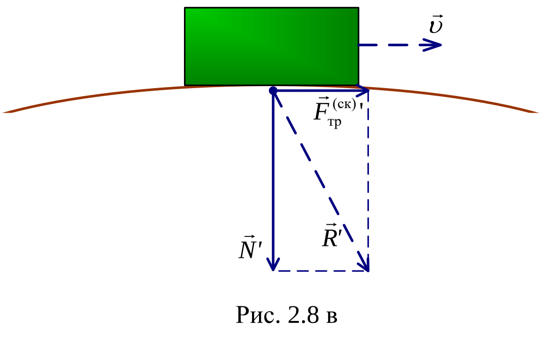


Рис. 2.8 в

поверхностей), прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}}^{(\text{ск})} = \mu N\,. \tag{2.62}$$

Безразмерный коэффициент μ называется **коэффициентом трения**. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей и, в частности от их шероховатости [1]. Коэффициент трения зависит также от относительной скорости тел. При решении конкретных задач мы будем этой зависимостью μ от υ пренебрегать.

Рассмотрим брусок, **покоящийся** на наклонной доске.

Когда не интересуются возможными вращениями тела, точку приложения всех сил обычно совмещают с центром масс (центром тяжести) тела (рис. 2.9). Условие равновесия бруска можно записать в виде

$$m\vec{g} + \vec{R} = 0\,. \tag{2.63}$$

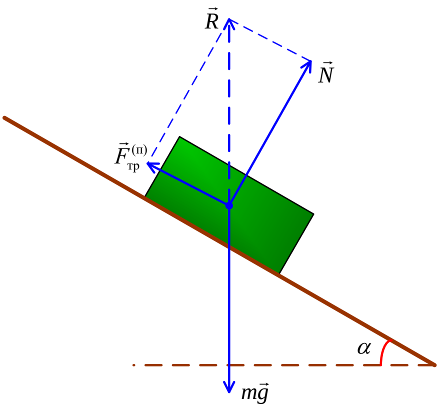


Рис. 2.9

На рис. 2.9 показано разложение **вертикальной** реакции доски $\vec{R}$ на две составляющие. Составляющая, направленная вдоль поверхности доски, – **сила трения покоя** $\vec{F}_{\text{тр}}^{(\text{п})}$.

Следует отметить, что в **рабочем чертеже**, который непосредственно используется в решении задачи, изображается **либо** сама сила, **либо** ее разложение, чтобы исключить возможность посчитать одну и ту же силу дважды. Пунктир на рис. 2.7, 2.8 и 2.9 означает, что на этих рисунках отображена **дополнительная** информация.

Если расположить доску горизонтально, поставить на нее брусок, а затем **медленно** поднимать левый конец доски, увеличивая угол наклона α к горизонту, то произойдет, очевидно, следующее. Вначале брусок относительно доски не движется. При этом выполняется условие равновесия (2.63), откуда следует

$$F_{\text{тр}}^{(\text{п})} = mg\sin\alpha, \tag{2.64}$$

– и так – вплоть до некоторого α_{max}, при котором начинается медленное соскальзывание. При **медленном** соскальзывании можно считать ускорение бруска пренебрежимо малым, и тогда силу трения, являющуюся **силой трения скольжения**, можно вычислить по формуле, аналогичной (2.64):

$$F_{\text{тр}}^{(\text{ск})} = mg\sin\alpha_{max}. \tag{2.65}$$

Выражения (2.64), (2.65) позволяют сделать вывод, что **сила трения покоя**, **возникающая при попытке сдвинуть тело** относительно поверхности другого тела, с которым оно находится в контакте, подчинена неравенству

$$0 \le F_{\text{тр}}^{(\text{п})} \le F_{\text{тр}}^{(\text{ск})}. \tag{2.66}$$

Таким образом, ограничение сверху на силу трения покоя имеет вид (см. (2.62)):

$$F_{\text{тр}}^{(\text{п})} \le \mu N\ . \tag{2.67}$$

Еще пример. На брусок, покоящийся на горизонтальной поверхности, действуют горизонтальной силой (тяги) $\vec{F}$, пытаясь его сдвинуть (рис. 2.10). Зависимость величины силы трения от величины силы тяги показана на рис. 2.11.

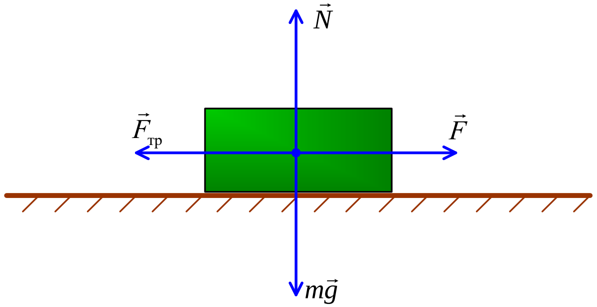


Рис. 2.10

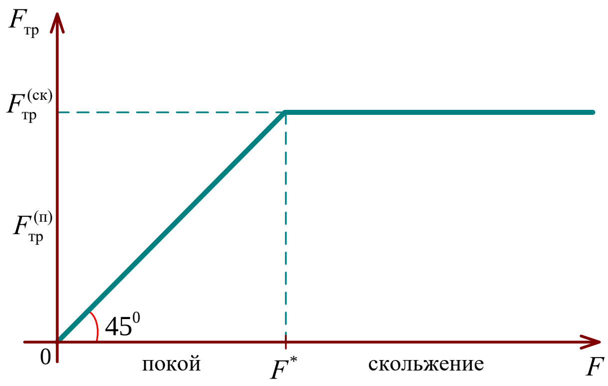


Рис. 2.11

Пока $F \le F^*$, брусок покоится, сила трения покоя ($\vec{F}_{\text{тр}}^{(\text{пп})}$) уравновешивает силу тяги $\vec{F}$, $F_{\text{тр}}^{(\text{пп}} = F$. При $F = F^* + 0$ брусок начинает скользить и далее на брусок действует уже **постоянная** сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}}^{(\text{ск})} = F^*, \tag{2.68}$$

которую **мы считаем** не зависящей от скорости бруска.

Еще раз обращаем внимание на неравенства (2.66), (2.67). Они часто используются при решении конкретных задач.

При движении твердого тела **относительно среды** (жидкости или газа) на тело действуют силы сопротивления среды. Не вдаваясь в подробности механизмов формирования этих сил, мы, во-первых, будем отожествлять их с **силами вязкого трения**, и, во-вторых, ограничимся их формальным описанием. Следует отметить сразу же, что вязкое трение покоя не существует; сила сопротивления $\vec{F}_c$ действует только на **движущееся относительно среды** тело: $\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \vec{F}_c = 0$.

При малых скоростях тела, когда обтекание тела средой (жидкостью или газом) можно считать слоистым (ламинарным), сила сопротивления пропорциональна скорости тела:

$$\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}, \tag{2.69}$$

где r – положительный коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров тела, ориентации тела относительно вектора скорости $\vec{\upsilon}$, состояния его поверхности и свойства среды, называемого вязкостью. На рис. 2.12 показано обтекание тела средой при малых скоростях. Картинка нарисована в системе отсчете, связанной с телом.

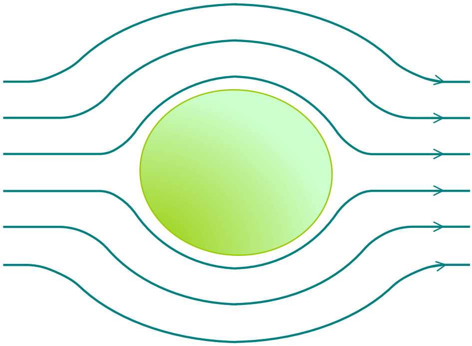


Рис. 2.12

При больших скоростях используется приближение квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости:

$$\vec{F}_c' = -\beta \upsilon \vec{\upsilon}, \qquad (2.70)$$

где β – коэффициент, аналогичный коэффициенту сопротивления r, $\beta > 0$. В любом случае сила направлена противоположно $\vec{\upsilon}$. Подчеркнем, что скорость $\vec{\upsilon}$ тела определяется в **СО**, связанной со средой.

Значение величины скорости υ тела, при котором перестает работать линейное приближение (2.69) и начинает работать приближение квадратичное (2.70) зависит от тех же факторов, что и коэффициент сопротивления *r*.

Если в условии конкретной задачи не указан характер зависимости силы сопротивления среды от скорости тела, то по умолчанию выбирается (как правило) вариант (2.69).

2.3. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.

Рассмотрим точечный заряд (заряженную материальную точку, заряженную частицу) в **заданном** электромагнитном поле.

Вообще говоря, электромагнитное поле содержит как электрическую, так и магнитную компоненты, т.е. представляет собой композицию **электрического** и **магнитного** полей. Первое из них можно описать, задав **напряженность электрического поля** $\vec{E}$, а второе – с помощью **индукции магнитного поля** $\vec{B}$.

В общем случае эти величины являются функциями координат и времени:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t). \qquad (2.71 \text{ а, б})$$

Если явная зависимость от времени отсутствует, то поле называется **статическим**. Если отсутствует зависимость характеристики поля ($\vec{E}$ или $\vec{B}$) от координат, то поле называется **однородным**.

В системе единиц СИ [E]=В/м, [B]=Тл.

На точечный заряд со стороны электромагнитного поля действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]. \qquad (2.72)$$

Первое слагаемое в (2.72) – сила, действующая со стороны электрического поля; второе – сила, действующая со стороны поля магнитного.
Магнитная сила

$$\vec{F}_{л} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] \qquad (2.73)$$

называется **силой Лоренца**.

(Иногда силой Лоренца называют силу (2.72) – обычно из контекста ясно, о какой именно силе идет речь.)

Отметим сразу же следующее. Во-первых, магнитное поле на покоящийся заряд не действует: при $\upsilon = 0$ сила Лоренца (2.73) обращается в ноль. Во-вторых, сила Лоренца перпендикулярна **и** скорости частицы $\vec{\upsilon}$ **и** индукции магнитного поля $\vec{B}$:

$$\vec{F}_л \perp \vec{\upsilon},\ \vec{F}_л \perp \vec{B}\ . \qquad (2.74\ а,б)$$

Простейшие электромагнитные поля – это однородное статическое электрическое поле $\vec{E} = const$ и однородное магнитостатическое поле $\vec{B} = const$. Мы ограничимся рассмотрением движения точечного заряда в каждом из этих полей.

Уравнение движения частицы с зарядом q и массой m в электрическом поле имеет вид

$$m\vec{a} = q\vec{E}\ . \qquad (2.75)$$

В случае $\vec{E} = const$ получаем

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = const\ . \qquad (2.76)$$

Тогда (см. пример из ГЛАВЫ 1) можно сразу записать:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}t\ , \qquad (2.77)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{q}{2m}\vec{E}t^2\ , \qquad (2.78)$$

где $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость, $\vec{r}_0$ – начальное значение радиус-вектора частицы. Закон движения частицы (2.78) содержит полную информацию о ее движении. Нетрудно показать, например, что траектория частицы – либо прямая, параллельная силовым линиям поля ($\vec{\upsilon}_0 \uparrow\uparrow \vec{E},\ \vec{\upsilon}_0 \uparrow\downarrow \vec{E}$), либо парабола, ось которой параллельна линиям поля $\vec{E}$.

Уравнение движения частицы в поле $\vec{B} = const$ запишем в форме

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]. \tag{2.79}$$

Прежде всего разложим скорость частицы на две составляющие:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{\parallel} + \vec{\upsilon}_{\perp}, \tag{2.80}$$

– так, как показано на рис.2.13; $\vec{\upsilon}_{\parallel}$ – составляющая скорости, параллельная силовым линиям магнитного поля, $\vec{\upsilon}_{\parallel}$ направлена по $\vec{B}$ или противоположно $\vec{B}$ (в зависимости от угла α между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$); $\vec{\upsilon}_{\perp}$ – составляющая, перпендикулярная силовым линиям. Очевидно,

$$\upsilon_{\parallel} = \upsilon\left|\cos\alpha\right|,\ \upsilon_{\perp} = \upsilon\sin\alpha. \tag{2.81 а,б}$$

Подставляя разложение (2.80) в уравнение (2.79), получаем

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_{\parallel}}{dt} + m\frac{d\vec{\upsilon}_{\perp}}{dt} = q\left[\vec{\upsilon}_{\parallel}, \vec{B}\right] + q\left[\vec{\upsilon}_{\perp}, \vec{B}\right]. \tag{2.82}$$

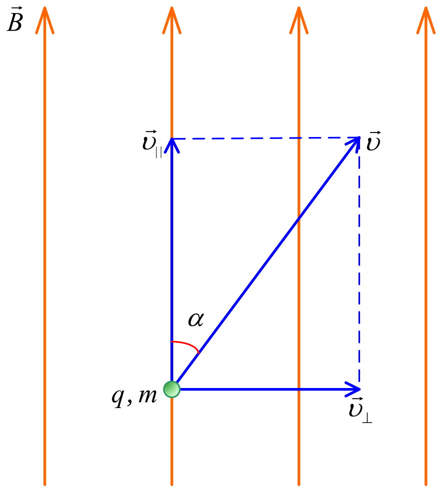


Рис. 2.13

Первое слагаемое в левой части (2.82) – вектор, параллельный силовой линии, второе – вектор, перпендикулярный $\vec{B}$. Первое слагаемое в правой части равно нулю, а второе – вектор, перпендикулярный $\vec{B}$. Приравнивая друг другу – отдельно – векторы, параллельные $\vec{B}$ и перпендикулярные $\vec{B}$, вместо (2.82) получаем **два** уравнения:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_{\parallel}}{dt} = 0, \qquad (2.83\text{ а})$$

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_{\perp}}{dt} = q\left[\vec{\upsilon}_{\perp}, \vec{B}\right]. \qquad (2.83\text{ б})$$

Из (2.83 а) следует

$$\vec{\upsilon}_{\parallel} = const. \qquad (2.84)$$

Разложение (2.80) – это правило сложение скоростей, причем оно описывает переход от лабораторной (исходной) **ИСО** (K) к **СО** (K′), которая движется относительно K со скоростью (2.84) и поэтому также является инерциальной. Относительно **СО** K′ частица движется в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, причем ее движение определяется уравнением (2.83 б). На рис. 2.14 эта плоскость показана, O′ – начало отсчета в плоскости (в системе отсчета K′), $\vec{r}_\perp$ – радиус-вектор частицы в **СО** K′, $\vec{r}$ – ее радиус вектор в **СО** K. Очевидно,

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \vec{\upsilon}_\parallel = \frac{d\vec{r}_\parallel}{dt}, \qquad \vec{\upsilon}_\perp = \frac{d\vec{r}_\perp}{dt}. \qquad (2.85\ а,\ б,\ в)$$

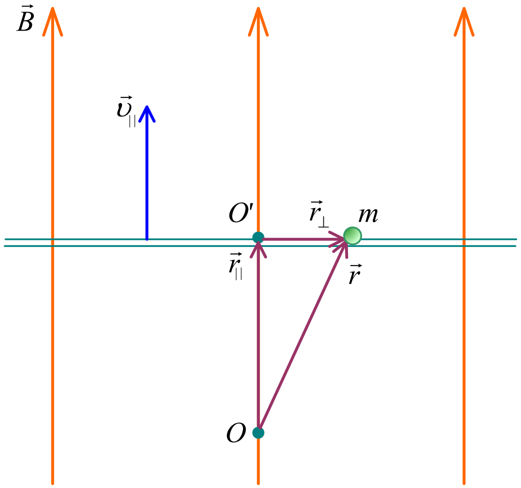


Рис. 2.14

Самый простой вариант движения частицы – равномерное движение вдоль прямолинейной силовой линии, при этом $\vec{\upsilon}_\parallel = const$, $\vec{\upsilon}_\perp = 0$.

Пусть теперь $\vec{\upsilon}_\perp \neq 0$. Интегрируя уравнение поперечного движения (2.83 б), получаем

$$m\vec{\upsilon}_\perp = q\left[\vec{r}_\perp, \vec{B}\right]. \tag{2.86}$$

Отсюда следует

$$\vec{\upsilon}_\perp = \frac{q}{m}\left[\vec{r}_\perp, \vec{B}\right]. \tag{2.87}$$

Постоянная интегрирования в (2.86) отсутствует. Дело в том, что ее можно обратить в ноль надлежащим выбором начала отсчета O′, что мы и сделали. Соответствующие выкладки приведены в **Приложении №1**.

Введем обозначение

$$\vec{\omega}_B \equiv -\frac{q}{m}\vec{B}. \tag{2.88}$$

Тогда равенство (2.87) можно переписать в виде

$$\vec{\upsilon}_\perp = \left[\vec{\omega}_B, \vec{r}_\perp\right]. \tag{2.89}$$

Это соотношение показывает (см. ГЛАВУ I), что поперечное движение частицы представляет собой равномерное движение по окружности радиуса $R = \left|\vec{r}_\perp\right|$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_B$, определяемой равенством (2.88). Величина

$$\omega_B = \frac{|q|}{m}B \tag{2.90}$$

называется также ***циклотронной частотой*** вращения частицы. Эта величина не зависит ни от модуля скорости частицы, ни от угла между $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$. Отметим:

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \sin\alpha = \omega_B \cdot R \;. \tag{2.91}$$

Используя очевидное равенство

$$\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] = \left[\vec{\upsilon}_{\perp}, \vec{B}\right], \tag{2.92}$$

определение (2.88) и соотношение (2.89), можно показать, что сила Лоренца, действующая на частицу, может быть представлена в виде

$$\vec{F}_{\text{л}} = -m\omega_B^2 \vec{r}_{\perp} \,. \tag{2.93}$$

Таким образом, в общем случае движение заряженной частицы в однородном магнитостатическом поле представляет собой композицию равномерного движения частицы (со скоростью $\vec{\upsilon}_{\|}$) вдоль силовой линии и равномерного вращения (с угловой скоростью $\vec{\omega}_B$) в перечном (по отношению к $\vec{B}$) направлении. Это движение по цилиндрической спирали, ось которой параллельна силовым линиям (рис. 2.15). На рисунке показаны **радиус спирали** R и **шаг спирали** h. В частном случае ($\alpha = 0$, $\alpha = \pi$) спираль вырождается в прямую, а при $\alpha = \pi/2$ – в окружность ($h = 0$).

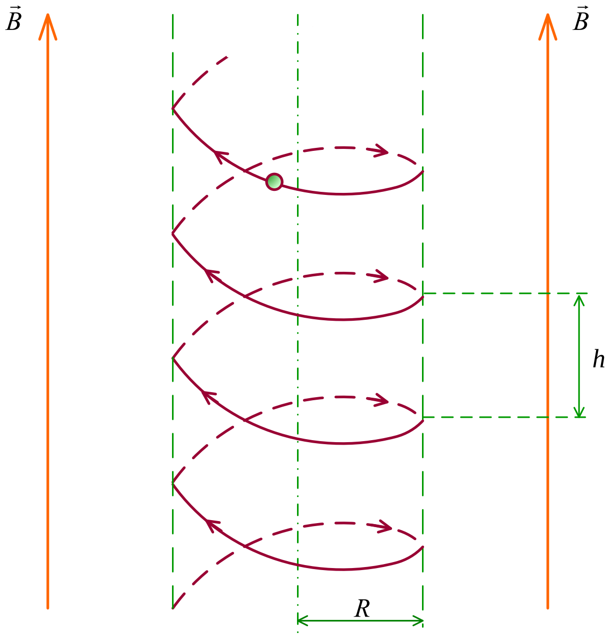


Рис. 2.15

2.4.Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения. Принцип суперпозиции для ньютоновых гравитационных сил. Гравитационное поле. Напряженность гравитационного поля. Принцип эквивалентности. Движение спутников. Первая космическая скорость. Вес тела.

Гравитационное взаимодействие является универсальным: в нем участвуют **все** физические объекты, **все** элементарные частицы.

В ньютоновой механике $(\upsilon \ll c)$ гравитационное взаимодействие определяется **законом всемирного тяготения,** открытым Ньютоном:

- любые две материальные точки взаимодействуют между собой силами **гравитационного притяжения**; эти силы направлены вдоль отрезка, соединяющего материальные точки, величина этих сил пропорциональна массам материальных точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{гр}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (2.94)$$

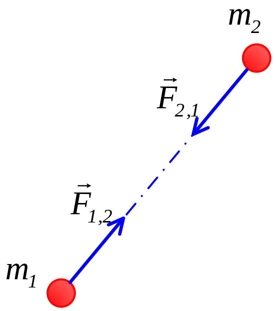


Рис. 2.16

Векторы сил показаны на рис.2.16, $\vec{F}_{1,2}$ – сила, действующая на м.т. m_1 со стороны м.т. m_2; $\vec{F}_{2,1}$ действует на m_2 со стороны m_1; в соответствии с третьим законом Ньютона

$$\left|\vec{F}_{1,2}\right| = \left|\vec{F}_{2,1}\right| = F_{\text{гр}}. \qquad (2.95)$$

В выражении для силы гравитационного взаимодействия (2.94) m_1, m_2 – так называемые **гравитационные массы**, которые, как выяснилось, совпадают с известными нам **инертными массами** материальных точек. Коэффициент пропорциональности G называется **гравитационной постоянной**. В системе СИ $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2).

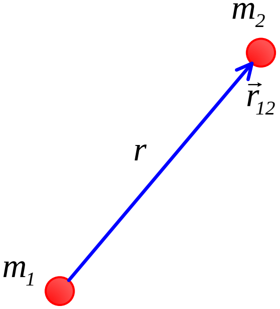


Рис. 2.17

Силы $\vec{F}_{1,2}, \vec{F}_{2,1}$ можно записать в векторной форме. Например,

$$\vec{F}_{2,1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r}, \qquad (2.96)$$

где $r = \left|\vec{r}_{12}\right|$ – см. рис. 2.17.

Ньютоновы гравитационные силы подчиняются **принципу суперпозиции**. Для того, чтобы вычислить силу $\vec{F}$, действующую на м.т. m со стороны **системы** м.т. m_1 и m_2, нужно сложить силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на m со стороны каждой из м. точек m_1 и m_2 **в отсутствии другой м. точки** (рис. 2.18):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{2.97}$$

причем, вычисляя $\vec{F}_1$, мы должны “забыть” о присутствии m_2, а вычисляя $\vec{F}_2$, – “забыть” об m_1. Другими словами, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ находятся по формуле (2.96):

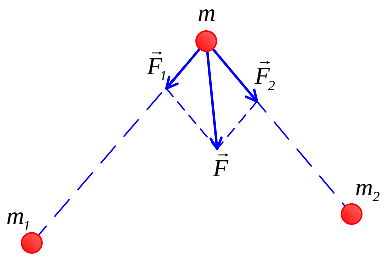
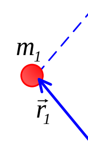


Рис. 2.18



$$\vec{F}_1 = -G\frac{m_1 m}{|\vec{r}_1\,'|^2}\cdot\frac{\vec{r}_1\,'}{|\vec{r}_1\,'|}, \tag{2.98 а}$$

$$\vec{F}_2 = -G\frac{m_2 m}{|\vec{r}_2\,'|^2}\cdot\frac{\vec{r}_2\,'}{|\vec{r}_2\,'|}. \tag{2.98 б}$$

Радиусы-векторы, фигурирующие в формулах (2.98), показаны на рис. 2.19. Если задавать положения материальных точек радиусами-векторами, проведенными из одного начала О, то формулы (2.98) приобретают вид (см. рис. 2.19)

$$\vec{F}_1 = -G\frac{m_1 m}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}, \qquad (2.99\text{ а})$$

$$\vec{F}_2 = -G\frac{m_2 m}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|}. \qquad (2.99\text{ б})$$

- В общем случае, когда система, действующая на м.т. m (положение $\vec{r}$), содержит n материальных точек (массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, положения $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$), гравитационная сила, действующая на м.т. m со стороны системы, вычисляется по правилу

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,, \qquad (2.100)$$

где $\vec{F}_i$ – сила, действующая на m со стороны m_i **в отсутствие** всех остальных материальных точек.

Приведенное утверждение называется **принципом суперпозиции для ньютоновых гравитационных сил**.

Выпишем выражения для $\vec{F}_i$ и $\vec{F}$:

$$\vec{F}_i = -G\frac{m m_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \qquad (2.101)$$

$$\vec{F} = m\sum_{i=1}^{n}(-G)\frac{m_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}. \qquad (2.102)$$

Если распределение массы системы является не дискретным, а **непрерывным** и задано, скажем, с помощью объемной плотности $\rho = \rho(\vec{r}\,')$, то роль материальной точки играет бесконечно малый объем dV' с бесконечно малой массой $dm' = \rho(\vec{r}\,')dV'$. Чтобы можно было пользоваться принципом суперпозиции в случае непрерывного распределения массы системы, в формулах (2.100), (2.101), (2.102) нужно сделать замены:

$$\vec{r}_i \to \vec{r}\,',\ m_i \to dm' = \rho(\vec{r}\,')dV',\ \vec{F}_i \to d\vec{F},\ \sum_i \ldots \to \int_D \ldots dV', \qquad (2.103\ \text{а,б,в,г})$$

где интегрирование проводится по области *D*, занятой системой. После замен (2.103) формулы (2.100), (2.101), (2.102) приобретают соответственно форму

$$\vec{F} = \int_D d\vec{F} \qquad (2.104)$$

$$d\vec{F} = -G\frac{m\rho(\vec{r}\,')dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}, \qquad (2.105)$$

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = m\int_D -G\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV'. \qquad (2.106)$$

Равенства (2.102), (2.106) в принципе решают вопрос о вычислении гравитационной силы, действующей на материальную точку m со стороны **произвольной** системы. Это позволяет вычислить гравитационную силу, действующую **на**

одну систему со стороны другой дополнительным сложением (или интегрированием).

Оказывается, что ньютоновы силы тяготения (**как и кулоновские**!) подчиняются т.н. **теореме Гаусса**. Мы отложим ее формулировку и обсуждение до раздела «Электростатика». Сейчас же отметим одно простое следствие этой теоремы: формулу (2.94) можно использовать **непосредственно** при вычислении силы взаимодействия между двумя протяженными шарами (r – расстояние между их центрами), а также между шаром и материальной точкой. Единственное условие: требуется, чтобы распределение массы по объемам шаров обладало центральной симметрией. Мы в дальнейшем учтем это замечание.

В законе всемирного тяготения Ньютона (2.94) предполагается, что материальная точка "знает", где находится притягивающий ее партнер. Если материальные точки движутся со скоростями $\upsilon_1, \upsilon_2 << c$, то закон остается в силе, т.е. информация об изменении положений материальных точек распространяется мгновенно. В таких случаях говорят, что материальные точки взаимодействуют непосредственно (без посредника).

С точки зрения **концепции близкодействия** ситуация выглядит так. Одна материальная точка создает (возбуждает) в пространстве гравитационное поле, а другая взаимодействует с этим полем в точке, где она находится в данный момент времени. В **нерелятивистской физике** считается, что возмущения полей, вызванные движением источников (этих полей), распространяются мгновенно, с бесконечно большой скоростью. Казалось бы, введение посредника (силового поля) для описания взаимодействия – не является необходимым, в нерелятивистских задачах такое введение не добавляет (**в принципе**) ничего нового.

Однако, во-первых, если мы рассматриваем поле как реальный физический объект, это существенно расширяет класс практически интересных задач, которые могут быть сформулированы в рамках ньютоновой теории тяготения. Во-вторых, когда рассматриваемые скорости, вообще говоря, не малы (релятивистский случай) следует учитывать то, что возмущения поля распространяются хотя и с очень большой, но **конечной** скоростью, так что здесь поле уже никакой не посредник, а реальный участник взаимодействия. Поэтому к понятию “поле” лучше привыкать сразу, начиная с простых ситуаций.

Итак, гравитационное поле (поле силы тяжести, поле тяготения) – реальный физический объект. Уравнения (2.102), (2.106) мы должны теперь понимать так: они определяют силу, действующую со стороны гравитационного поля системы на материальную точку m.

Отношение силы к массе материальной точки m не зависит от массы m и поэтому является силовой характеристикой гравитационного поля.

- Эта величина

$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}}{m} \tag{2.107}$$

называется напряженностью гравитационного поля (поля силы тяжести). Ясно, что $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$, время t здесь рассматривается как параметр. Очевидно, принцип суперпозиции можно сформулировать и на языке напряженностей; вместо (2.100) будем иметь:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i(\vec{r}) \tag{2.108}$$

Напряженность поля произвольной системы можно найти, поделив на массу m равенства (2.102) или (2.106), определяющие силу, действующую на **пробную частицу** (материальную точку m).

Введем определение.

- Свободным падением материальной точки (тела) называется ее движение под действием одной лишь силы тяжести (гравитационной силы).

Из второго закона Ньютона тогда следует, что **напряженность гравитационного поля $\vec{g}$ совпадает с ускорением свободного падения пробной частицы**.

Отметим, что **принцип суперпозиции** (2.100), (2.108), очень похожий на **принцип независимости действия** (разных!) сил, является положением нетривиальным. Ньютоново описание возможно только для относительно слабых гравитационных полей. Сильное гравитационное поле, рассматриваемое в релятивистской теории гравитации, принципу суперпозиции не подчиняется.

“Гравитационные поля (или поля тяготения) обладают следующим основным свойством: все тела (материальные точки) вне зависимости от их массы движутся в них (при заданных начальных условиях) одинаковым образом.

Например, законы свободного падения в поле тяготения Земли одинаковы для всех тел, какой бы массой они ни обладали, – все они приобретают одно и то же ускорение.

Это свойство гравитационных полей дает возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчета. Действительно, в инерциальной системе отсчета свободное движение всех тел происходит прямолинейно и равномерно, и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковы, то они будут одинаковыми все время. Очевидно, поэтому, что если рассматривать это движение в заданной неинерциальной системе, то и относительно нее все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчета такие же, как в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Другими словами, **неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю**. Это обстоятельство называют **принципом эквивалентности** [2].

Основное свойство гравитационных полей присуще как слабым, так и сильным полям. Принцип эквивалентности, позволяющий отождествлять инертную и гравитационную массы, лежит в основе релятивисткой теории гравитации.

Рассмотрим планету радиуса R и массы M и будем считать распределение массы по ее объему центрально-симметричным. Тогда на м.т. m, находящуюся на расстоянии r от центра планеты на высоте h над ее поверхностью, действует сила тяжести

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}. \qquad (2.109)$$

Ускорение свободного падения на высоте h:

$$g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (2.110)$$

У поверхности планеты ($h \to 0$)

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}. \qquad (2.111)$$

Используя (2.110), (2.111) можно получить

$$g(h) = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2. \qquad (2.112)$$

Пусть имеется спутник m, движущийся вокруг планеты по круговой орбите на высоте h (рис. 2.20). Центростремительное ускорение спутника совпадает с ускорением свободного падения:

$$\frac{\upsilon^2}{R+h} = G\frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (2.113)$$

Отсюда скорость спутника

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}. \qquad (2.114)$$

- Назовем **первой космической** скорость равномерного движение спутника по круговой орбите на малой ($h \ll R$) высоте.

Пренебрегая h в (2.114), получаем

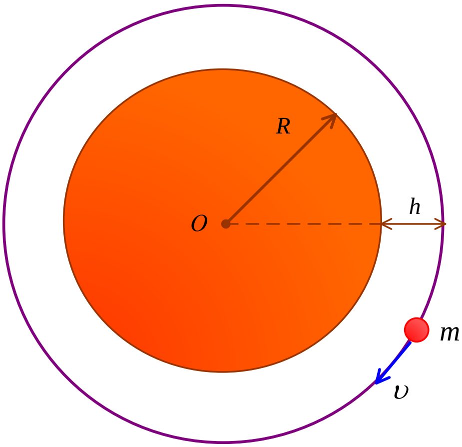


Рис. 2.20

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{g_0 R}, \qquad (2.115)$$

где g_0 – ускорение свободного падения у поверхности планеты. Для Земли $g_0 = 9{,}8$ м/с^2, $R = 6370$ км. Отсюда для первой космической скорости получаем $\upsilon_1 = 7{,}9$ км/с.

- **Весом тела** называется сила, с которой тело, находящееся в поле сил тяжести (как правило, создаваемом каким-либо небесным телом, например Землей, Солнцем и т.д.), действует на опору или подвес, препятствующие свободному падению тела.

На рис. 2.21 и 2.22 показаны силы, действующие на тело m, которое покоится относительно поверхности Земли на широте φ: $\vec{F}_{\text{т}}$ – сила тяжести, направленная к центру Земли *O*, $\vec{R}$ – сила реакции поверхности.

Покажем, что вес тела зависит от широты местности φ, и найдем эту зависимость.

Тело участвует в суточном вращении Земли и, следовательно, движется по окружности радиуса

$$r = r_0 \cos\varphi, \qquad (2.116)$$

совпадающей с параллелью. По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{т}} + \vec{R}, \qquad (2.117)$$

$\vec{a}$ – центростремительное ускорение тела. Вес тела определяется по третьему закону Ньютона:

$$\vec{P} = -\vec{R}, \qquad (2.118\ \text{а})$$

$$P = R. \quad (2.118\ б)$$

Величина силы тяжести:

$$F_т = mg_0. \quad (2.119)$$

Ускорение тела:

$$a = \omega^2 r = \omega^2 r_0 \cos\varphi, \quad (2.120)$$

где ω – угловая скорость суточного вращения Земли, $\omega = 2\pi/T$, $T = 24$ часа.

Величина веса P определяется с помощью теоремы косинусов (рис. 2.22):

$$P^2 = (mg_0)^2 + (m\omega^2 r_0 \cos\varphi)^2 - 2m^2 g_0 \omega^2 r_0 \cos^2\varphi. \quad (2.121)$$

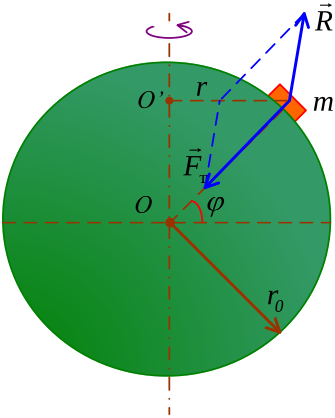


Рис. 2.21

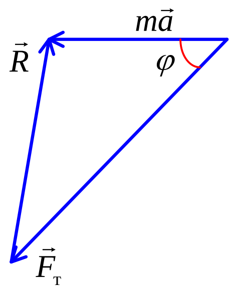


Рис. 2.22

2.5. Импульс материальной точки. Импульс механической системы и скорость ее центра масс. Второй закон Ньютона на языке импульса. Закон сохранения проекции импульса на координатную ось. Столкновения.

Начнем с определений.

- **Импульсом материальной точки** называется величина

$$\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}, \tag{2.122}$$

где m – масса м.т., $\vec{\upsilon}$ – ее скорость (мгновенная).

- **Импульсом механической системы** (набор материальных точек) называется величина

$$\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i\,. \tag{2.123}$$

Таким образом, импульс является, по определению, величиной **аддитивной**: импульс целого равен сумме импульсов частей.

Из уравнения (2.11) следует, что импульс системы связан со скоростью центра масс $\vec{\upsilon}_c$ простым равенством

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}_c, \tag{2.124}$$

где $m \equiv \sum_i m_i$ – масса системы. Отметим, что везде, где это особо не оговорено, мы считаем массы постоянными параметрами.

Импульс системы, как мы видим, не зависит от того, как движутся части системы относительно ее центра масс. Например, однородный шарик, движущийся поступательно, и такой же шарик, вращающийся вокруг оси, проходящей через его центр, имеют одинаковые импульсы, если скорости их центров одинаковы.

Продифференцируем по времени определение импульса материальной точки (2.122):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad . \qquad (2.125)$$

Полученное равенство позволяет переписать второй закон Ньютона **на языке импульса**:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad , \qquad (2.126)$$

где $\vec{F}$ – сумма сил, действующих на материальную точку. Уравнение движения (2.126) можно прочитать так: “Скорость изменения импульса материальной точки равна сумме действующих на нее сил”.

Следует обратить особое внимание на форму (2.126) второго закона. Дело в том, что **в релятивисткой механике** уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона) записывается именно в виде (2.126). Уравнение

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (2.1\ б)$$

в релятивисткой области не работает.

Неэквивалентность уравнений (2.1.б) и (2.126) объясняется тем, что импульс релятивисткой частицы (материальной точки) можно записать в виде (2.122), если под m понимать так называемую **релятивистскую массу** частицы m_r. Она зависит от величины скорости частицы $m_r = m_r(\upsilon)$, поэтому равенство (2.125) из (2.122) не получается.

В нерелятивистском приближении ($\upsilon \ll c$) $m = const$, (2.125) – верное равенство, и (2.126) эквивалентно (2.1 б).

Перепишем уравнение движения материальной точки в форме

$$d\vec{p} = \vec{F}dt\,. \tag{2.127}$$

- Величина $\vec{F}dt$ называется импульсом силы $\vec{F}$ за промежуток времени dt

(суммой импульсов сил, действующих на материальную точку, импульсом суммы сил).

Проинтегрировав (2.127) по промежутку (t_1, t_2), получаем

$$\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt\,. \tag{2.128}$$

В правой части (2.128) – импульс силы $\vec{F}$ за промежуток времени (t_1, t_2).

Поделив (2.128) на $\Delta t = t_2 - t_1$, найдем

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{cp}\,, \tag{2.129}$$

где

$$\vec{F}_{cp} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \tag{2.130}$$

– средняя за (t_1, t_2) сила, действующая на материальную точку (сумма средних за Δt сил, среднее значение суммы сил).

Все приведенные векторные равенства, очевидно, можно спроецировать на координатные оси и записать те же результаты “в проекциях”.

Займемся теперь механической системой.

Продифференцировав (2.124) по времени, получаем

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c\,. \tag{2.131}$$

Используя уравнение движения центра масс (2.21), приходим к равенству

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ex)}\,. \tag{2.132}$$

Полученное равенство – уравнение поступательного движения системы или второй закон Ньютона для поступательного движения системы – на языке импульса.

Ниже обсуждается **закон сохранения импульса**. В этом обсуждении используется понятие **сохраняемости** физической величины.

- Говорят, что **физическая величина сохраняется** (в каком-либо процессе), если она **не изменяется со временем**.

Закон сохранения импульса механической системы легко получается как следствие уравнения движения (2.132):

$$\vec{F}^{(ex)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const\,. \tag{2.133}$$

Читается так:

- **если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется**.

Это – наиболее общая формулировка закона сохранения импульса. Приведем пример. Пусть частица зарядом q и массой m движется в комбинации двух силовых полей: однородного поля силы тяжести $\vec{g} = const$ и однородного вертикального электростатического поля $\vec{E} = const$. Если

$$m\vec{g} + q\vec{E} = 0, \qquad (2.134)$$

то импульс частицы сохраняется.

Подобные ситуации, когда можно гарантировать выполнение равенства $\vec{F}^{(ex)} = 0$, являются достаточно редкими. Значительно шире класс таких задач, в которых **внешними силами**, действующими на систему, **можно пренебречь** и рассматривать систему как замкнутую.

Традиционная формулировка гласит:

- **импульс замкнутой системы сохраняется**.

Отметим следующее. Несмотря на то, что замкнутая система представляет собой модель, идеализацию, рассмотрение замкнутых систем в физике является принципиально важным.

Спроецируем уравнение движения (2.132), например, на ось OX:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x^{(ex)}. \qquad (2.135)$$

Отсюда получаем **закон сохранения проекции импульса**:

$$F_x^{(ex)} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = const, \qquad (2.136)$$

- **если сумма проекций внешних сил на какую-либо координатную ось равна нулю, то соответствующая проекция импульса системы сохраняется**.

Приведенный закон сохранения имеет большую практическую значимость, ситуация, когда, например, $F_x^{(ex)} = 0$ при $\vec{F}^{(ex)} \neq 0$ встречается довольно часто.

При рассмотрении столкновений (ударов) тел (частиц) без закона сохранения импульса не обойдешься, тем более, что детали столкновения описать, как правило, невозможно (или они не представляют интереса).

Рассмотрим столкновение двух тел. Если система рассматривается как замкнутая, то импульс ее точно сохраняется и тогда

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}', \qquad (2.137)$$

где $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ – импульсы тел до столкновения, а $\vec{p}_1{}', \vec{p}_2{}'$ – после столкновения. Равенство (2.137) можно переписать в виде

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1{}' + m_2\vec{\upsilon}_2{}' \qquad (2.138)$$

где $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_1{}', \vec{\upsilon}_2{}'$ – скорости центров масс тел до – и после столкновения.

Отметим, что характер сил взаимодействия между телами при столкновения – с точки зрения импульса – не имеет никакого значения – ведь это **внутренние** силы.

Рассмотрим важный частный случай.

- **Абсолютно неупругим** ударом называется такое столкновение (удар), после которого столкнувшиеся тела (частицы) движутся как одно целое, их относительная скорость равна нулю.

Примером абсолютно неупругого столкновения может служить соударение двух кусочков пластилина, после которого они слипаются.

Закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара можно записать в виде

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}, \qquad (2.139)$$

где $\vec{u}$ – скорость центра масс **составного** тела.

Еще пример абсолютно неупругого столкновения: захват (движущегося) электрона положительно заряженным ионом с образованием нейтрального атома (рекомбинация). В этом случае в уравнении (2.139) m_1 и m_2 – массы иона и электрона, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – их скорости до столкновения, $\vec{u}$ – скорость атома. Аналогичный процесс – объединение разноименно заряженных ионов в нейтральную молекулу.

Обсудим теперь столкновение тел, происходящее на фоне действия внешних сил. Пример: столкновение в воздухе двух шариков массами m_1 и m_2, брошенных с поверхности земли.

Столкновение – это процесс, происходящий в течение определенного конечного промежутка времени (t_1, t_2). Здесь t_1 – момент начала взаимодействия (для системы двух тел – момент первого касания), а t_2 – момент окончания процесса взаимодействия. В случае абсолютно неупругого столкновения t_2 – момент времени, начиная с которого относительные скорости тел равны нулю. Длительность столкновения $\Delta t = t_2 - t_1$.

Если в вышеприведенном примере с шариками пренебречь архимедовыми (выталкивающими) силами и силами сопротивления воздуха, то уравнение движения системы запишется в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g}, \tag{2.140}$$

откуда видно, что импульс системы не сохраняется. Его изменение за время столкновения –

$$\Delta\vec{P} \equiv \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = (m_1 + m_2)\vec{g}\Delta t \tag{2.141}$$

– отлично от нуля.

В общем случае при наличии внешних сил (см. (2.129))

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}_{cp}^{ex} \cdot \Delta t \neq 0 \,. \qquad (2.142)$$

На первый взгляд, законом сохранения импульса здесь даже “не пахнет”. Как же описать столкновение?

– Оказывается, что в ситуации достаточно типичной имеется простое решение проблемы.

Если внешние силы **заведомо ограничены по величине**, так что

$$\left|\vec{F}_{cp}^{(ex)}\right| \leq F_0 \,, \qquad (2.143)$$

где постоянная F_0 имеет размерность силы, то для $\Delta\vec{P}$ справедлива оценка

$$\left|\Delta\vec{P}\right| \leq F_0 \Delta t \,. \qquad (2.144)$$

При достаточно малом Δt можно получить

$$F_0 \Delta t << \max(p_1, p_2) \,, \qquad (2.145)$$

где p_1, p_2 – величины импульсов тел непосредственно перед столкновением (т.е. в момент t_1). Из (2.144), (2.145) следует:

$$\left|\Delta\vec{P}\right| << \max(p_1, p_2) \,. \qquad (2.146)$$

Полученное неравенство означает, что **изменение импульса системы за время столкновения пренебрежимо мало**.

В этом случае говорят: **когда внешние силы, действующие на систему, заведомо ограничены по величине, а столкновение является кратковременным, импульс**

системы за время столкновения практически не изменяется. И пишут при этом

$$\vec{P}(t_1) = \vec{P}(t_2) \,. \tag{2.147}$$

В модели мгновенного столкновения ($\Delta t \to 0$) равенство (2.147) является точным.

При решении конкретных задач рекомендуется следующая технология применения законов сохранения (в том числе закона сохранения импульса или его проекции).

Пусть нас интересует поведение системы в течение промежутка времени (t_1, t_2) – как правило, выбор этого промежутка в конкретной задаче физически очевиден. Рассмотрение действующих на систему сил показало, что физическая величина, например P_x, сохраняется в течение (t_1, t_2) – точно или приближенно (как в описанном примере с шариками в воздухе – см. равенство (2.147)). Тогда рассматриваются два состояния системы: в момент t_1 и в момент t_2 – и составляются выражения для сохраняющейся величины в этих состояниях:

$$P_x(t_1) = \ldots, \tag{2.148 а}$$

$$P_x(t_2) = \ldots \,. \tag{2.148 б}$$

Затем полученные выражения приравниваются.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу.

Гиря массой m, брошенная со скоростью υ_0 под углом α к горизонту, попадает в ящик с песком общей массой M, покоившийся на гладкой горизонтальной поверхности, и застревает в нем. С какой скоростью будет двигаться ящик с застрявшей в нем гирей? Силами сопротивления воздуха пренебречь.

На систему действует следующие внешние силы: силы тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$, а также сила нормальной реакции поверхности $\vec{N}$. Поверхность гладкая, это означает, что трения нет. Таким образом, все внешние силы вертикальны. Поэтому если расположить ось OX горизонтально в плоскости движения гири, то $F_x^{(ex)} = 0$, откуда следует $P_x = const$ (см. (2.136)).

На рис. 2.23 а показано состояние системы в момент времени t_1, когда гиря стартует, а ящик покоится.

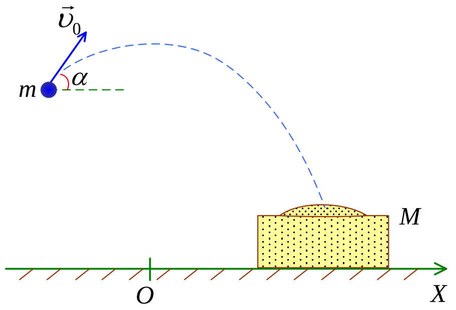


Рис. 2.23 а

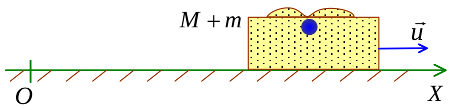


Рис. 2.23 б

$$P_x(t_1) = m\upsilon_0 \cos\alpha\,. \tag{2.149}$$

Рис. 2.23 б изображает состояние системы в момент времени t_2, когда относительное движение в системе гиря-песок-ящик уже закончено; система движется как одно целое со скоростью $\vec{u}$ в направлении оси OX.

$$P_x(t_2) = (M+m)u\,. \tag{2.150}$$

Приравниваем выражения (2.149) и (2.150):

$$m\upsilon_0 \cos\alpha = (M+m)u\,. \tag{2.151}$$

Отсюда получаем

$$u = \frac{m\upsilon_0 \cos\alpha}{M + m} . \qquad (2.152)$$

Отметим, что при столкновении гири и ящика с песком закон сохранения импульса (даже приближенно, по версии (2.147)) не выполняется, т.к. отсутствуют какие-либо ограничения сверху на величину силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$. Эта сила “съедает” вертикальный импульс системы за сколь угодно малое время взаимодействия Δt даже при наличии двух противодействующих сил: $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$.

ГЛАВА 3

РАБОТА, МОЩНОСТЬ, МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

3.1. Работа силы. Мощности средняя и мгновенная.

Пусть на движущуюся материальную точку действует **постоянная** (не зависящая явно от времени) **однородная** (не зависящая от координат материальной точки) сила $\vec{F} = const$. За некоторый промежуток времени (t_1, t_2) материальная точка совершает перемещение $\vec{S}(t_1, t_2)$.

- **Работой постоянной однородной силы** $\vec{F}$ (над материальной точкой) **на перемещении** $\vec{S}$ (м. точки) называется величина

$$A \equiv \vec{F} \cdot \vec{S}. \qquad (3.1\ а)$$

[A]=Н·м≡Дж.

Определение (3.1 а) можно переписать также в форме

$$A \equiv \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\alpha, \qquad (3.1\ б)$$

где $\alpha \equiv \left(\vec{F} \hat{,} \vec{S}\right)$ – угол между силой и перемещением. Учитывая, что изменение радиус-вектора м.т. $\Delta\vec{r}$ за (t_1, t_2) совпадает с ее перемещением, $\Delta\vec{r} = \vec{S}$, мы можем переписать определение (3.1 а) в виде

$$A \equiv \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \,. \qquad (3.1\text{ в})$$

Выскажем два замечания.

1. Определение работы **данной** силы, действующей на материальную точку, не зависит от того, сколько вообще сил на нее действуют в течение (t_1, t_2).

2. Если рассматривать перемещение $\vec{S}$ материальной точки как сумму последовательных перемещений $\vec{S}_1, \vec{S}_2, ..., \vec{S}_n$,

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_i \,, \qquad (3.2)$$

то работа на перемещении $\vec{S}$ представится также в виде суммы:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \,, \qquad (3.3)$$

где

$$A_i = \vec{F} \cdot \vec{S}_i = \vec{F}\Delta\vec{r}_i \qquad (3.4)$$

– работа силы $\vec{F}$ на i-м перемещении.

Если сила $\vec{F}$ зависит от положения материальной точки, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, то простое определение работы (3.1) теряет смысл.

Требуется обобщить его на случай неоднородного силового поля. Это делается так.

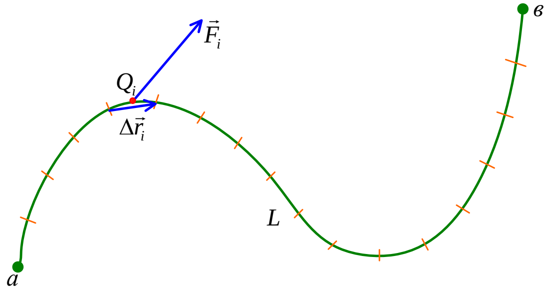


Рис. 3.1

На рис.3.1 показан отрезок L траектории материальной точки. За промежуток времени (t_1, t_2) она перемещается вдоль кривой L из положения ***а*** в положение ***в***. Разобьем промежуток (t_1, t_2) на достаточно малые интервалы Δt_i. Тогда отрезок L траектории разобьется на малые участки (*i* – номер участка), которые материальная точка проходит за Δt_i. Будем считать эти участки **настолько малыми, чтобы изменением силы $\vec{F}$ при движении м.т. в пределах данного *i*-го участка можно было пренебречь**. Выберем – произвольно – на *i*-м участке кривой L точку Q_i и положим, что сила $\vec{F}$**,** действующая на материальную точку в пределах этого (*i*-го) участка, постоянна, и значение силы (на всем *i*-м участке) совпадает с ее значением в точке Q_i (рис.3.1):

$$\vec{F}_i \equiv \vec{F}(Q_i) \equiv \vec{F}(\vec{r}_i), \tag{3.5}$$

где $\vec{r}_i$ – радиус вектор точки Q_i.

Работу силы $\vec{F}$ на i-м отрезке кривой L можно приближенно вычислить по формуле (сравни с (3.4))

$$A_i = \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i \qquad (3.6)$$

где $\Delta\vec{r}_i$ – перемещение материальной точки на i-м участке (рис. 3.1).

Работу на кривой L определим как сумму работ на отдельных участках кривой (см. (3.3)):

$$A \equiv \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \qquad (3.7)$$

или

$$A \equiv \sum_i \vec{F}(Q_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \equiv \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \, . \qquad (3.8)$$

Очевидно, что приближенное равенство (3.7) – или (3.8) – должно быть тем точнее, чем мельче разбиение кривой $L_{ав}$ на отрезки, т.е. чем меньше величины $|\Delta\vec{r}_i|$. Точного равенства следует ожидать в пределе $|\Delta\vec{r}_i| \to 0 \;\; \forall\, i$:

$$A = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \to 0} \sum_i \vec{F}(Q_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \, . \qquad (3.9)$$

Предел суммы в правой части (3.9) называется криволинейным интегралом вдоль кривой L между точками ***а*** и ***в***.

Теперь мы можем записать точное **определение работы неоднородной силы** $\vec{F} = \vec{F}(r)$:

- $$A \equiv \int_L \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \, . \qquad (3.10 \text{ а})$$

Под знаком интеграла в (3.10 а) $\vec{F}(\vec{r})$ – сила, действующая на материальную точку в точке Q кривой L с радиусом-вектором $\vec{r}$, $d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение материальной точки из точки Q за бесконечно малый промежуток времени dt – см. рис. 3.2.

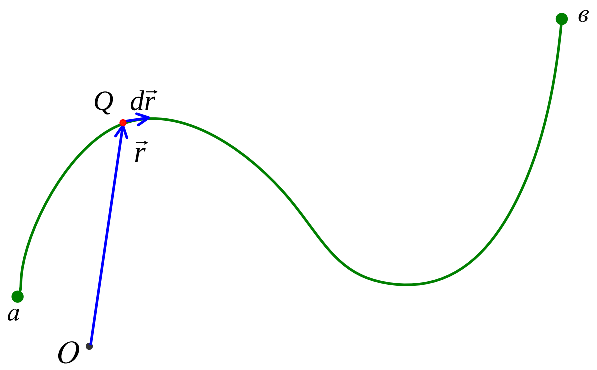


Рис. 3.2

Вектор $d\vec{r}$ – геометрически – представляет собой, как говорят, **элемент кривой** L, обозначают его $\overrightarrow{dl}$. Это перемещение (не материальной точки – чисто геометрическое) из одной точки кривой в бесконечно близкую ей точку.

Определение работы (3.10 а) может быть переписано в виде

- $$A \equiv \int_L \vec{F}(Q)\overrightarrow{dl} \;. \qquad (3.10\ б)$$

Криволинейный интеграл от вектор-функции координат $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \equiv \vec{F}(Q)$ вдоль кривой L чаще записывают в виде (3.10 б), здесь $\overrightarrow{dl}$ – элемент кривой, начало которого совпадает с точкой Q. Для вычисления интеграла (3.10 б), очевидно, достаточно, чтобы вектор-функция была задана на кривой L. В физических задачах чаще бывает так, что $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ – функция, заданная в области, содержащей кривую L, или даже во всем пространстве (векторное поле).

Подынтегральное выражение в (3.10 а), (3.10 б)

$$\delta A=\vec{F}(\vec{r})d\vec{r}=\vec{F}(Q)\overrightarrow{dl} \tag{3.11}$$

– бесконечно малая работа, работа силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}\equiv\overrightarrow{dl}$.

Отметим, что при $\vec{F}=const$ из определений (3.10) получается выражение (3.1).

Мы сформулировали определение работы силы над материальной точкой. Если сила действует, например, на твердое тело, то работу силы над телом можно вычислить по тем же формулам, в которых под $d\vec{r}$ (или $\overrightarrow{dl}$) следует понимать перемещение точки приложения силы.

- **Средней за промежуток времени (t_1,t_2) мощностью силы** называется величина

$$N_{\text{ср}}\equiv\frac{A}{\Delta t}, \tag{3.12}$$

где A – работа силы за промежуток времени (t_1,t_2), $\Delta t=t_2-t_1$.

- **Мгновенной мощностью силы** называется величина

$$N\equiv\frac{\delta A}{dt}. \tag{3.13}$$

Физический смысл мощности – работа, совершаемая за единицу времени, [N]=Дж/с=Вт.
Используя выражение (3.11), можно получить

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,. \qquad (3.14)$$

Отсюда, в частности, видно, что **сила, перпендикулярная скорости**, имеет нулевую мощность и **работы не совершает**. **Такова сила Лоренца**, мощность ее тождественно (в любой момент времени) равна нулю:

$$N_л = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] \cdot \vec{\upsilon} = 0\,. \qquad (3.15)$$

Если зависимость мгновенной мощности силы от времени известна, то работу силы за любой промежуток времени можно вычислить по формуле (см. (3.13))

$$A(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \delta A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt\,. \qquad (3.16)$$

Отметим следующее. Если на материальную точку действуют две или несколько сил и $\vec{F}$ – сумма действующих сил,

$$\vec{F} = \sum_к \vec{F}_к\,, \qquad (3.17)$$

то можно поставить задачу о вычислении работы силы $\vec{F}$. Из определения (3.10) следует, что работа силы $\vec{F}$ должна вычисляться как сумма работ сил $\vec{F}_к$:

$$A_F = \sum_к A_{Fк}\,. \qquad (3.18)$$

Мощности сил также складываются:

$$N_F = \sum_{\kappa} N_{F\kappa}\,. \qquad (3.19)$$

3.2. Кинетическая энергия системы. Теорема о кинетической энергии.

Вначале сформулируем два определения.

- **Кинетической энергией материальной точки** называется величина

$$k \equiv \frac{m\upsilon^2}{2}\,, \qquad (3.20)$$

где m – масса, υ – модуль скорости материальной точки; $[k]$=Дж.

- **Кинетической энергией механической системы** (набор материальных точек) **называется величина**

$$K \equiv \sum_i k_i \qquad (3.21)$$

где k_i – кинетическая энергия i-й материальной точки; i=1, 2,…, n.

Найдем связь между изменением кинетической энергии материальной точки за некоторый промежуток времени (t_1, t_2) и работой действующих на нее сил, совершенной за (t_1, t_2).

Перепишем уравнение движения материальной точки в виде

$$m d\vec{\upsilon} = \vec{F} dt\,, \qquad (3.22)$$

где $\vec{F}$ (напомним) – сумма сил, действующих на м.т.

Умножим уравнение (3.22) на вектор скорости $\vec{\upsilon}$ скалярно:

$$m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dt. \qquad (3.23)$$

Рассмотрим – отдельно – левую и правую части (3.23).
Во-первых, отметим:

$$d(\upsilon^2) = d(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}) = 2\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}. \qquad (3.24)$$

Отсюда следует, что изменение кинетической энергии м.т. за dt выражается так:

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}. \qquad (3.25)$$

Таким образом, левая часть (3.23) – это величина dk.

Правую же часть равенства можно записать в виде

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dt = Ndt, \qquad (3.26)$$

где N – мощность силы $\vec{F}$ (сумма мощностей всех сил, действующих на м.т. – см. (3.19)). Равенство (3.23) перепишем в форме

$$dk = \delta A. \qquad (3.27)$$

Здесь δA – сумма работ сил, действующих на м.т., за промежуток времени dt (на соответствующем перемещении $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$ материальной точки).

Проинтегрировав (3.27) по промежутку (t_1, t_2), получаем

$$\Delta k(t_1, t_2) = A(t_1, t_2). \qquad (3.28)$$

Равенство (3.28) можно назвать теоремой о кинетической энергии для материальной точки:

- изменение кинетической энергии материальной точки за некоторый промежуток времени равно сумме работ действующих на м.т. сил (совершенных за это время).

Из (3.28) получаем, что **кинетическая энергия материальной точки – это величина, численно равная работе, которую нужно совершить, чтобы сообщить первоначально покоившейся материальной точке данную скорость** υ.

Записав равенство (3.28) для каждой материальной точки, входящей в состав механической системы,

$$\Delta k_i(t_1, t_2) = A_i(t_1, t_2), \qquad (3.29)$$

и просуммировав *n* равенств (3.29), получаем для системы:

$$\Delta K(t_1, t_2) = A_\Sigma(t_1, t_2), \qquad (3.30\ \text{а})$$

т.е.

- ❖ **изменение кинетической энергии механической системы** (за некоторый промежуток времени (t_1, t_2)) **равно сумме работ всех сил, действующих на систему** (совершенных за (t_1, t_2)).

Равенство (3.30 а) называется **теоремой о кинетической энергии**.

Обычно ее записывают, опуская указание промежутка времени:

$$\Delta K = A_\Sigma. \qquad (3.30\ \text{б})$$

Следует подчеркнуть, что в A_Σ входит как работа внешних сил, так и работа сил внутренних, A_Σ – сумма работ **всех** сил.

3.3. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Примеры консервативных сил, вычисление соответствующих потенциальных энергий. Консервативность суперпозиции консервативных силовых полей.

Существует выделенный класс сил, которые обладают тем свойством, что работа этих сил вычисляется относительно просто. Это так называемые **консервативные силы.**

Пусть в некоторой области (или во всем пространстве) существует статическое силовое поле: на материальную точку в этой области действует сила $\vec{F}$, в общем случае зависящая от положения материальной точки:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) . \tag{3.31}$$

- Сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ называется **консервативной**, если работа силы над материальной точкой при ее перемещении из точки ***а*** в точку ***в*** не зависит от формы отрезка траектории L, соединяющего ***а*** и ***в***, а определяется только начальным (***а***) и конечным (***в***) положениями материальной точки:

$$A_F(a \to в) = A(\vec{r}_a, \vec{r}_в) . \tag{3.32}$$

Другими словами, для **любых** двух кривых L_1 и L_2, соединяющих начало ***а*** и конец ***в*** (рис. 3.3), работа консервативной силы одна и та же:

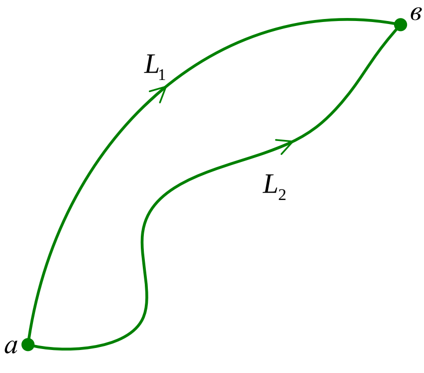


Рис. 3.3

$$\int_{L_1} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = A(\vec{r}_a, \vec{r}_в) \qquad (3.33)$$

Очевидно, работа силы $\vec{F}(\vec{r})$ при движении м.т. вдоль кривой, например, L_1 из ***а*** в ***в*** и работа на той же кривой при движении из ***в*** в ***а*** отличаются знаками, т.к. сила действует одна и та же, а перемещение $d\vec{r}$ на пути “туда” и “обратно” противоположны. То есть

$$\int_{L_1(в\to a)} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = - \int_{L_1(a\to в)} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \,. \qquad (3.34)$$

С учетом (3.33) отсюда получаем определение консервативной силы, эквивалентное приведенному выше:

- Сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ называется **консервативной**, если ее **работа** над материальной точкой **на любом замкнутом контуре равна нулю**, т.е.

$$\oint_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = 0 \tag{3.35}$$

для любого замкнутого контура (кружок на интеграле) L.

- Интеграл $\oint_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ – или $\oint_L \vec{F}(\vec{r})\overrightarrow{dl}$ – называется **циркуляцией** вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру L.

В курсе математического анализа доказывается, что если криволинейный интеграл $\int_a^в \vec{F}d\vec{r}$ не зависит от выбора пути интегрирования между двумя точками (***а*** и ***в***), то существует такая функция координат $\Pi(\vec{r})$, что убыль этой функции при переходе ***а*** $\rightarrow$ ***в*** в точности равна данному криволинейному интегралу

$$\Pi(\vec{r}_a) - \Pi(\vec{r}_в) = \int_a^в \vec{F}d\vec{r}\,. \tag{3.36}$$

Для нас это означает следующее.

- Если сила $\vec{F}(\vec{r})$ консервативна, то существует такая скалярная физическая величина $\Pi = \Pi(\vec{r})$, убыль которой при перемещении ***а*** $\rightarrow$ ***в*** материальной точки в точности равна работе консервативной силы на этом перемещении:

$$A_{конс}(a \rightarrow в) = \Pi(\vec{r}_a) - \Pi(\vec{r}_в)\,; \tag{3.37}$$

величина $\Pi(\vec{r})$ называется **потенциальной энергией материальной точки, соответствующей консервативной силе** $\vec{F}(\vec{r})$.

Равенство (3.37) – определение потенциальной энергии. Очевидно, потенциальная энергия определена неоднозначно, с точностью до аддитивной постоянной: потенциальная энергия $\Pi(\vec{r})$ и $\Pi(\vec{r})+const$ соответствует одному и тому же силовому полю $\vec{F}(\vec{r})$ – см. (3.37). Чтобы избавиться от этой неоднозначности, указывают точку – или поверхность, – где потенциальная энергия принимается равной нулю (или другому конкретному числовому значению). Тогда потенциальная энергия становится однозначной функцией координат и приобретает физический смысл: $\Pi(\vec{r})$ численно равна работе консервативной силы при переходе материальной точки из положения $\vec{r}$ в точку, где потенциальная энергия принята равной нулю.

Отметим, что определение (3.37) можно переписать в упрощенной форме

$$A_{конс} = -\Delta\Pi \,. \tag{3.38}$$

Для бесконечно малых величин имеем соответственно

$$\delta A_{конс} = -d\Pi \,. \tag{3.39}$$

Равенство (3.39) – определение потенциальной энергии в дифференциальной форме.

Бесконечно малая работа обозначается (см. (3.11)) символом δA (а не dA) в связи с тем, что в общем случае величина $\delta A = \vec{F}d\vec{r}$ не является полным дифференциалом какой бы то ни было функции координат. Равенство (3.39) показывает, что консервативные силы – особая статья: **элементарная работа консервативной силы оказывается полным дифференциалом**.

Равенство (3.39), представленное в форме

$$d\Pi = -\vec{F}d\vec{r} \,, \tag{3.40}$$

используется при построении выражений для потенциальной энергии м.т. в консервативных силовых полях. Уравнение, эквивалентное (3.40), в котором консервативная сила выражается через потенциальную энергию, имеет вид

$$\vec{F} = -grad\,\Pi\,. \tag{3.41}$$

Символ “$grad$” читается как “градиент”, $grad$ – дифференциальный оператор. Инвариантное определение этого оператора дано в **Приложении №2**. Пока ограничимся его выражением в декартовых координатах:

$$grad\,\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{3.42}$$

Векторное равенство (3.41) в проекциях записывается так:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}\,. \tag{3.43}$$

Мы обсудили определение консервативной силы. **Сила, не являющаяся консервативной, называется неконсервативной силой**.

Примеры консервативных сил: сила тяжести, сила упругости, квазиупругая сила, кулоновская сила.

Неконсервативны все виды сил трения, сила Лоренца.

Рассмотрим подробнее примеры консервативных сил и вычислим соответствующие потенциальные энергии.

1. Любая однородная постоянная сила $\vec{F} = const$ консервативна, так как для любого замкнутого контура L имеем (см. (3.35))

$$\oint_L \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\oint_L d\vec{r} = 0 . \qquad (3.44)$$

Положив

$$\Pi(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r} , \qquad (3.45)$$

убеждаемся в том, что равенство (3.40) удовлетворяется. Потенциальная энергия (3.45) определяется так, что она обращается в ноль в начале отсчета.

Примеры постоянных однородных сил – $\vec{F}_1 = q\vec{E}$, $\vec{F}_2 = m\vec{g}$, – где $\vec{E}$ – напряженность однородного электростатического поля, $\vec{g}$ – напряженность однородного гравитационного. Силе $\vec{F}_1$ **соответствует** (в смысле равенства (3.40)) потенциальная энергия

$$\Pi_1 = -q\vec{E}\cdot\vec{r} , \qquad (3.46)$$

а силе $\vec{F}_2$ – потенциальная энергия

$$\Pi_2 = -m\vec{g}\cdot\vec{r} . \qquad (3.47)$$

Направив ось OY вверх, будем иметь

$$\vec{g}\cdot\vec{r} = g_x x + g_y y + g_z z = (-g)y , \qquad (3.48)$$

и вместо (3.47) получаем хорошо известное выражение

$$\Pi_2 = \Pi_2(y) = mgy . \qquad (3.49)$$

Потенциальную энергию **протяженного тела** во внешнем поле $\vec{g}$ можно вычислять по формуле (3.49), если под y понимать координату центра тяжести (центра масс) тела.

2. Пусть движение материальной точки ограничено осью OX и пусть $F_x = F_x(x)$. Тогда

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_x(x) dx, \tag{3.50}$$

и потенциальная энергия оказывается функцией координаты x материальной точки: $\Pi = \Pi(x)$,

$$d\Pi(x) = -F_x(x) dx, \tag{3.51}$$

$$\Pi(x) = -\int F_x(x) dx. \tag{3.52}$$

Для упругой силы

$$F_x' = -kx \tag{3.53}$$

имеем (см. (3.52))

$$\Pi_3(x) = \frac{kx^2}{2} \tag{3.54}$$

при условии $\Pi_3(0) = 0$.

- 3. **Центральным статическим силовым полем** называется такое поле, со стороны которого на материальную точку действует сила

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}, \tag{3.55}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки, проведенный из т.н. силового центра, расположенного в начале отсчета О, $r = |\vec{r}|$ – расстояние от материальной точки до силового центра.

Силу (3.55) называют **центральной силой**. Ее величина определяется расстоянием до силового центра

$$\left|\vec{F}(\vec{r})\right| = |f(r)|, \tag{3.56}$$

при $f > 0$ центральная сила (3.55) направлена от центра О (сила отталкивания), при $f < 0$ – к центру О (сила притяжения). В обоих случаях вектор $\vec{F}$ лежит на прямой, соединяющей материальную точку с силовым центром.

Центральная сила консервативна. Мы проверим это, показав, что элементарная (бесконечно малая) ее работа является полным дифференциалом (см. (3.39), (3.40)), а заодно найдем выражения для потенциальной энергии.

Прежде всего, рассмотрим дифференциал величины r^2.

С одной стороны,

$$dr^2 = 2rdr. \tag{3.57}$$

С другой,

$$dr^2 = d(\vec{r},\vec{r}) = 2\vec{r}d\vec{r}. \tag{3.58}$$

Из (3.57), (3.58) следует

$$\vec{r}d\vec{r} = rdr. \tag{3.59}$$

Отсюда для элементарной работы центральной силы получаем

$$\delta A = \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = f(r)dr. \tag{3.60}$$

Выражение (3.60) показывает, что элементарная работа совпадает с полным дифференциалом функции (– П), где

$$\Pi = \Pi(r) = -\int f(r)dr, \tag{3.61}$$

$\Pi = \Pi(r)$ – потенциальная энергия.

Рассмотрим некоторые примеры центральных сил.

На материальную точку m_2 со стороны м.т. m_1, **которую мы считаем покоящейся в начале отсчета О** (рис. 3.4), действует центральная гравитационная сила (см. ГЛАВУ 2, рис.2.17, равенство (2.96))

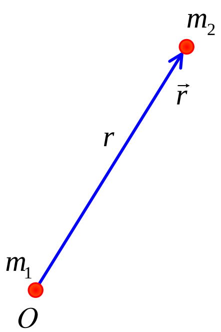


Рис. 3.4

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \tag{3.62}$$

Сравнивая с (3.55), видим, что $f(r)$ выражается равенством

$$f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{3.63}$$

Потенциальная энергия м.т. m_2 в поле, создаваемом материальной точкой m_1:

$$\Pi(r) = \int G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr \,. \tag{3.64}$$

При дополнительном (**вполне естественном**) условии

$$\lim_{r \to \infty} \Pi(r) = 0 \tag{3.65}$$

получаем

$$\Pi_4(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \,. \tag{3.66}$$

Выражение (3.66) симметрично относительно индексов 1 и 2, т.е. если бы мы вычисляли потенциальную энергию м.т. m_1 в поле неподвижной точки m_2, то получили бы также результат (3.66).

Оказывается, что если учитывать возможность движения обеих материальных точек, то сумма элементарных работ сил $\vec{F}_{1,2}$ и $\vec{F}_{2,1}$, которыми м. точки действуют друг на друга,

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = -d\Pi \,, \tag{3.67}$$

где $d\Pi$ – дифференциал функции (3.66).

Таким образом, потенциальная энергия (3.66) соответствует **паре** гравитационных сил $\vec{F}_{1,2}$ и $\vec{F}_{2,1}$ и называется поэтому **потенциальной энергией гравитационного взаимодействия двух материальных точек**.

Отметим, что мы определили только что потенциальную энергию **для системы** (правда, простейшей).

При взаимодействии двух точечных зарядов q_1 и q_2 сила, действующая на q_2 со стороны заряда q_1, расположенного в начале отсчета О (рис. 3.5), определяется **законом Кулона**:

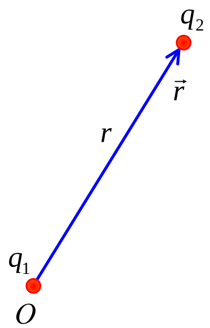


Рис. 3.5

$$\vec{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{3.68}$$

где постоянная $k_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф (Ф – фарада, единица емкости).

Аналогично предыдущему, получаем потенциальную энергию взаимодействия двух точечных зарядов:

$$\Pi_5(r) = k_0 \frac{q_1 q_2}{r}, \tag{3.69}$$

где r – расстояние между зарядами.

Квазиупругая сила, которую мы здесь запишем как

$$\vec{F}' = -æ\,\vec{r}, \tag{3.70}$$

также, очевидно, является центральной:

$$\vec{F}' = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{3.71}$$

где

$$f(r) = -æ r. \tag{3.72}$$

Потенциальная энергия м.т. в поле квазиупругой силы

$$\Pi(r) = \int æ r dr. \tag{3.73}$$

Полагая П(0)=0, получаем

$$\Pi_6(r) = æ \frac{r^2}{2}. \tag{3.74}$$

Полученные нами результаты сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1.

Консервативная сила	Потенциальная энергия
$\vec{F} = const$	$\Pi = -\vec{F} \cdot \vec{r}$
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\Pi_1 = -q\vec{E} \cdot \vec{r}$
$\vec{F} = m\vec{g}$	$\Pi_2 = mgy$
$F_x' = -kx$	$\Pi_3 = \frac{kx^2}{2}$
$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$	$\Pi = -\int f(r)dr$
$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	$\Pi_4(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
$\vec{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	$\Pi_5(r) = k_0 \frac{q_1 q_2}{r}$
$\vec{F}' = -æ\vec{r}$	$\Pi_6(r) = æ\frac{r^2}{2}$

В случае, если на материальную точку действуют две или несколько консервативных сил, то она находится в силовом поле, которое является суперпозицией консервативных силовых полей. Сила, действующая на материальную точку со стороны суммарного поля, определяется как сумма

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \,. \tag{3.75}$$

Все силы, которые нам до сих пор встречались, удовлетворяют принципу суперпозиции (3.75). Проинтегрировав (3.75) по произвольному замкнутому контуру L, получаем

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \sum_i \oint_L \vec{F}_i d\vec{r} \,. \tag{3.76}$$

Силы $\vec{F}_i$ – консервативны, поэтому все интегралы в правой части (3.76) равны нулю. Тогда

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0 \,. \tag{3.77}$$

Таким образом, сила (3.75) консервативна, иначе говоря, **суперпозиция консервативных силовых полей также является консервативным силовым полем**.

В частности, **консервативны произвольное ньютоново гравитационное поле, произвольное электростатическое поле**.

Потенциальная энергия материальной точки, на которую действуют две или несколько консервативных сил, вычисляется как сумма:

$$\Pi(\vec{r}) = \sum_i \Pi_i(\vec{r}) \,. \tag{3.78}$$

В самом деле, силы складываются, работы складываются, поэтому, как следует из определений (3.37) – (3.40), потенциальные энергии также складываются.

Потенциальная энергия – физическая величина, которую можно определить не только для материальной точки, но и для механической системы. – Мы это уже видели.

При составлении выражения для **потенциальной энергии механической системы** следует иметь в виду, что **каждой внешней** консервативной силе и **каждой паре внутренних** консервативных сил, действующих на материальные точки системы, в выражении для потенциальной энергии системы соответствует **одно слагаемое**.

Рассмотри пример. Пусть система состоит из двух материальных точек массами m_1 и m_2 с зарядами q_1 и q_2 соответственно. На систему действуют **две внешних** консервативных силы тяжести и **две внутренних** консервативных кулоновских силы. Гравитационным взаимодействием материальных точек друг с другом пренебрежем. Если $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ – декартовы координаты материальных точек, то потенциальная энергия системы может быть записана в виде:

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \\ = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + k_0 \frac{q_1 q_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} . \quad (3.79)$$

3.4. Механическая энергия системы. Теорема об изменении механической энергии. Закон сохранения механической энергии.

- Механической энергией системы называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E \equiv K + \Pi . \quad (3.80)$$

Изменение механической энергии за некоторый промежуток времени:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta \Pi . \tag{3.81}$$

Имея в виду, что силы делятся на консервативные и неконсервативные, запишем сумму работ всех сил над системой в виде суммы **двух** слагаемых:

$$A_{\Sigma} = A_{нек} + A_{конс} . \tag{3.82}$$

Используя теорему о кинетической энергии (3.30), перепишем (3.81) в виде

$$\Delta E = A_{нек} + A_{конс} + \Delta \Pi . \tag{3.83}$$

Из определения потенциальной энергии (3.38) следует, что последние два слагаемых в правой части (3.83) в сумме дают ноль. Поэтому

- $$\Delta E = A_{нек} \tag{3.84}$$

  т.е. изменение механической энергии системы за некоторый промежуток времени равно сумме работ неконсервативных сил, действующих на систему, совершенных за это время.

Равенство (3.84) – **теорема об изменении механической энергии**.

Из (3.84) следует **закон сохранения механической энергии**.

- Если сумма работ неконсервативных сил, действующих на систему, за любой промежуток времени равна нулю, то механическая энергия системы сохраняется.

Рассмотрим **пример**. Пусть система, состоящая из двух заряженных материальных точек, движется в вакууме в комбинации гравитационного $\vec{g}$ и магнитостатического $\vec{B}(\vec{r})$ полей. Механическая энергия системы (см. (3.79))

$$E \equiv \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + k_0 \frac{q_1 q_2}{r}, \qquad (3.85)$$

где r – расстояние между материальными точками, – сохраняется. Это объясняется тем, что неконсервативная сила Лоренца, действующая на м. точки, работы не совершает.

Такие ситуации, когда на систему действует неконсервативные силы, которые не совершают работы, – достаточно редки.

Более типична ситуация, когда, рассматривая движение системы, неконсервативные силы можно не учитывать: либо они отсутствуют, либо их влияние на движение системы пренебрежимо мало.

Традиционная формулировка закона сохранения механической энергии:

- если все силы, действующие на механическую систему, консервативны, то механическая энергия системы сохраняется.

Подчеркнем, что изменить механическую энергию системы могут как **внутренние**, так и **внешние** неконсервативные силы. Примеры соответствующих процессов: абсолютно неупругое столкновение и движение тела в вязкой среде; во втором примере под механической системой мы понимаем движущееся тело.

Используя закон сохранения механической энергии, найдем **вторую космическую скорость.**

- Это минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли (**или другой планеты**) для того, чтобы оно могло удалиться от Земли на бесконечно большое расстояние.

Сила тяжести, действующая на тело со стороны Земли (см. (3.62)):

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.86)$$

где m – масса тела, M – масса Земли, r – расстояние между телом и центром Земли, $\vec{r}$ – радиус-вектор тела, проведенный из центра планеты. Потенциальная энергия тела в гравитационном поле Земли (см. (3.66))

$$\Pi = -G\frac{Mm}{r}. \qquad (3.87)$$

Если пренебречь всеми силами, кроме сил гравитационных, то механическая энергия тела –

$$E \equiv \frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{Mm}{r} \qquad (3.88)$$

– сохраняется. Скорость тела у поверхности Земли (стартовую) обозначим через $\vec{\upsilon}_0$, расстояние до центра при старте равно радиусу Земли R. Будем считать, что $\vec{\upsilon}_0$ направлена от центра Земли. Если υ – скорость тела на расстоянии r от центра Земли, то

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{Mm}{r}. \qquad (3.89)$$

Из (3.89) следует

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{r} \geq 0 . \qquad (3.90)$$

Это условие того, что тело, стартовавшее с поверхности со скоростью υ_0, может удалиться на расстояние r от центра планеты. При $r \to \infty$ получаем

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} \geq \frac{Mm}{R} . \qquad (3.91)$$

Отсюда следует для второй космической скорости υ_2:

$$\upsilon_2 = \upsilon_{0\,\min} = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2g_0 R} , \qquad (3.92)$$

где g_0 – ускорение свободного падения у поверхности планеты. Подставляя в (3.92) параметры Земли $g_0 = 9{,}8$ м/с^2, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, получаем $\upsilon_2 = 11{,}2$ км/с.

Закон сохранения механической энергии системы совместно с законом сохранения импульса используется для расчета абсолютно упругого столкновения.

Абсолютно упругим называется такое **столкновение (удар)**, при котором **внутренние состояния тел (частиц) не изменяются**.

Примеры: столкновения упругих шаров, столкновение электрона с атомом, при котором не изменяется внутреннее состояние атома. Если, например, при электронном ударе атом возбудился, то такое столкновение не является абсолютно упругим.

При абсолютно упругом столкновении взаимодействие осуществляется консервативными силами.

3.5. Примеры

Прежде чем переходить к рассмотрению примеров решения конкретных задач, сформулируем некоторые рекомендации по поводу методики использования основных уравнений.

Независимо от того, что положено в основу решения: теорема о кинетической энергии, теорема об изменении механической энергии или закон сохранения механической энергии, – в любом случае нас интересует поведение системы на каком-то конкретном промежутке времени (t_1, t_2) и основные уравнения должны это отражать. Подробная запись теоремы о кинетической энергии (3.30 а) содержит указание на промежуток времени (t_1, t_2). Запись теоремы об изменении механической энергии (3.84) в подробной версии должна выглядеть так:

$$\Delta E(t_1, t_2) \equiv E(t_2) - E(t_1) = A_{нек}(t_1, t_2)\,. \qquad (3.93)$$

Используется теорема (3.93) следующим образом.

Составляется выражение для механической энергии системы в состоянии 1 – в момент t_1 –

$$E(t_1) \equiv E_1 = ..., \qquad (3.94)$$

затем – выражение для механической энергии в состоянии 2 – в момент t_2 –

$$E(t_2) \equiv E_2 = ..., \qquad (3.95)$$

далее – выражение для работы неконсервативных сил за промежуток (t_1, t_2) – т.е. при переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{нек}(t_1, t_2) = ... \qquad (3.96)$$

Полученные выражения – правые части (3.94), (3.95), (3.96) – подставляются в теорему (3.93). – Либо одна из величин E_1, E_2, $A_{нек}$ выражается через остальные.

Аналогичным образом используется закон сохранения механической энергии. И здесь прежде всего выделяют промежуток времени (t_1, t_2) конечный или бесконечный. В данном случае это тем более важно, что система может оказаться, к примеру, в таких условиях, когда в течении промежутка времени (t_1', t'_2) на нее действуют только консервативные силы, а вне этого промежутка – еще и неконсервативные, причем совершающие работу отличную от нуля. Тогда для любого $(t_1, t_2) \in (t_1', t_2')$ вы можете написать в соответствии с законом сохранения:

$$E(t_1) = E(t_2)\,. \tag{3.97}$$

Использовать (3.97) следует так: вначале записать выражение (3.94), затем (3.95) и подставить эти выражения в (3.97).

Если же $(t_1, t_2) \notin (t_1', t_2')$, то закон сохранения механической энергии на (t_1, t_2) не выполняется и равенством (3.97) пользоваться нельзя.

Пример 1.

Шайба скользит по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения, зависящим от координат. Если совместить ось OX с прямолинейной траекторий шайбы, направив ось по скорости шайбы, то зависимость коэффициента трения от положения шайбы определяется функцией

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_0 x(2L - x)/L^2, & x \in (0,\, 2L), \qquad (3.98\ \text{а}) \\ 0, & x \notin (0,\, 2L), \qquad (3.98\ \text{б}) \end{cases}$$

где $2L$ – ширина полосы с трением, а μ_0 – безразмерная постоянная. При каких скоростях υ_0 шайбы в области $x < 0$ она сможет преодолеть шероховатую полосу?

В области $x \in (0, 2L)$ кинетическая энергия K шайбы уменьшается благодаря действию тормозящей силы трения, так что

$$\varDelta K = A_{тр}. \tag{3.99}$$

Предположим, что шайба, имеющая в состоянии 1 скорость υ_0 при $x < 0$, преодолела полосу и оказалась в состоянии 2 при $x \geq 2L$ со скоростью $\upsilon \geq 0$. – Здесь либо $\upsilon = 0$, $x = 2L$ (остановка на границе полосы), либо $\upsilon > 0$, $x \geq 2L$.

В этом предположении перепишем теорему о кинетической энергии подробнее:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = A_{тр}\,(0,\,2L), \tag{3.100}$$

где m – масса шайбы. Правая часть (3.100) – работа силы трения на перемещении $x = 0 \to x = 2L$ при переходе шайбы из состояния 1 в состояние 2. Из (3.100) получаем

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + A_{тр}\,(0,\,2L) \geq 0. \tag{3.101}$$

Проекция силы трения скольжения на ось OX, очевидно, равна

$$F_x = -\mu(x)mg. \tag{3.102}$$

Тогда работа силы трения

$$A_{тр}(0,2L)=\int_0^{2L} F_x dx = -mg\int_0^{2L}\mu(x)dx. \qquad (3.103)$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$\int_0^{2L}\mu(x)dx=\frac{\mu_0}{L^2}\int_0^{2L}x(2L-x)dx=\frac{4}{3}\mu_0 L. \qquad (3.104)$$

Подставляя это выражение в (3.103), будем иметь

$$A_{тр}(0,2L)=-\frac{4}{3}\mu_0 mgL. \qquad (3.105)$$

Неравенство (3.101) – условие того, что шайба преодолевает шероховатую полосу, - переписывается теперь в виде

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2}-\frac{4}{3}\mu_0 mgL\ge 0. \qquad (3.106)$$

Отсюда имеем окончательно

$$\upsilon_0=\sqrt{\frac{8}{3}\mu_0 gL}. \qquad (3.107)$$

Пример 2.

Грузику массой $m=50$ г, висящему на невесомой нерастяжимой нити длиной $l=60$ см, толчком сообщают горизонтальную скорость $\upsilon_1=10$ м/с, и он начинает вращаться в вертикальной плоскости. Совершив N полных оборотов ($N>>1$), на ($N+1$)-ом грузик сваливается с окружности. Оценить (вычислить грубо приближенно) работу силы сопротивления воздуха за N оборотов грузика.

В течение N оборотов грузик движется по окружности радиуса l. “Сваливание” грузика с окружности происходит вследствие того, что он постоянно теряет механическую энергию и каждую точку окружности на последующем обороте проходит с чуть меньшей скоростью, чем на предыдущем. Очевидно, что с уменьшением скорости падает сила натяжения нити в каждой точке окружности. При обращении силы натяжения в ноль происходит “сваливание” с окружности.

– Это не касается верхней точки окружности: если сила натяжения обратится в ноль в верхней точке, то в этом случае грузик верхнюю точку проскакивает, а дальше нить уже натягивается.

Приведенное замечание справедливо для движения без потерь механической энергии. Поскольку $N >> 1$, т.е. потери происходят очень медленно, можно утверждать, что и в нашем случае наблюдается то же самое.

Будем считать, что первое обращение силы натяжения в ноль происходит в верхней точке 2 окружности на N-м обороте (рис. 3.6). Тогда левую половину окружности (вторая половина N-го оборота) грузик еще проходит, а на первой половине ($N+1$)-го оборота – правая полуокружность – где-то в точке 3 – сила натяжения нити снова обращается в ноль и происходит “сваливание” с окружности.

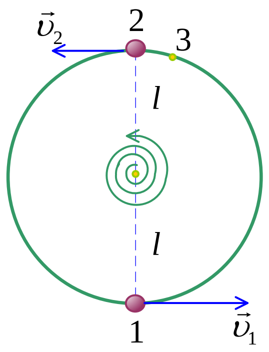


Рис. 3.6

Найдем скорость υ_2 грузика в момент, когда сила натяжения нити обращается в ноль в верхней точке 2. Силы, действующие на грузик, показаны на рис. 3.7: $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}_c$ – сила сопротивления воздуха. Точка O на рис. 3.7 – центр окружности.

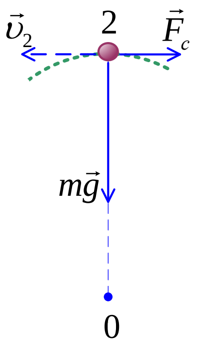


Рис. 3.7

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c \tag{3.108}$$

И спроецируем это уравнение на $\vec{g}$. Проекция ускорения $\vec{a}$ – это величина центростремительного ускорения. Поэтому при проецировании (l – радиус окружности!) получаем

$$\frac{m\upsilon_2^2}{l} = mg. \tag{3.109}$$

Отсюда

$$\upsilon_2^2 = gl. \tag{3.110}$$

Рассмотрим изменение механической энергии грузика за промежуток времени (t_1, t_2), где t_1 – момент старта грузика со скоростью υ_1, t_2 – момент прохождения точки 2 со скоростью υ_2. Если потенциальную энергию грузика считать равной нулю в точке 1, то

$$E(t_1) \equiv E_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2}, \tag{3.111 а}$$

$$E(t_2) \equiv E_2 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mg \cdot 2l, \tag{3.111 б}$$

а изменение энергии, соответственно,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mg \cdot 2l - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \tag{3.112}$$

Используя (3.110), получаем

$$\Delta E = \frac{5}{2}mgl - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \tag{3.113}$$

Работу силы сопротивления воздуха A_c найдем с помощью теоремы об изменении механической энергии

$$\Delta E = A_c. \tag{3.114}$$

Таким образом,

$$A_c = -\frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 - 5gl\right). \tag{3.115}$$

Подставляя в (3.115) числовые данные, получаем $A_c = -1{,}77$ Дж.

Пример 3.

Шарик массой m висит на невесомой упругой пружинке жесткостью k. Его поднимают вертикально вверх до положения, при котором пружинка не деформирована, и затем опускают. Шарик начинает колебаться. Пренебрегая силой сопротивления воздуха, найдите амплитуду этих колебаний.

Когда шарик отпускают в точке 1, он начинает двигаться вниз и, пройдя некоторый путь, останавливается в точке 2, а затем движется вверх, останавливается в точке 1 и т.д. Точки 1 и 2 – крайнее верхнее и крайнее нижнее положения шарика, расстояние между ними – удлинение пружинки в нижней точке 2 – равно удвоенной амплитуде колебаний (см. рис. 3.8).

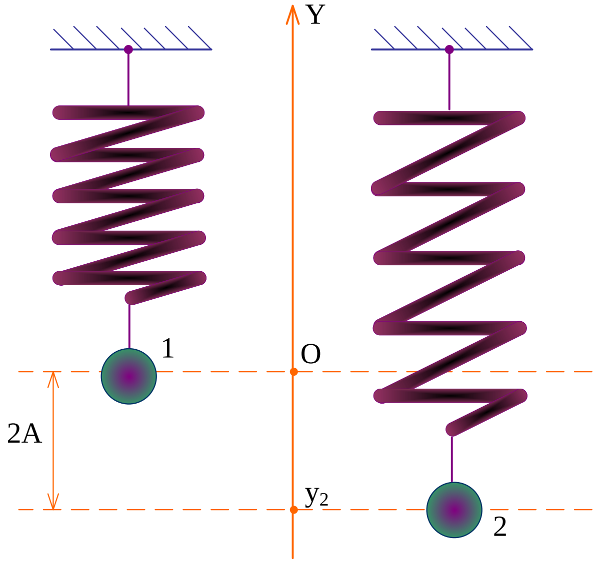


Рис. 3.8

На колеблющийся шарик действуют две силы: сила тяжести и сила упругости – обе консервативные. Поэтому механическая энергия шарика сохраняется. При выборе начала координат на оси OY, показанном на рис. 3.8, механическая энергия шарика с пружинкой записывается в виде

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgy + \frac{ky^2}{2} = const. \qquad (3.116)$$

Здесь y – координата шарика, а $(-y)$ – удлинение пружинки. В положениях 1 и 2 скорость обращается в ноль и равенство

$$E_1 = E_2 \qquad (3.117)$$

с учетом

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -2A \qquad (3.118)$$

переписывается в виде

$$0 = mg(-2A) + \frac{k}{2}(2A)^2. \qquad (3.119)$$

Отсюда получаем

$$-mg + kA = 0, \qquad (3.120)$$

$$A = \frac{mg}{k}. \qquad (3.121)$$

Отметим два момента.

Во-первых эту (именно эту) задачу удобнее решать на основе теоремы о кинетической энергии. Еще один пример аналогичной задачи приведен ниже (см. Пример 4).

Пример 4.

Незаряженный маленький шарик массой m подвешен на тонкой невесомой нерастяжимой диэлектрической нити в однородном горизонтальном электростатическом поле напряженностью E. Вначале нить вертикальна. Шарику мгновенно сообщают положительный заряд q. На какой максимальный угол отклонится после этого нить с шариком (от вертикали)? Сопротивлением воздуха пренебречь.

На шарик действует три силы. Во-первых, сила натяжения нити, которая работы не совершает: мощность ее равна нулю, так как в любой момент времени сама сила $\vec{T}$, направленная **вдоль нити**, перпендикулярна скорости шарика, касательной и окружности, по которой шарик движется. Во-вторых, сила тяжести

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} \tag{3.122}$$

и кулоновская сила

$$\vec{F}_2 = q\vec{E}, \tag{3.123}$$

где $\vec{E}$ – напряженность электростатического поля.

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ обе консервативны. Казалось бы, нам следует написать закон сохранения механической энергии и решать задачу на его основе. Но оказывается, в этой задаче удобнее использовать теорему о кинетической энергии, это мы и сделаем.

На рис. 3.9 положение 2 – это положение шарика с максимально отклоненной нитью. В точке 2 шарик останавливается. В положениях 1 и 2 кинетическая энергия обращается в ноль. Поэтому теорема о кинетической энергии

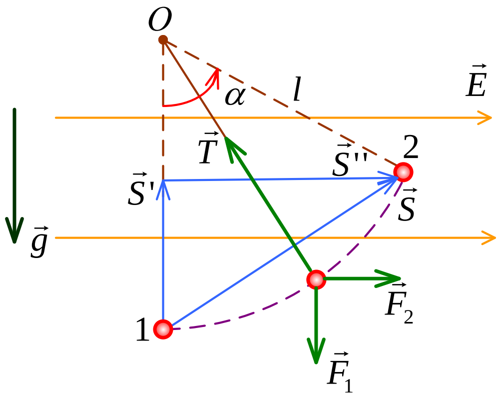


Рис. 3.9

$$\Delta K = A_\Sigma \tag{3.124}$$

переписывается в виде

$$0 = A_1 + A_2, \tag{3.125}$$

где A_1 – работа силы тяжести на перемещении $\vec{S}$ (см. рис. 3.9), а A_2 – работа кулоновской силы на том же $\vec{S}$. Если представить $\vec{S}$ в виде суммы (см. рис. 3.9)

$$\vec{S} = \vec{S}' + \vec{S}'', \tag{3.126}$$

то будем иметь

$$A_1 = m\vec{g} \cdot \vec{S} = m\vec{g} \cdot \vec{S}' = -mgS', \tag{3.127}$$

$$A_2 = q\vec{E} \cdot \vec{S} = q\vec{E} \cdot \vec{S}'' = qES''. \tag{3.128}$$

Для S' и S'' имеем

$$S' = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha), \tag{3.129}$$

$$S'' = l\sin\alpha, \tag{3.130}$$

где l – длина нити. Подставляя эти выражения в (3.127), (3.128), перепишем (3.125):

$$-mgl(1-\cos\alpha) + qEl\sin\alpha = 0. \tag{3.131}$$

Сокращая на l и переходя к тригонометрическим функциям половинного угла $\alpha/2$, вместо (3.131) будем иметь:

$$mg \cdot 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = qE \cdot 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{3.132}$$

Отсюда

$$\alpha = 2\mathrm{arcrc}\left(\frac{qE}{mg}\right). \tag{3.133}$$

Пример 5.

Частица массы m_1 испытала абсолютно упругое соударение с покоившейся частицей массы m_2, причем $m_2 > m_1$. Найти максимальный угол, на который может отклониться налетающая частица в результате соударения.

Систему частиц следует рассматривать как замкнутую – о внешних силах ничего не сказано. Импульс системы сохраняется точно. Обозначим: $\vec{p}_1$ – импульс первой частицы до столкновения, $\vec{p}_1{}'$ – ее импульс после столкновения, $\vec{p}_2{}'$ –

импульс второй частицы после столкновения. **Закон сохранения импульса**:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'. \tag{3.134}$$

На рис. 3.10 а показано состояние системы до столкновения, на рис. 3.10 б – сразу после столкновения, причем α – угол отклонения налетающей частицы m_1.

Рис. 3.10 а

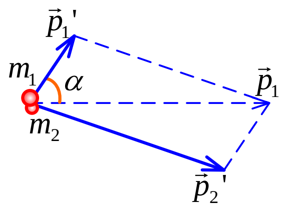


Рис. 3.10 б

Поскольку соударение частиц – абсолютно упругое, механическая энергия системы до – и после соударения – одна и та же.

Отметим, что кинетические энергии частиц удобнее в данном случае выражать через импульсы, а не через скорости частиц.

Учитывая это, **запишем закон сохранения механической энергии**:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1{}'^2}{2m_1} + \frac{p_2{}'^2}{2m_2}. \tag{3.135}$$

Отметим сразу же: из (3.135)

$$p_1{}' < p_1. \tag{3.136}$$

Рассмотрим треугольник импульсов (рис. 3.11), иллюстрирующий закон сохранения импульса (3.134). – Параллелограмм на рис. 3.10 б составим из двух таких треугольников.

Запишем теорему косинусов (рис. 3.11):

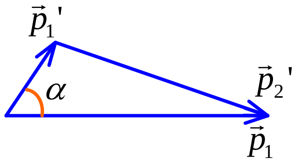


Рис. 3.11

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos\alpha. \tag{3.137}$$

Система уравнений (3.135), (3.137) достаточна для решения поставленной задачи. Следует лишь несколько преобразовать эту систему.

Введем обозначения:

$$\beta \equiv \frac{m_1}{m_2}, \quad a_1 \equiv \frac{p_1'}{p_1}, \quad a_2 \equiv \frac{p_2'}{p_1} \qquad (3.138 \text{ а, б, в})$$

и отметим (см. (3.136)):

$$\beta > 1, \quad a_1 < 1. \qquad (3.139 \text{ а, б})$$

Поделим уравнения (3.135) и (3.137) на p_1^2 и, кроме того, умножим (3.135) на m_1. Используя введенные обозначения (3.138), получаем систему

$$1 = a_1^2 + \beta a_2^2, \qquad (3.140 \text{ а})$$

$$a_2^2 = 1 + a_1^2 - 2a_1 \cos\alpha. \qquad (3.140\ б)$$

Отсюда, исключая a_2, находим:

$$\cos\alpha \equiv f(a_1) = \frac{(\beta+1)a_1^2 + \beta - 1}{2\beta a_1}. \qquad (3.141)$$

При $\alpha = \alpha_{max}$ функция $f(a_1)$, совпадающая с $\cos\alpha$, очевидно, имеет минимум:

$$\cos\alpha_{max} = f_{min}. \qquad (3.142)$$

Исследуя на минимум функцию $f(a_1)$, находим:

$$f_{min} = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}, \qquad (3.143)$$

$$\cos\alpha_{max} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}. \qquad (3.144)$$

Отсюда

$$\sin\alpha_{max} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (3.145)$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\alpha_{max} = \arcsin\left({}^{m_2}\!/\!_{m_1}\right). \qquad (3.146)$$

ГЛАВА 4

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Содержание

4.1. Момент импульса. Момент силы. Уравнение вращательного движения системы.

Рассмотрим вначале движение материальной точки массой m, на которую действует сила $\vec{F}$; $\vec{r}$ – радиус-вектор мат. точки, проведенный из точки О (начала О), $\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}$ – ее импульс. Сформулируем два определения.

- **Моментом импульса материальной точки относительно точки О** (начала О) называется величина

$$\vec{l} \equiv [\vec{r}, \vec{p}]. \tag{4.1}$$

- **Моментом силы** $\vec{F}$ **относительно точки О** (начала О) называется величина

$$\vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}]. \tag{4.2}$$

Определение момента силы распространяется и на случай, когда сила приложена, например, к твердому телу. Тогда под $\vec{r}$ в (4.2) понимается радиус вектор точки приложения силы.

Если $\vec{F}$ – сумма сил, действующих на м.т., либо сумма сил, приложенных в одной точке (скажем, тела),

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k, \tag{4.3}$$

то

$$\vec{M} = \sum_k \vec{M}_k, \tag{4.4}$$

где

$$\vec{M}_k = [\vec{r}, \vec{F}_k]. \tag{4.5}$$

Таким образом, в определении (4.2) под $\vec{F}$ можно понимать сумму (4.3) сил, приложенных в одной точке.

Продифференцируем определение (4.2) по времени:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \tag{4.6}$$

Первое слагаемое в правой части (4.6) равно нулю, т.к. $d\vec{r}/dt$ – это скорость, сонаправленная с импульсом. Используя уравнение движения материальной точки в форме (см. ГЛАВУ 2, (2.126))

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{2.126}$$

получаем

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) называется **уравнением вращательного движения материальной точки**.

И (2.126), и (4.7) – уравнения движения материальной точки. Какое из них удобнее? – Ответ на этот вопрос определяется симметрией тех сил, которые действуют на материальную точку. Например, если силовое поле однородно, то удобнее описывать движение м. точки **в терминах поступательного движения** и использовать (2.126). Если же вы рассматриваете спутник, обращающийся по эллиптической орбите вокруг Земли, то более удобным оказывается описание **в терминах вращательного движения**, на основе уравнения (4.7). Работает ли, в принципе, уравнение (4.7) в случае, когда движение является прямолинейным? – Да, работает, но его использовать в этом случае **неудобно**. Если заранее не ясно, какое из описаний следует предпочесть, надо попробовать и то и другое.

Переходя к описанию движения механической системы, напомним, что используется модель – набор материальных точек.

- **Моментом импульса механической системы относительно точки О** (начала О) называется величина

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{l}_i, \tag{4.8}$$

где $\vec{l}_i$ – момент импульса i-й материальной точки.

Таким образом, момент импульса аддитивен по определению.

Продифференцировав (4.8) по времени и используя уравнение движения (4.7), получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i, \tag{4.9}$$

где $\vec{M}_i$ – сумма моментов всех сил, действующих на i-ю мат. точку. Сумму в правой части (4.9) представим в виде двух слагаемых:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}^{(ex)} + \vec{M}^{(in)}, \tag{4.10}$$

где $\vec{M}^{(ex)}$ – сумма моментов внешних сил, действующих на систему, а $\vec{M}^{(in)}$ – сумма моментов всех внутренних сил, действующих на все м. точки, входящие в состав системы. Покажем, что

$$\vec{M}^{(in)} = 0. \tag{4.11}$$

Для этого рассмотрим взаимодействие i-й и k-й материальных точек (рис.4.1). Силы $\vec{F}_{i,k}$ и $\vec{F}_{k,i}$, которыми материальные точки действуют друг на друга, подчинены третьему закону Ньютона,

$$\vec{F}_{i,k} + \vec{F}_{k,i} = 0, \tag{4.12}$$

они лежат на одной прямой; построенный нами вектор $\vec{r}_\perp$ (см. рис. 4.1) этой прямой перпендикулярен.

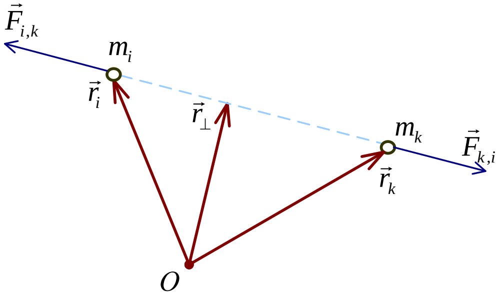


Рис. 4.1

Для моментов сил $\vec{F}_{i,k}$ и $\vec{F}_{k,i}$ имеем

$$\vec{M}_{i,k} \equiv \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{i,k}\right] = \left[\vec{r}_\perp, \vec{F}_{i,k}\right], \qquad (4.13\text{ а})$$

$$\vec{M}_{k,i} \equiv \left[\vec{r}_k, \vec{F}_{k,i}\right] = \left[\vec{r}_\perp, \vec{F}_{k,i}\right]. \qquad (4.13\text{ б})$$

Складывая моменты (4.13), с учетом (4.12) получаем

$$\vec{M}_{i,k} + \vec{M}_{k,i} = 0. \qquad (4.14)$$

В сумму $\vec{M}^{(in)}$ моменты внутренних сил входят парами, и для каждой пары выполняется равенство (4.14). Отсюда следует (4.11).

Учитывая (4.11), (4.10), переписываем (4.9) в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)}, \qquad (4.15)$$

где $\vec{M}^{(ex)}$ – напомним – сумма моментов **внешних** сил, действующих на систему.

Уравнение (4.15) называется **уравнением вращательного движения механической системы.** Ясно, что его можно записать и в проекциях на координатные оси. Например, для оси OZ

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)}. \qquad (4.16)$$

Законы сохранения момента импульса $\vec{L}$ или его проекции, являющиеся непосредственными следствиями уравнения вращательного движения системы, обсуждаются ниже (см. § 4.3).

4.2. Вращательное движение твердого тела с закрепленной осью. Момент инерции. Момент силы относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью.

На рис.4.2 показано твердое тело с закрепленной в точках A и B осью. Тело может **только вращаться** вокруг этой оси. Начало отсчета O выбрано **на оси вращения**. С осью вращения совмещена координатная ось OZ. Угловая скорость $\vec{\omega}$ тела, она же – угловая скорость любой материальной точки, входящей в состав тела, – направлена либо по оси OZ, либо противоположно OZ.

Построим выражение для момента импульса $\vec{L}$ тела относительно начала O. Для этого определим момент импульса $\vec{l}_i$ материальной точки m_i (см. рис.4.2), а затем (см. определение (4.8)) просуммируем по i.

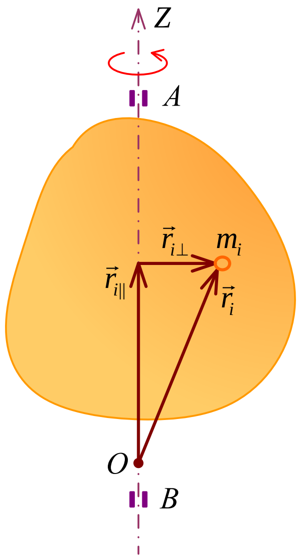


Рис. 4.2

Радиус-вектор $\vec{r}_i$ м. точки m_i представим в виде суммы (рис. 4.2)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\parallel} + \vec{r}_{i\perp}. \qquad (4.17)$$

Каждая материальная точка m_i движется по окружности, ее скорость

$$\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]. \qquad (4.18)$$

Отсюда получаем для импульса

$$\vec{p}_i = m_i[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]. \qquad (4.19)$$

Момент импульса $\vec{l}_i$ с учетом (4.17) запишем в виде суммы:

$$\vec{l}_i = m_i\left[\vec{r}_{i\|}\left[\vec{\omega},\vec{r}_{i\perp}\right]\right] + m_i\left[\vec{r}_{i\perp}\left[\vec{\omega},\vec{r}_{i\perp}\right]\right]. \qquad (4.20)$$

Преобразуем двойное векторное произведение в (4.20) по известной формуле

$$[\vec{a}[\vec{b},\vec{c}\,]] = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\,\right) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right): \qquad (1.47)$$

$$\left[\vec{r}_{i\|}\left[\vec{\omega},\vec{r}_{i\perp}\right]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{r}_{i\|},\vec{r}_{i\perp}\right) - \vec{r}_{i\perp}\left(\vec{r}_{i\|},\vec{\omega}\right) = -\vec{r}_{i\perp}\left(\vec{r}_{i\|},\vec{\omega}\right), \qquad (4.21\ \text{а})$$

$$\left[\vec{r}_{i\perp}\left[\vec{\omega},\vec{r}_{i\perp}\right]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{r}_{i\perp},\vec{r}_{i\perp}\right) - \vec{r}_{i\perp}\left(\vec{r}_{i\perp},\vec{\omega}\right) = r_{i\perp}^2\vec{\omega}. \qquad (4.21\ \text{б})$$

Учтем равенство (см. (4.21 а))

$$\left(\vec{r}_{i\|},\vec{\omega}\right) = z_i\omega_z\,, \qquad (4.22)$$

где z_i – продольная координата i-й материальной точки и представим момент импульса материальной точки $\vec{l}_i$ в виде суммы

$$\vec{l}_i = \vec{l}_{i\|} + \vec{l}_{i\perp}, \qquad (4.23)$$

где

$$\vec{l}_{i\|} = m_i r_{i\perp}^2\vec{\omega}, \qquad (4.24\ \text{а})$$

$$\vec{l}_{i\perp} = -\omega_z z_i \vec{r}_{i\perp}. \qquad (4.24\ \text{б})$$

Аналогично (4.23) запишем момент импульса тела относительно начала О:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\|} + \vec{L}_{\perp}. \qquad (4.25)$$

Здесь

$$\vec{L}_{\parallel} = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \vec{\omega}, \tag{4.26 а}$$

$$\vec{L}_{\perp} = -\omega_z \sum_i z_i \vec{r}_{i\perp}. \tag{4.26 а}$$

- Величина

$$I \equiv \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \tag{4.27}$$

называется **моментом инерции тела относительно оси**.

Тело мы рассматриваем как набор материальных точек m_i, $r_{i\perp}$ – расстояние от материальной точки m_i до оси. Момент инерции – величина, **аддитивная по определению**.

С учетом определения (4.27) можно записать:

$$\vec{L}_{\parallel} = I\vec{\omega}, \tag{4.28}$$

или

$$L_z = I\omega_z. \tag{4.29}$$

- Величина L_z – момент импульса тела относительно OZ.

1. Отметим следующее. В общем случае поперечная (по отношению к оси вращения (и оси OZ)) составляющая момента импульса $\vec{L}_{\perp}$ отлична от нуля. Рассмотрим “тело”, представляющее собой систему, которая состоит из двух материальных точек с одинаковыми массами m, “впечатанных”

в твердое тело с пренебрежимо малой массой – как два стальных шарика в жестком пенопласте. Для такого “тела” имеем

$$\vec{L}_{\perp} = -m\omega_z \left(z_1 \vec{r}_{1\perp} + z_2 \vec{r}_{2\perp}\right). \qquad (4.30)$$

Ясно, что если $\vec{r}_{1\perp}$ и $\vec{r}_{2\perp}$ не являются сонаправленными или противоположно направленными векторами, то при $z_1 \neq z_2$ никаким выбором начала отсчета на оси OZ (оси вращения) скобку в правой части (4.30) в ноль обратить нельзя, откуда следует

$$\vec{L}_{\perp} \neq 0. \qquad (4.31)$$

2. Можно показать, что если, например, ось вращения является осью симметрии однородного тела, то в этом случае

$$\vec{L}_{\perp} = 0, \quad \vec{L} = \vec{L}_{\parallel}. \qquad (4.32)$$

3. **Самое главное**: если нас интересует вращение тела относительно данной оси, то достаточно использовать величины $\vec{L}_{\parallel}$ или L_z, величина же $\vec{L}_{\perp}$ для нас не представляет интереса (см. ниже).

Пусть на тело с закрепленной осью действует сила $\vec{F}$. Запишем момент этой силы в виде суммы продольной и поперечной составляющих – аналогично (4.17), (4.23), (4.25). Для начала представим силу $\vec{F}$ в виде

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}. \qquad (4.33)$$

Тогда

$$\vec{M} \equiv \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}\right] = \\ = \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}\right] + \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right]. \tag{4.34}$$

Первое слагаемое в (4.34) равно нулю и тогда в разложении

$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp} \tag{4.35}$$

слагаемые запишутся в виде

$$\vec{M}_{\parallel} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right], \tag{4.36 а}$$

$$\vec{M}_{\perp} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}\right]. \tag{4.36 б}$$

При записи уравнения вращательного движения (4.15) применительно к данному случаю следует, во-первых, использовать разложения (4.25), (4.35). Во-вторых, необходимо учесть силы, действующие на тело со стороны устройств, фиксирующих ось вращения, например, подшипников А и В, которые считаются точечными (см. рис. 4.2). Силы реакции подшипников $\vec{R}_{\text{A}}$ и $\vec{R}_{\text{B}}$ приложены в точках А и В оси вращения, и моменты этих сил

$$\vec{M}_{\text{A}} = \left[\vec{r}_{\text{A}}, \vec{R}_{A}\right], \qquad \vec{M}_{\text{B}} = \left[\vec{r}_{\text{B}}, \vec{R}_{B}\right] \tag{4.37 а, б}$$

являются чисто поперечными:

$$\vec{M}_{\text{A}} = \vec{M}_{\text{A}\perp}, \quad \vec{M}_{\text{B}} = \vec{M}_{\text{B}\perp}. \tag{4.38 а, б}$$

С учетом всего сказанного для твердого тела с закрепленной осью имеем

$$\frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = \vec{M}_{\parallel} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right], \tag{4.39 а}$$

$$\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\parallel}\right] + \left[\vec{r}_{\parallel}, \vec{F}_{\perp}\right] + \vec{M}_{\mathrm{A}\perp} + \vec{M}_{\mathrm{B}\perp}. \tag{4.39 б}$$

Последнее уравнение может быть использовано для определения сил реакций $\vec{R}_{\mathrm{A}}$, $\vec{R}_{\mathrm{B}}$. Такого рода специальные задачи для нас интереса не представляют.

Таким образом, нам следует рассматривать уравнение (4.39 а) или эквивалентное уравнение (4.16), которое в данном случае запишется в виде (у нас пока одна сила $\vec{F}$):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \tag{4.40}$$

Здесь

$$M_z = \left(\left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right]\right)_z \tag{4.41}$$

– момент силы $\vec{F}$ относительно оси OZ.

Подчеркнем, что момент (импульса, силы) относительно оси (OZ) равен проекции вектора момента (импульса, силы) на эту ось при условии, что начало O лежит на оси.

Момент M_z (см. (4.41)) – алгебраическая величина – может быть легко вычислена следующим образом. На рис. 4.3 показаны ось OZ, направленная “к нам”, прямая NN', на которой располагается вектор $\vec{F}_{\perp}$, точка приложения силы $\vec{F}$, $\vec{r}_{\perp}$ – радиус-вектор этой точки, проведенный от оси OZ. Прямая NN' – **линия действия силы** $\vec{F}_{\perp}$. Расстояние от линии действия силы до оси OZ – **плечо силы** d.

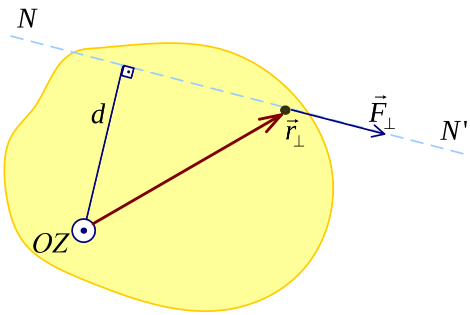


Рис. 4.3

Модуль M_z определяется как произведение величины силы $F_\perp$ на плечо:

$$|M_z| = F_\perp \cdot d, \tag{4.42}$$

а знак – по правилу:

$$M_z(\circlearrowright)<0, \qquad M_z(\circlearrowleft)>0, \tag{4.43}$$

т.е. $M_z > 0$ для силы, которая пытается вращать тело против часовой стрелки – это направление связано с направлением оси OZ **правилом буравчика**; $M_z < 0$, если наоборот. Сила $F_\perp$, показанная на рис. 4.3, пытается повернуть тело по часовой стрелке, для этой силы $M_z < 0$.

По такому же точно правилу можно вычислить момент импульса материальной точки относительно оси.

Мы говорим “**относительно оси**”, имея в виду **ориентированную ось**, т.е. ось, на которой указано положительное направление (OZ).

Уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью получаем из уравнения вращательного движения системы (4.15) и его следствия (4.16). В (4.15) сделаем замены $\vec{L} \to \vec{L}_{\parallel}$, $\vec{M}^{(ex)} \to \vec{M}_{\parallel}^{(ex)}$ и учтем (4.28) при условии $I = const$. В результате будем иметь:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\parallel}^{(ex)}, \tag{4.44}$$

где

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{4.45}$$

– угловое ускорение тела, $\vec{M}_{\parallel}^{(ex)}$ – сумма продольных (по отношению к оси вращения) составляющих моментов внешних сил.

Вращение твердого тела относительно закрепленной оси – движение **одномерное**, поэтому вместо векторного уравнения (4.44) **удобнее использовать эквивалентное ему скалярное уравнение** (см. (4.16), (4.29))

$$I\varepsilon_z = M_z^{(ex)}, \tag{4.46}$$

где $M_z^{(ex)}$ – сумма моментов внешних сил относительно оси OZ; простой способ вычисления моментов относительно оси мы только что обсудили.

Уравнение (4.44) и эквивалентное – более удобное – уравнение (4.46) это и есть **уравнения вращательного движения твердого тела с закрепленной осью**.

Приравняв модули левой и правой частей (4.46), получаем

$$\varepsilon = \frac{\left|M_z^{(ex)}\right|}{I}, \tag{4.47}$$

т.е. при заданной величине моментов внешних сил относительно оси величина углового ускорения тела тем меньше, чем больше момент инерции тела. Отсюда следует, что момент инерции является мерой инертности тела по отношению к вращательному движению.

Поступательным аналогом вращения твердого тела с закрепленной осью является прямолинейное поступательное движение тела.

Пусть направление движения определяется осью OX, т.е. скорости всех точек направлены в любой момент времени либо по OX, либо противоположно OX. Тогда уравнение движения тела запишется в виде

$$ma_x = F_x^{(ex)}, \tag{4.48}$$

где m – масса тела, a_x – проекция на ось OX ускорения любой его точки, $F_x^{(ex)}$ – сумма проекций (на ось OX) внешних сил.

Сравнивая уравнения движения (4.46) и (4.48), мы еще раз убеждаемся в том, что момент инерции тела – величина, аналогичная массе, величина, являющаяся мерой инертности по отношению к поворотам.

Момент инерции тела (см. определение (4.27)) зависит не только от массы тела, но и от того, как его масса распределена относительно оси вращения. Тело с меньшей массой может обладать моментом инерции большим, чем тело с большей массой, т.е. при $m_1 < m_2$ может быть $I_1 > I_2$.

Замечание. Если тело вращается с трением, то момент сил трения включают в правую часть уравнения (4.46) или (4.44) – эти силы рассматриваются как внешние.

4.3.Закон сохранения момента импульса. Закон сохранения момента импульса относительно оси.

Из уравнения вращательного движения системы (4.15) непосредственно получаем **закон сохранения момента импульса**,

$$\vec{M}^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = const: \tag{4.49}$$

- **если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется**.

Отметим, что здесь речь идет о **векторах моментов**, вычислительных относительно некоторой точки O (начала O).

Условие

$$\vec{M}^{(ex)} = 0 \qquad \forall\; t \in (t_1, t_2) \tag{4.50}$$

является необходимым и достаточным для сохраняемости момента импульса $\vec{L}$ в течение промежутка времени (t_1, t_2). Это условие выполняется в случае замкнутой системы, но может выполняться и тогда, когда система не замкнута.

1. Традиционная формулировка закона сохранения импульса гласит:

- **момент импульса замкнутой системы сохраняется**.

Подчеркнем, что в данном случае $\vec{L} = const$ **при любом выборе начала O**.

2. Пусть теперь система не замкнута, на систему действуют внешние силы. Здесь возможны два варианта:

$$\vec{M}^{(ex)} = 0, \qquad \vec{F}^{(ex)} = 0; \tag{4.51 а, б}$$

$$\vec{M}^{(ex)} = 0, \qquad \vec{F}^{(ex)} \neq 0. \tag{4.52 а, б}$$

Если сумма внешних сил равна нулю (условие (4.51)), то сумма моментов внешних сил не зависит от выбора начала, относительно которого вычисляются моменты. Покажем это.

Будем считать, что внешние силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ приложены в точках, радиусы-векторы которых проведены из начала O и равны соответственно $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$. Тогда сумма моментов относительно O

$$\vec{M}^{(ex)}(\mathrm{O}) = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] \tag{4.53}$$

При выборе начала в точке O′ (см. рис. 4.4) сумма моментов внешних сил запишется так:

$$\vec{M}^{(ex)}(\mathrm{O}') = \sum_i \left[\vec{r}_i', \vec{F}_i\right] \tag{4.54}$$

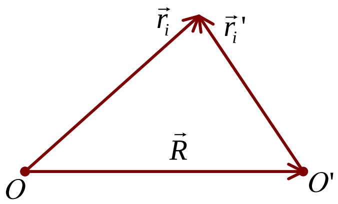


Рис. 4.4

Очевидно (см. рис. 4.4),

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}. \tag{4.55}$$

Вычитая (4.54) из (4.53), получаем

$$\vec{M}^{(ex)}(\mathrm{O}) - \vec{M}^{(ex)}(\mathrm{O'}) = \sum_i \left[\vec{R}, \vec{F}_i\right] = \left[\vec{R}, \sum_i \vec{F}_i\right] = \left[\vec{R}, \vec{F}^{(ex)}\right]. \quad (4.56)$$

Тогда

$$\vec{F}^{(ex)} = 0 \Rightarrow \vec{M}^{(ex)}(\mathrm{O}) = \vec{M}^{(ex)}(\mathrm{O'}), \quad (4.57)$$

где O, O′ выбраны произвольно.

Таким образом, первое из условий (4.51) надо понимать как равенство нулю суммарного момента внешних сил относительно **любой точки** (любого начала). Из закона (4.49) следует, что при этом момент импульса системы $\vec{L}$ относительно любого начала сохраняется.

Здесь ситуация аналогична той, что мы имеем для импульса системы $\vec{p}$: случаи, когда заведомо выполняется условие (4.51), достаточно редки. Тем не менее, примеры привести можно. Вот один из них.

Три маленьких шарика с одинаковыми массами m закреплены на жестком тонком невесомом стержне из диэлектрика, два шарика – на концах стержня, третий в – середине. Средний шарик заряжен, его заряд равен q. Вся система располагается в вакууме в области, где помимо поля силы тяжести $\vec{g}$ включено однородное вертикальное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$.

Если выполнено условие (см. рис. 4.5)

$$\vec{F}^{(ex)} = 3m\vec{g} + q\vec{E} = 0, \quad (4.58)$$

то отсюда автоматически следует (4.51 а), поскольку величина $\vec{M}^{(ex)}$ в силу (4.58) не зависит от выбора начала, а равенство ее нулю относительно центра среднего шарика – очевидно.

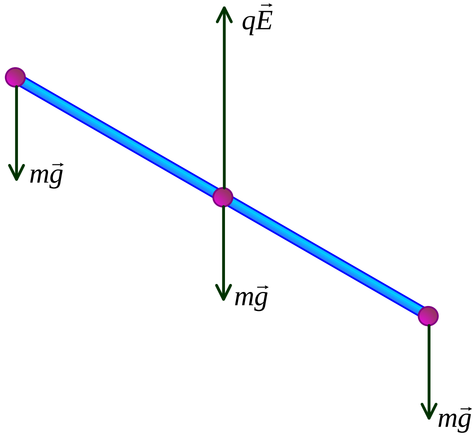


Рис. 4.5

В практическом плане (т.е. для решения конкретных задач) более интересен вариант (4.52). Из (4.56) следует, что если сумма внешних сил не равна нулю (условие (4.52 б)), то сумма моментов внешних сил зависит от выбора начала. Таким образом, условие $\vec{M}^{(ex)} = 0$ при $\vec{F}^{(ex)} \neq 0$ может выполняться только **при некотором специальном выборе начала О**. Соответственно сохраняется момент импульса $\vec{L}$ относительно именно этого начала. Выбираешь другое начало – и закон сохранения момента импульса не выполняется.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся в поле центральной силы

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}. \tag{4.59}$$

Момент этой силы относительно силового центра (О):

$$\vec{M}_F = \left[\vec{r}, f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0, \tag{4.60}$$

откуда следует:

- **в центральном силовом поле момент импульса материальной точки относительно силового центра сохраняется.**

Второй закон Кеплера является следствием сохраняемости момента импульса планеты, движущейся в гравитационном поле звезды, относительно центра звезды.

Приведем еще пример. Рассмотрим ***двойную звезду*** с компонентами массами m_1 и m_2 и будем считать эту систему замкнутой. Момент импульса системы сохраняется в любой инерциальной системе отсчета (ИСО) при любом выборе начала отсчета O:

$$\vec{L} \equiv \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = const. \tag{4.61}$$

При этом моменты импульса каждой из звезд вращающихся вокруг оси, проходящей через центр масс системы, вообще говоря, изменяется со временем: $\vec{l}_1 \neq const, \quad \vec{l}_2 \neq const.$

Если связать ИСО с центром масс двойной звезды и совместить начало отсчета с центром масс, то силы гравитационного притяжения, которыми звезды действуют друг на друга, запишутся в виде

$$\vec{F}_1 = -G\frac{m_2^3 m_1}{(m_1+m_2)^2 r_1^2}\cdot\frac{\vec{r}_1}{r_1}, \qquad \vec{F}_2 = -G\frac{m_1^3 m_2}{(m_1+m_2)^2 r_2^2}\cdot\frac{\vec{r}_2}{r_2}, \quad \text{(4.62 а, б)}$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы центров звезд, проведенные из центра масс системы. Равенства (4.62 а,б) нетрудно получить, используя закон всемирного тяготения и определение центра масс.

Выражения (4.62 а,б) для сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ показывают, что центр масс двойной звезды формально может рассматриваться как силовой центр и для первой звезды, и для второй. Отсюда следует, **что момент импульса каждой из звезд относительно**

центра масс системы сохраняется. Если $|\vec{r}_1|$ и $|\vec{r}_2|$ изменяются со временем, этот результат остается в силе.

В обсуждении закона сохранения момента импульса мы основное внимание уделили моменту внешних сил $\vec{M}^{(ex)}$. В частности, исследовали зависимость этой величины от выбора начала отсчета при заданной ИСО. Поскольку момент силы $\vec{M}$ и момент импульса $\vec{L}$ имеют похожие определения, ясно, что вопрос о зависимости момента импульса $\vec{L}$ от выбора начала O, например, также возникает, и для полноты картины необходимо эту зависимость исследовать. Попробуйте сделать это самостоятельно. Написав для $\vec{L}$ уравнения, аналогичные (4.53), (4.54), вы должны с их помощью получить следующий результат: при сдвиге начала отсчета O→O′ – см. (4.55) – изменение момента импульса системы определяется равенством, аналогичным (4.56),

$$\vec{L}(\mathrm{O}) - \vec{L}(\mathrm{O}') = \left[\vec{R}, \vec{P}\right], \tag{4.63}$$

где $\vec{P}$ – импульс системы. Отсюда следует, **что момент импульса системы не зависит от выбора начала, если система в целом покоится** $\vec{P} = 0$.

Рассмотрим теперь закон сохранения момента импульса относительно оси.

Аналогично предыдущему, из уравнения (4.16) получаем

$$M_z^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = const: \tag{4.64}$$

- **если сумма моментов действующих на систему внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется.**

Вопрос о зависимости величины $M_z^{(ex)}$ от выбора оси из бесконечного множества параллельных осей решается аналогично вопросу о зависимости $\vec{M}^{(ex)}$ от выбора начала. Покажем это.

Уравнение вращательного движения системы (4.15) при наличии оси, т.е. выделенного направления в пространстве, можно представить в виде системы уравнений

$$\frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt} = \vec{M}_{\parallel}^{(ex)}, \tag{4.65}$$

$$\frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt} = \vec{M}_{\perp}^{(ex)}, \tag{4.66}$$

где использованы разложения на составляющие

$$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}, \tag{4.25}$$

$$\vec{M}^{(ex)} = \vec{M}_{\parallel}^{(ex)} + \vec{M}_{\perp}^{(ex)}. \tag{4.67}$$

Эти разложения мы уже выполняли, рассматривая вращение твердого тела с закрепленной осью. Равенства (4.25), (4.67), (4.65), (4.66) можно применить при наличии выделенного (**вами**) направления в пространстве – всегда, – не обязательно ось должна быть физической.

Если рассматриваемая ось совпадает с OZ, то уравнение (4.65) эквивалентно (4.16). Рассматривая внешние силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ с точками приложения $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ и используя (4.36 а), запишем

$$\vec{M}_{\parallel}^{(ex)} = \sum_i \left[\vec{r}_{i\perp}, \vec{F}_{i\perp}\right]. \tag{4.68}$$

Подправим рис. 4.4, учитывая то, что все изображенные векторы должны быть поперечными, т.е. перпендикулярными обеим параллельным осям OZ и O′Z′ (см. рис. 4.6).

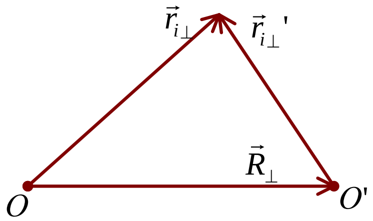


Рис. 4.6

Вектор $\vec{R}_{\perp}$ описывает параллельный перенос оси, $\vec{r}_{i\perp}$, $\vec{r}\,'_{i\perp}$ – поперечные составляющие радиусов-векторов точки приложения внешней силы $\vec{F}_i$. Заменив (4.55) равенством

$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}\,'_{i\perp} + \vec{R}_{\perp}, \tag{4.69}$$

получим аналогично (4.56):

$$\vec{M}_{\parallel}^{(ex)}(\mathrm{O}) - \vec{M}_{\parallel}^{(ex)}(\mathrm{O'}) = \sum_i \left[\vec{R}_{\perp}, \vec{F}_{i\perp}\right] = \left[\vec{R}_{\perp}, \sum_i \vec{F}_{i\perp}\right] = \left[\vec{R}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}^{(ex)}\right]. \tag{4.70}$$

Отсюда следует (аналогично (4.57)):

$$\vec{F}_{\perp}^{(ex)} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\parallel}^{(ex)}(\mathrm{O}) = \vec{M}_{\parallel}^{(ex)}(\mathrm{O'}) \tag{4.71}$$

для любых двух параллельных осей OZ, O′Z′.

Мы видим, что обсуждение закона сохранения **проекции** момента импульса можно провести точно так же, как анализ закона сохранения **вектора** момента импульса системы.

При изучении динамики вращательного движения часто обращаются к т.н. **скамье Жуковского**, она используется для демонстраций.

Скамья Жуковского – круглая горизонтальная платформа, которая может вращаться практически без трения вокруг вертикальной оси.

Рассмотрим пример. Человек располагается на вращающейся скамье Жуковского в ее центре в положении “руки по швам”. Система человек-скамья вращается с некоторой угловой скоростью ω_1. Как изменится угловая скорость вращения системы, если человек разведет руки в стороны?

Обозначим I_1 – момент инерции системы относительно оси вращения при первоначальном положении “руки по швам”,

$$I_1 = I_c + I_{ч1}, \tag{4.72}$$

где I_c – момент инерции скамьи, $I_{ч1}$ – начальный момент инерции человека.

Пусть I_2 – конечный момент инерции системы человек-скамья,

$$I_2 = I_c + I_{ч2}, \tag{4.73}$$

где $I_{ч2}$ – момент инерции человека в положении “руки в стороны”.

Очевидно, когда человек разводит руки в стороны, изменяется распределение его массы относительно оси вращения: массы некоторых частей тела (частей рук) **удаляются от оси вращения**, в то время как другие части тела (туловище, ноги, голова) остаются в прежнем положении относительно оси. В соответствии с определением момента инерции (4.27) это означает, что при переходе из положения “руки по швам” в положение “руки в стороны” момент инерции человека относительно оси вращения увеличивается:

$$I_{ч2} > I_{ч1}. \tag{4.74}$$

Для системы человек-скамья тогда будем иметь:

$$I_2 > I_1, \tag{4.75}$$

– т.е. при разведении рук в стороны **увеличивается момент инерции системы относительно оси**.

Рассмотрим теперь внешние силы, действующие на систему человек-скамья. Это силы тяжести $m_c\vec{g}$, $m_ч\vec{g}$ и силы реакции оси $\vec{R}$, которые приложены в точках, лежащих на оси вращения.

Введем ось OZ, совместив ее с осью вращения и направив по вектору начальной угловой скорости системы $\vec{\omega}_1$.

Моменты сил $m_c\vec{g}$ и $m_ч\vec{g}$ относительно оси OZ равны нулю. В качестве причины достаточно указать то обстоятельство, что силы эти – чисто “продольные” по отношению к оси (см. (4.41)). Момент сил реакции оси относительно OZ также равен нулю. Даже если распределение массы системы не является симметричным относительно оси вращения (например, человек поднял только одну руку), возникшие поперечные составляющие сил реакции $\vec{R}_\perp$ имеют нулевые плечи и – соответственно – нулевые моменты относительно оси. Попросту говоря, моменты относительно оси могут быть отличны от нуля только у тех сил, которые способны раскрутить тело (относительно данной оси). Силы $m_c\vec{g}$, $m_ч\vec{g}$ и $\vec{R}$ таковыми не являются. Поэтому моменты этих сил относительно оси OZ равны нулю. Следовательно, мы имеем

$$M_z^{(ex)} = 0. \tag{4.76}$$

Отсюда, в соответствии с законом сохранения (4.64) проекции момента импульса (или момента импульса относительно оси) получаем $L_z = const$. Тогда, учитывая (4.29), мы можем записать

$$I_1\omega_{1z} = I_2\omega_{2z}. \tag{4.77}$$

Поскольку ось OZ направлена по $\vec{\omega}_1$, $\omega_{1z} = \omega_1$. Но тогда из (4.77) получаем $\omega_{2z} > 0 \Rightarrow \omega_{2z} = \omega_2.$ Равенство (4.77) можно переписать в виде

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{4.78}$$

или, более подробно,

$$(I_c + I_{\text{ч}1})\omega_1 = (I_c + I_{\text{ч}2})\omega_2. \tag{4.79}$$

Для конечной угловой скорости получаем

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(I_c + I_{\text{ч}1})}{(I_c + I_{\text{ч}2})}\omega_1. \tag{4.80}$$

Учитывая (4.74) или (4.75), мы приходим к выводу, что **угловая скорость вращения системы уменьшается**.

Если теперь человек, вращающийся с разведенными в стороны руками, прижмет руки к груди, то его момент инерции и – следовательно – момент инерции системы относительно оси уменьшится, а угловая скорость вращения (см. (4.78)) – увеличится.

Фигуристы регулируют собственную угловую скорость вращения, изменяя момент инерции – разводя и сводя руки (а иногда и ноги). У них, правда, нет скамьи Жуковского.

Полагая силы трения между льдом и коньками пренебрежимо малыми, мы можем описать вращение фигуриста, используя уравнения (4.72) – (4.80). Следует только везде положить $I_c = 0$ и пересмотреть список внешних сил. Теперь это $m_ч\vec{g}$ и нормальная реакция льда $\vec{N}$. Ось вращения не реализована никакими стержнем или спицей, поэтому о силах реакции оси $\vec{R}$ говорить не приходится. Обе внешние силы, действующие на фигуриста, – $m_ч\vec{g}$ и $\vec{N}$ – чисто продольные, и мы имеем (4.76), откуда следует (4.77), (4.78).

4.4 Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Рассмотрим два простых примера.

1. Пусть имеется тонкий однородный стержень длиной L и массой m. **Однородность** в данном случае означает, что масса участка стержня Δm пропорциональна длине этого участка Δl. Если ввести линейную плотность массы

$$\tau' \equiv \frac{\Delta m}{\Delta l}, \tag{4.81}$$

то однородность стержня можно определить так: $\tau' = const \quad \forall \ \Delta l.$

Неоднородность стержня удобнее было бы описывать локально. Например, с помощью функции $\tau(l)$, где l – расстояние от данной точки стержня до его левого конца, а τ определить равенством:

$$\tau \equiv \frac{dm}{dl}. \tag{4.82}$$

По аналогии с известной вам объемной плотностью вещества ρ можно сказать так: величина τ' – средняя линейная плотность массы стержня, а τ – линейная плотность массы в точке.

Для наших целей удобнее использовать величину (4.82). **Однородность тонкого стержня** означает, что для всех точек стержня (всех $l \in (0, L)$)

$$\tau = const. \qquad (4.83)$$

Найдем момент инерции стержня относительно оси OO′, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов (рис. 4.7). У нас имеется определение момента инерции тела (4.27). Чтобы им воспользоваться, нужно поделить стержень на материальные точки m_i, найти момент инерции каждой m_i относительно оси OO′,

$$I_i = m_i r_{i\perp}^2, \qquad (4.84)$$

а затем результаты сложить:

$$I = \sum_i I_i. \qquad (4.85)$$

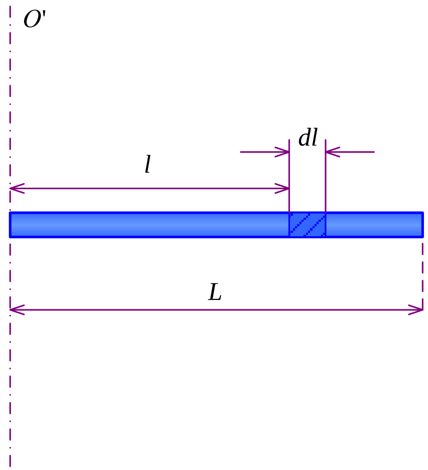


Рис. 4.7

Напомним, что $r_{i\perp}$ – расстояние от материальной точки m_i до оси.

Следует отметить, что мы обозначаем ось OO′ – а не OZ – потому, что при вычислении момента инерции – неотрицательного скаляра – ориентация оси (выбор положительного направления) не имеет значения. Заменой OZ→ OO′ мы хотим это подчеркнуть. В принципе можно оставить и ориентированную ось OZ.

Поскольку масса распределена вдоль стержня **непрерывным образом**, “размазана” по стержню, при вычислении момента инерции мы поступим так. Выделим бесконечно малый кусочек стержня (элемент) dl (см. рис. 4.7) с массой dm (материальная точка). Найдем момент инерции этого элемента относительно оси,

$$dI = dm \cdot l^2, \tag{4.86}$$

и, предполагая, что момент инерции (4.86) найден для каждого элемента стержня, просуммируем моменты инерции элементов. Суммирование, правда, придется, по понятной причине, заменить интегрированием:

$$I = \int dI = \int l^2 dm. \tag{4.87}$$

Таким образом, вместо равенств (4.84), (4.85) используются равенства (4.86), (4.87). Эта замена обусловлена переходом от дискретного описания распределения массы к описанию непрерывному:

$$m_i \to dm, \quad r_{i\perp} \to l, \quad I_i \to dI, \quad \sum_i I_i \to \int dI. \tag{4.88}$$

Величина dm выражается с помощью определения (4.82):

$$dm = \tau dl. \tag{4.89}$$

Учитывая однородность стержня, запишем

$$\tau = \frac{m}{L} = const. \tag{4.90}$$

Тогда

$$dm = \frac{m}{L} dl. \tag{4.91}$$

Подставляя (4.91) в (4.87), получаем выражение для момента инерции стержня в виде **определенного интеграла**:

$$I = \int_0^L l^2 \frac{m}{L} dl. \tag{4.92}$$

Понятно, что в (4.87) суммируются вклады в моменты инерции I элементов стержня, положение каждого из которых определяется величиной l (расстоянием до оси вращения), а l изменяется от 0 до L.

Вычислив интеграл (4.92), получим

$$I = \frac{mL^2}{3}. \tag{4.93}$$

2. Найдем момент инерции сплошного **однородного** цилиндра массы m и радиуса R относительно оси цилиндра.

Пусть h – высота цилиндра. Тогда его плотность в любой точке

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h} = const. \tag{4.94}$$

Прежде всего, отметим следующее. Если имеется **тонкостенная труба** массы m' и радиуса r, момент инерции такой трубы относительно ее оси вычисляется по формуле

$$I' = m' r^2. \qquad (4.95)$$

Это равенство – непосредственное следствие определения (4.27). В самом деле, все материальные точки m_i, из которых состоит тонкостенная труба, находятся на одном и том же расстоянии

$$r_{i\perp} = r \qquad (4.96)$$

от оси трубы. Тогда

$$I' \equiv \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i r^2 = r^2 \sum_i m_i = m' r^2. \qquad (4.97)$$

Воспользуемся этим результатом для вычисления момента инерции сплошного цилиндра. Порежем цилиндр на соосные трубы с бесконечно тонкими стенками. На рис.4.8 показаны сплошной цилиндр и одна из таких бесконечно тонких труб. Радиус трубы r, толщина стенки – dr. Масса трубы

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r\, dr \cdot h, \qquad (4.98)$$

где dV – объем трубы.

Момент инерции трубы

$$dI = r^2 dm = 2\pi r^3 h \rho dr. \qquad (4.99)$$

Интегрируя по r от 0 до R, получаем момент инерции цилиндра:

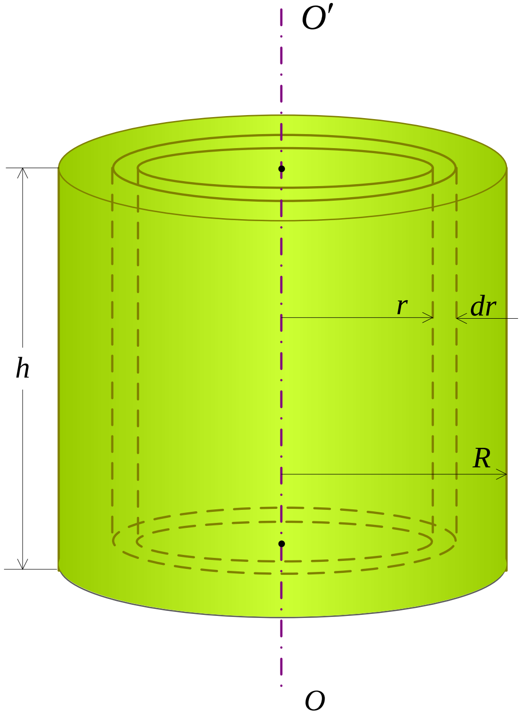


Рис. 4.8

$$I = \int_0^R 2\pi r^3 h\rho dr = 2\pi h\rho \frac{R^4}{4}. \qquad (4.100)$$

Подставив в (4.100) выражение для плотности цилиндра (4.94), найдем

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.101)$$

Отметим, что полученный результат не зависит от высоты цилиндра. Поэтому он годится и для однородного диска, в том числе и сколь угодно тонкого, а в пределе – и бесконечно тонкого.

Пусть для тела массы m известен момент инерции I_0 относительно оси OO_1, проходящей через центр масс тела. Тогда момент инерции I этого тела относительно оси $O'O_1'$, параллельной OO_1, определяется по правилу

$$I = I_0 + md^2, \tag{4.102}$$

где d – расстояние между осями.

- Равенство (4.102) называется **теоремой Штейнера**.

Из этой теоремы, в частности следует, что для бесконечного множества параллельных осей вращения момент инерции тела **минимален** относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

Докажем теорему Штейнера. На рис. 4.9 показано тело в проекции на плоскость, перпендикулярную обеим осям OO_1 и $O'O_1'$, – плоскость чертежа. Тело рассматривается как набор материальных точек, i-я точка массой m_i показана на рис. 4.9. $\vec{r}_{i\perp}$ и $\vec{r}_{i\perp}{}'$ – радиусы-векторы m_i, проведенные от осей OO_1 и $O'O_1'$ соответственно. Вектор $\vec{d}$ перпендикулярен обеим осям и лежит в плоскости чертежа, его длина $d \equiv |\vec{d}|$ равна расстоянию между осями.

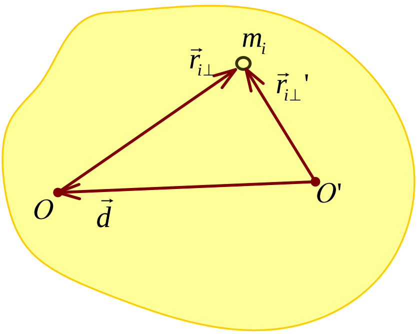


Рис. 4.9

Запишем выражение для момента инерции тела относительно оси O′O₁′:

$$I = \sum_i m_i r'^2_{i\perp}. \tag{4.103}$$

Используя очевидное равенство

$$\vec{r}'_{i\perp} = \vec{r}_{i\perp} + \vec{d}, \tag{4.104}$$

найдем:

$$r'^2_{i\perp} = (\vec{r}_{i\perp} + \vec{d})^2 = r_{i\perp}{}^2 + 2\vec{d}\cdot\vec{r}_{i\perp} + d^2. \tag{4.105}$$

Отсюда следует

$$I = \sum_i m_i r^2_{i\perp} + 2\sum_i m_i \vec{d}\cdot\vec{r}_{i\perp} + \sum_i m_i d^2. \tag{4.106}$$

Первое слагаемое в правой части (4.106) – это I_0, последнее равно md^2. Покажем, что второе слагаемое равно нулю.

Очевидно,

$$\sum_i m_i \vec{d}\cdot\vec{r}_{i\perp} = \left(\vec{d}, \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}\right). \tag{4.107}$$

Если радиусы-векторы материальных точек m_i проводить из центра масс тела (который расположен на оси OO$_1$), то радиус-вектор центра масс, вычисленный на основе определения,

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{4.108}$$

равен нулю, т.к. начало отсчета и центр масс – это одна и та же точка.

Для поперечной (по отношению к осям OO_1 и $O'O_1'$) составляющей $\vec{r}_c$ имеем:

$$\vec{r}_{c\perp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}}{m} = 0. \tag{4.109}$$

Отсюда следует, что выражение (4.107) и второе слагаемое в правой части (4.106) равны нулю. Теорема Штейнера доказана.

В примере, рассмотренном выше, мы нашли момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов,

$$I = \frac{mL^2}{3}, \tag{4.93}$$

где m – масса стержня, L – его длина.

Найдем момент инерции I_0 относительно параллельной оси, проходящей через центр масс стержня – его середину.

Очевидно, расстояние между осями

$$d = \frac{L}{2}. \tag{4.110}$$

Подставим в теорему Штейнера (4.102) выражения (4.93) и (4.110), получаем

$$\frac{mL^2}{3} = I_0 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2. \tag{4.111}$$

Отсюда следует

$$I_0 = \frac{mL^2}{12}. \qquad (4.112)$$

4.5. Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии.

При вращении тела относительно некоторой оси скорости всех его материальных точек определяются равенством

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_{i\perp} = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}], \qquad (4.113)$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела, а $\vec{r}_{i\perp}$ – поперечная составляющая радиуса-вектора материальной точки m_i. Начало отсчета O лежит на оси вращения, так что начало вектора $\vec{r}_{i\perp}$ также находится на оси. Мы это уже обсуждали (см., напр., рис. 4.2).

Из (4.113) следует

$$\upsilon_i^2 = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]^2 = \omega^2 r_{i\perp}^2. \qquad (4.114)$$

Подставляя выражение (4.114) в определение кинетической энергии

$$K \equiv \sum_i \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}, \qquad (4.115)$$

получаем

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} \omega^2 r_{i\perp}^2 = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \cdot \frac{\omega^2}{2}. \qquad (4.116)$$

Но сумма в скобках в (4.116) – это момент инерции тела I относительно оси. Поэтому **для вращающегося тела** окончательно имеем

$$K = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{4.117}$$

- **В общем случае** кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы

$$K = K_{\text{пост}} + K_{\text{вр}}. \tag{4.118}$$

Здесь

$$K_{\text{пост}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} \tag{4.119}$$

– **кинетическая энергия поступательного движения тела**, m – масса тела, $\vec{\upsilon}_c$ – скорость его центра масс;

$$K_{\text{вр}} = \frac{I_0\omega^2}{2} \tag{4.120}$$

кинетическая энергия вращения тела относительно оси, проходящей через центр масс (сравни с (4.117)). Величина $K_{\text{вр}}$ вычисляется в инерциальной СО, относительно которой центр масс тела **в данный момент времени** покоится.

Представление кинетической энергии в виде суммы (4.118) справедливо только для твердого тела. Равенство (4.118) нетривиально, и его справедливость нужно доказывать. Докажем.

Очевидно, что любое движение твердого тела можно представить как композицию двух движений: поступательного движения (т.е. перемещения центра масс) и чистого вращения с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно оси, проходящей через центр масс тела. Тогда скорость i-й материальной точки тела m_i может быть представлена в виде суммы:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_i', \tag{4.121}$$

где $\vec{\upsilon}_c$ – скорость центра масс, $\vec{\upsilon}_i'$ – скорость m_i в системе центра масс, т.е. скорость чистого вращения. Для $\vec{\upsilon}_i'$ можно использовать равенства (4.113), (4.114).

Квадрат скорости i-й материальной точки в исходной системе отсчета запишется тогда в виде

$$\upsilon_i^2 = \left(\vec{\upsilon}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]\right)^2 = \upsilon_c^2 + \omega^2 r_{i\perp}^2 + 2\vec{\upsilon}_c \cdot [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]. \tag{4.122}$$

Смешанное произведение векторов в последнем слагаемом в правой части (4.122) перепишем, используя возможность циклической перестановки:

$$\vec{\upsilon}_c \cdot [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}] = \vec{r}_{i\perp}[\vec{\upsilon}_c, \vec{\omega}]. \tag{4.123}$$

Подставляя в определение кинетической энергии (4.115) выражение (4.122), с учетом (4.123) получаем

$$K = \sum_i \frac{m_i \upsilon_c^2}{2} + \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_{i\perp}^2}{2} + \sum_i m_i [\vec{\upsilon}_c, \vec{\omega}] \cdot \vec{r}_{i\perp}. \tag{4.124}$$

Первое слагаемое в правой части – это $K_{\text{пост}}$, второе – $K_{\text{вр}}$. Нам осталось показать что последнее слагаемое

$$\sum_i m_i [\vec{\upsilon}_c, \vec{\omega}] \cdot \vec{r}_{i\perp} = \left([\vec{\upsilon}_c, \vec{\omega}], \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp} \right) \tag{4.125}$$

равно нулю.

Напомним, что $\vec{r}_{i\perp}$ – поперечная составляющая радиуса-вектора материальной точки m_i, причем $\vec{r}_i$ проводится из начала отсчета, лежащего на оси, проходящей через центр масс тела.

Нам достаточно убедиться в том (см. (4.125)), что

$$\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp} = 0. \tag{4.126}$$

Но этот результат, совпадающий с (4.109), мы уже получили при выводе теоремы Штейнера.

Таким образом, справедливость равенства

$$K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} \tag{4.127}$$

для твердого тела доказана.

Приведем простой пример. Пусть имеется тонкий обруч массой m и радиусом R, который катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью υ_0. Найдем кинетическую энергию катящегося обруча.

Величина υ_0 – это скорость центра масс обруча. В системе отсчета, связанной с центром масс обруча, горизонтальная поверхность движется “назад” со скоростью υ_0, а обруч вращается с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\upsilon_0}{R}. \tag{4.128}$$

Момент инерции обруча относительно оси, проходящей через его центр (совпадающий с центром масс)

$$I_0 = mR^2. \tag{4.129}$$

Используя формулу (4.127), получаем

$$K = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\left(\frac{\upsilon_0}{R}\right)^2 = m\upsilon_0^2. \tag{4.130}$$

Рассмотрим работу **внешней** силы $\vec{F}$, действующей на **твердое тело**, **вращающееся вокруг закрепленной оси**. Тело – набор материальных точек, и сила $\vec{F}$ оказывается приложенной к какой-то материальной точке. Элементарная работа силы $\vec{F}$, по определению,

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}, \tag{4.131}$$

где $d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение этой материальной точки.

Но при вращательном движении

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\perp = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}_\perp\right], \tag{4.132}$$

где $\overrightarrow{d\varphi},$ – вектор бесконечно малого поворота **тела** (и любой точки тела).

Представив силу в виде суммы

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp, \tag{4.133}$$

перепишем выражение для элементарной работы:

$$\delta A = \vec{F}_\parallel d\vec{r}_\perp + \vec{F}_\perp d\vec{r}_\perp. \tag{4.134}$$

Первое слагаемое в правой части (4.134) равно нулю. Тогда (см. (4.132))

$$\delta A = \vec{F}_\perp d\vec{r}_\perp = \vec{F}_\perp \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}_\perp\right] \tag{4.135}$$

Используя циклическую перестановку в смешанном произведении, получаем

$$\delta A = \overrightarrow{d\varphi}\left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}\right] = \vec{M}_{\parallel}\overrightarrow{d\varphi}. \qquad (4.136)$$

Здесь $\vec{M}_{\parallel}$ (см. (4.35), (4.36 а)) – продольная составляющая вектора момента силы $\vec{F}$ относительно начала O, расположенного на оси вращения.

Введем ось OZ, совместив ее с осью вращения. Тогда

$$\overrightarrow{d\varphi} = \vec{k}d\varphi, \quad \vec{M}_{\parallel} = M_z \cdot \vec{k}, \qquad (4.137\text{ а, б})$$

где $\vec{k}$ – орт оси OZ. Очевидно, (4.136) можно переписать в виде

$$\delta A = M_z d\varphi. \qquad (4.138)$$

Выражение (4.138) – работа силы $\vec{F}$ при бесконечно малом повороте.

Если $\vec{F}$ – сумма сил, приложенных в одной точке тела, то M_z в (4.138) – сумма моментов этих сил относительно оси OZ.

Собственно, информация о том, где, в какой точке, приложена сила $\vec{F}$, необходима лишь для вычисления момента M_z относительно оси. Знания момента M_z **достаточно** для вычисления работы силы над вращающимся телом.

Работа силы $\vec{F}$ при повороте тела на конечный угол вычисляется по формуле

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi)d\varphi. \qquad (4.139)$$

Здесь φ – угловая координата какой-либо помеченной материальной точки тела, φ_1 и φ_2 – начальное и конечное значение координаты этой точки; момент M_z силы $\vec{F}$ относительно оси считается функцией φ.

Если сила $\vec{F}$ приложена все время к определенной материальной точке тела, то именно эту точку и следует пометить. Если – нет, то метка ставится в соответствии с соображениями удобства или наглядности.

Рассмотрим два **примера**.

1. Тонкий однородный диск массой m и радиусом R подвешен так, как показано на рис. 4.10, и может совершать колебания относительно горизонтальной оси, проходящей через точку О и перпендикулярной плоскости диска. Точка С на рис. 4.10 – центр тяжести диска. Диск отклонили так, что отрезок ОС образовал угол $\varphi_1 = 60°$ с вертикалью, и отпустили. Найти работу силы тяжести над диском при его движении до положения равновесия (оно показано на рис. 4.10).

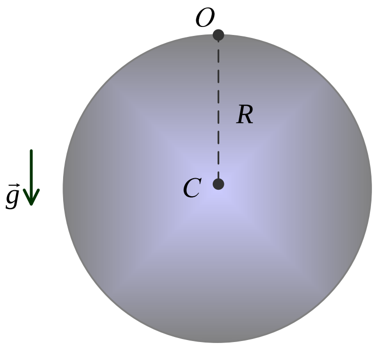


Рис. 4.10

В данном случае формально можно считать, что сила тяжести приложена к материальной точке, содержащей центр тяжести, – точку С. Эту точку мы и пометим. Начальное и конечное значение угловой координаты этой точки равны соответственно $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 0°$ см. рис. 4.11. На рис. 4.11 ось OZ направлена к наблюдателю.

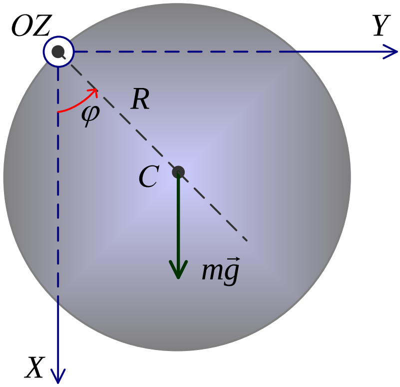


Рис. 4.11

Момент силы тяжести относительно оси OZ определяется углом (см. рис. 4.11):

$$M_z = M_z(\varphi) = -mgR\sin\varphi. \tag{4.140}$$

Работу вычисляем по формуле (4.139):

$$A = \int_{\pi/3}^{0} (-mgR\sin\varphi)d\varphi = \int_{0}^{\pi/3} mgR\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}mgR. \tag{4.141}$$

Работу силы тяжести можно найти и более простым способом. Если вам удастся это сделать, появится возможность проверить результат (4.141).

2. Вращающийся цилиндрический барабан радиуса R тормозят, прикладывая к его боковой поверхности тормозную колодку. Найти работу силы трения при повороте барабана на угол $\Delta\varphi$. Считать величину силы трения известной и постоянной.

Очевидно, величина $\Delta\varphi$ в условии задачи должна рассматриваться как положительная. На рис. 4.12 показаны направления замедленного вращения барабана и вектор силы трения, касательный к цилиндрической поверхности. В этом очень простом примере **важно отметить**, что вращающийся барабан "подставляет" колодке К все время разные малые участки цилиндрической поверхности. Если эти малые участки рассматривать как границы элементов твердого тела, располагающихся у поверхности, а сами элементы считать материальными точками, то получается, что сила трения приложена то к одной материальной точке тела, то к другой, то к третьей … и т. д. Для нас это обстоятельство несущественно, поскольку для вычисления работы важно уметь определить момент силы трения относительно оси. А мы можем это сделать. Если направить ось OZ "к нам", то

$$M_z = F_{\text{тр}} \cdot R. \tag{4.142}$$

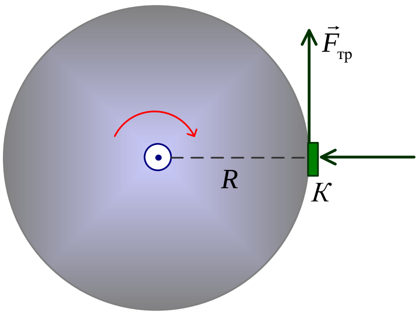


Рис. 4.12

Пометим ту материальную точку барабана, которая находится в контакте с тормозной колодкой в начальный момент времени и положим $\varphi_1 = 0$. Поскольку положительные углы для данного направления OZ откладываются против часовой стрелки, а барабан поворачивается на $\Delta\varphi$ – по часовой, то для помеченной точки получаем $\varphi_2 = -\Delta\varphi$.

Вычисление по формуле (4.139) дает

$$A_{\text{тр}} = \int_0^{-\Delta\varphi} F_{\text{тр}} \cdot R\, d\varphi = -F_{\text{тр}} \cdot R\Delta\varphi. \tag{4.143}$$

До сих пор мы считали по умолчанию, что элементарная работа силы, приложенной к определенной материальной точке, вычисляемая

как работа над материальной точкой ($\delta A = \vec{F} d\vec{r}$), и элементарная работы силы над твердым телом – это одно и тоже.

- Будем считать равенство (4.131) определением элементарной работы силы $\vec{F}$ над твердым телом.

Мы до сих пор рассматривали силу $\vec{F}$ как внешнюю. Очевидно, что работа внутренней силы над телом должна определяться точно так же – определение работы должно быть универсальным.

Поскольку определение работы осталось прежним, **теорема о кинетической энергии** также должна сохранить свой вид. Запишем ее в дифференциальной форме – на языке бесконечно малых величин:

$$dK = \delta A_{\Sigma}. \tag{4.144}$$

Левая часть (4.144) – изменение кинетической энергии твердого тела за бесконечно малый промежуток времени dt, правая – алгебраическая сумма элементарных (за время dt) работ **всех** сил, действующих на тело (т.е. на все материальные точки тела).

Нас интересует применение теоремы (4.144) к случаю чисто вращательного движения твердого тела, например, к вращению тела с закрепленной осью. Оказывается, что здесь имеется некоторая специфика, обусловленная именно твердостью (недеформируемостью) рассматриваемой системы.

Действующая на вращающееся твердое тело **внешняя** сила "**включает**" внутренние силы в твердом теле. Тормозная колодка в рассмотренном выше примере действует на элементы тела, расположенные на правом конце горизонтального диаметра барабана (по рис. 4.12), в результате чего тормозятся **все** элементы тела. Это – результат действия внутренних сил. **По-видимому, работу внутренних сил необходимо учитывать обязательно**.

Таким образом, естественно записать суммарную работу в виде

$$\delta A_{\Sigma} = \delta A^{(in)} + \delta A^{(ex)}, \tag{4.145}$$

где $\delta A^{(in)}$ – сумма элементарных работ внутренних сил, а $\delta A^{(ex)}$ – сумма элементарных работ сил внешних.

Эти слагаемые могут быть представлены в форме (см. (4.138))

$$\delta A^{(in)} = M_z^{(in)} d\varphi, \qquad (4.146\text{ а})$$

$$\delta A^{(ex)} = M_z^{(ex)} d\varphi. \qquad (4.146\text{ б})$$

Величина $M_z^{(in)}$ – сумма моментов внутренних сил относительно оси OZ, $M_z^{(ex)}$ – сумма моментов внешних сил относительно оси.

Но при выводе уравнения вращательного движения мы показали, что сумма моментов внутренних сил равна нулю (см. равенство (4.11)). Отсюда следует

$$\delta A^{(in)} = 0. \qquad (4.147\text{ а})$$

При повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$ имеем, очевидно,

$$A^{(in)} = 0. \qquad (4.147\text{ б})$$

Равенства (4.147) возникают из-за того, что все точки тела совершают за любой промежуток времени одинаковые угловые перемещения. Имеется поступательный аналог: при поступательном движении системы все ее точки за dt совершают одинаковые перемещения $d\vec{r}$, и сумма работ внутренних сил оказывается равной нулю благодаря третьему закону Ньютона.

Подчеркнем, что равенства (4.147) мы используем для вращения твердого тела относительно фиксированной оси. Если система "мягкая" и угловые перемещения (углы поворота) разных ее частей за один и тот же промежуток времени – различны, то (4.147) не выполняются.

Отметим также, что силы реакции оси мы не рассматриваем по той простой причине, что эти силы имеют нулевые плечи и, следовательно, нулевые моменты относительно оси.

Итак, необходимый учет внутренних сил показал, что их работа над твердым телом с фиксированной осью вращения равна нулю. Теорема о кинетической энергии, таким образом, приобретает вид

$$dK = M_z^{(ex)} d\varphi \tag{4.148}$$

и, соответственно, для поворотов на конечные углы

$$\Delta K = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^{(ex)} d\varphi. \tag{4.149}$$

Здесь $M_z^{(ex)} = M_z^{(ex)}(\varphi)$, величины $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ относятся, как обсуждалось выше, к помеченной точке твердого тела.

4.6. Таблица соответствия для величин, характеризующих поступательное и вращательное движения.

Для кинематических величин таблицу соответствия мы уже составляли в ГЛАВЕ 1. Теперь мы дополним ее величинами динамическими. Для вращательного движения это момент инерции I, момент импульса $\vec{L}$, момент силы $\vec{M}$ и проекции этих векторов L_z, M_z. Перечисленные величины аналогичны массе m, импульсу $\vec{p}$, силе $\vec{F}$ и проекциям $p_x,\ F_x$ соответственно.

Таблица 2

Поступат. движение	$d\vec{r}$	$\vec{\upsilon}$	$\vec{a}$	x	υ_x	a_x	m	$\vec{p}$	$\vec{F}$	p_x	F_x
Вращат. движение	$\overrightarrow{d\varphi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z	I	$\vec{L}$	$\vec{M}$	$L_z.$	M_z

Таблицу можно использовать в практических целях. Положим, вы помните уравнение, характеризующее поступательное движение, а соответствующее уравнение для вращательного движения забыли. Нужное уравнение получаем так: пишем поступательный вариант, а затем величины из верхней строки таблицы заменяем теми, что располагаются в таблице под ними, т.е. их вращательными аналогами.

В уравнении поступательного движения системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(ex)} \qquad (4.150)$$

сделаем замены $\vec{p} \to \vec{L},\ \vec{F}^{(ex)} \to \vec{M}^{(ex)}$. Получается уравнение вращательного движения системы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)}. \qquad (4.151)$$

Действуя таким образом, любому уравнению можно подобрать пару – аналогичное уравнение. Поработайте с таблицей – убедитесь в этом сами.

4.7 Гироскоп. Угловая скорость прецессии.

- **Гироскоп** – это быстро вращающееся массивное тело.

Примером гироскопа является хорошо известный вам с детства волчок. Гироскоп обладает очень интересным свойством, которое состоит в том, что попытка изменить ориентацию оси вращения приводит к тому, что ось гироскопа начинает вращаться. Такое вращение называется **прецессией**.

На рис. 4.13 показан вращающийся волчок. Будем считать, что он закреплен в точке О; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения гироскопа. В момент, когда сделан рис. 4.13, ось гироскопа лежит в плоскости чертежа, С – центр тяжести волчка, $\vec{r}$ радиус-вектор центра тяжести, проведенный из точки О.

На рис. 4.14 показаны вектор момента импульса волчка $\vec{L}$ относительно точки О, продольная (по отношению к вектору $\vec{g}$) и поперечная его составляющие $\vec{L}_{\parallel}$ и $\vec{L}_{\perp}$.

Рис. 4.13 и 4.14 соответствуют одному и тому же моменту времени, векторы $\vec{L}$, $\vec{L}_{\parallel}$, $\vec{L}_{\perp}$ лежат в плоскости чертежа.

Пренебрегая моментом сил трения, уравнение движения волчка запишем в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (4.151)$$

где

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, m\vec{g}\right] \qquad (4.152)$$

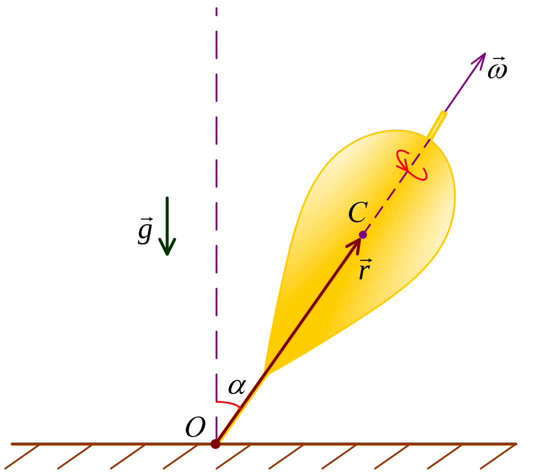


Рис. 4.13

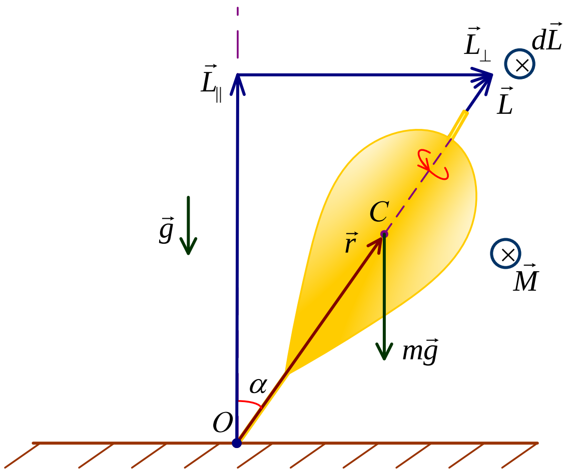


Рис. 4.14

– момент силы тяжести относительно т.О. Вектор $\vec{M}$ направлен "от нас" – как показано на рис. 4.14. Бесконечно малое изменение момента импульса волчка (за время dt) –

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \tag{4.153}$$

– это вектор, также направленный "от нас".

Таким образом, получаем

$$d\vec{L} = d\vec{L}_{\perp}, \qquad d\vec{L}_{\|} = 0, \tag{4.154 а, б}$$

причем

$$d\vec{L}_{\perp} \perp \vec{L}_{\perp}. \tag{4.155}$$

Отсюда следует

$$\vec{L}_{\|} = const, \qquad \left|\vec{L}_{\perp}\right| \equiv L_{\perp} = const. \tag{4.156 а, б}$$

На рис. 4.15 показано движение вектора $\vec{L}$. Он описывает конус с углом раствора 2α, конец вектора $\vec{L}$ движется по окружности радиуса $L_{\perp}$ с центром в точке O′ – она также показана на рисунке. Ось конуса вертикальна. Ось волчка, к которой привязан вектор $\vec{L}$ также описывает конус, т.е. вращается вокруг вертикальной оси. Это вращение и называется **прецессией гироскопа**. Угловая скорость прецессии $\vec{\Omega}$ в данном случае направлена вертикально вверх.

Величину $\vec{\Omega}$ можно вычислить как угловую скорость движения конца вектора $\vec{L}$ по окружности радиуса $L_{\perp}$.

Очевидно (см. рис.4.15),

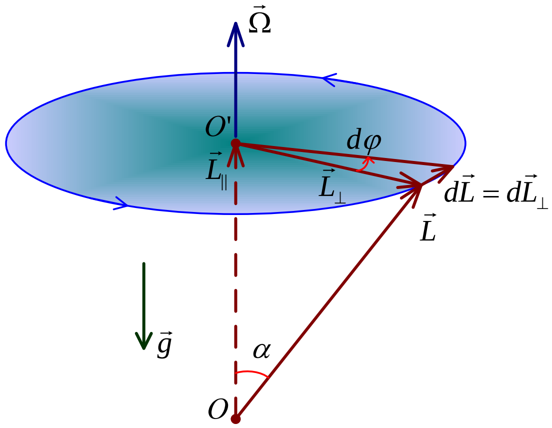


Рис. 4.15

$$\Omega = \frac{|d\varphi|}{dt}. \qquad (4.157)$$

Рассматривая бесконечно малый сектор, показанный на рис. 4.15, мы можем записать:

$$|d\varphi| = \frac{|d\vec{L}_{\perp}|}{L_{\perp}} = \frac{|\vec{M}|dt}{L_{\perp}}. \qquad (4.158)$$

Отсюда

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{L_{\perp}}. \qquad (4.159)$$

Используя рис. 4.14, получаем

$$|\vec{M}| = m\,g\,r\sin\alpha, \qquad (4.160\text{ а})$$

$$L_{\perp} = L\sin\alpha, \qquad (4.160\text{ б})$$

где $r \equiv |\vec{r}|$. Подставляя (4.160 а), (4.160 б) в (4.159), находим **угловую скорость прецессии** волчка

$$\Omega = \frac{mgr}{L}. \tag{4.161}$$

Если I – момент инерции волчка относительно его оси, то

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega}. \tag{4.162}$$

Отметим, что Ω **не зависит от угла** α **между осью гироскопа и вертикалью**.

Применения гироскопов многочисленны и интересны. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки наших лекций. Рекомендуем ознакомиться с применением гироскопов самостоятельно (по учебнику).

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО). РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

5.1. Основные положения нерелятивистской механики (механики Ньютона-Галилея).
5.2. Опыт Майкельсона. Принцип относительности Эйнштейна. Относительность одновременности.
5.3. Интервал между двумя событиями. Инвариантность интервала относительно перехода в другую систему отсчета. Преобразование Лоренца.
5.4. Следствия преобразования Лоренца. Сокращение длин. Запаздывание движущихся часов. Релятивистский закон сложения скоростей.

5.1. Основные положения нерелятивистской механики (механики Ньютона–Галилея).

В основе механики Ньютона-Галилея, с которой вы уже познакомились, лежит ряд фундаментальных положений: **определений** важнейших понятий, **постулатов, законов.** Прежде, чем приступать к изучению основ **специальной теории относительности (СТО),** полезно вспомнить основы **нерелятивистской механики** Ньютона-Галилея.

А1. **Определение. Системой отсчета (СО)** называется следующий комплекс: тело отсчета, жестко связанная с ним система координат и часы.

А2. **Постулат.** Ход **времени** во всех системах отсчета одинаков: **время абсолютно.** Это так называемое математическое (абсолютное) время Ньютона.

А3. **Определение. Событие** определяется моментом времени (t), когда оно произошло, и местом $\left(\vec{r}=(x,y,z)\right)$, где оно произошло. Таким образом, событие определяет четверка величин (t, x, y, z).

Примеры событий: пребывание материальной точки (частицы) в данный момент времени t в данной точке пространства (x, y, z), прибытие светового сигнала, отправление светового сигнала, вспышка маленькой лампочки, срабатывание точечного (малых размеров) счетчика, зафиксировавшего заряженную частицу, попадание пули в центр мишени и т.д.

Во всех системах отчета данное событие происходит в одно и то же время. Для любых двух систем отсчета K и K' моменты времени, когда произошло данное (любое) событие, t и t', подчинены равенству $t = t'$, которое является математическим выражением **постулата** А2. События, одновременные в K ($t_1 = t_2$), одновременны в K' ($t_1' = t_2'$).

А4. Системы отсчета делятся на **инерциальные (ИСО**) и **неинерциальные (НСО)**. Описание движения в ИСО является, как правило, наиболее простым.

А5. **Первый закон Ньютона (закон инерции)** – **определение + постулат о существовании** – гласит:

Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых **свободная** материальная точка движется прямолинейно и равномерно либо покоится.

Любая **СО**, движущаяся относительно некоторой ИСО поступательно, равномерно и прямолинейно, также является инерциальной. Таким образом, существует бесконечное множество ИСО. Примером ИСО (с хорошей точностью) может служить **гелиоцентрическая система отсчета** с началом отсчета, выбранным в центре Солнца, и координатными осями, направленными на удаленные звезды.

А6. Механическая эквивалентность всех ИСО утверждается **фундаментальным постулатом – принципом относительности Галилея:**

Законы механики во всех ИСО имеют один и тот же вид.

Это означает, что никакие механические опыты не позволяют идентифицировать ИСО, т.е., например, определить, движется данная ИСО относительно гелиоцентрической или нет.

А7. Координаты и время события при переходе от одной ИСО к другой преобразуются по правилу (закону), которое называется **преобразованием Галилея**. Если имеется две ИСО: K и K', – и K' движется относительно K со скоростью $\vec{V} = const$, а начала отсчета в K и K' при $t = t' = 0$ совпадают, то переход $(t', x', y', z') \to (t, x, y, z)$ или $(t', \vec{r}\,') \to (t, \vec{r})$ определяется законом

$$t = t', \tag{5.1}$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t'. \tag{5.2}$$

Система (5.1), (5.2) – **преобразование Галилея**. Очевидно, (5.2) можно записать и в проекциях на координатные оси. В частном случае, когда оси OX и $O'X'$ сонаправлены и совпадают, а OY и $O'Y'$, OZ и $O'Z'$ сонаправлены, вместо (5.2) имеем

$$x = x' + Vt', \tag{5.3 а}$$

$$y = y', \tag{5.3 б}$$

$$z = z'. \tag{5.3 в}$$

Систему (5.1), (5.3) называют **частным преобразованием Галилея**.

Обратите внимание: в правой части (5.3 а) под V понимается на самом деле V_x. Запись (5.3 а) является традиционной, и мы также будем ее использовать.

А8. Для двух СО K и K', движущихся друг относительно друга **поступательно**, имеет место (нерелятивистский) **закон сложения скоростей**

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{U}\,, \tag{5.4}$$

где $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}'$ – скорости материальной точки относительно систем отсчета K и K' соответственно, $\vec{U}$ – скорость СО K' относительно СО K. Если K и K' – ИСО, то $\vec{U} \equiv \vec{V} = const$, и закон

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V} \tag{5.5}$$

можно получить, просто продифференцировав по времени (5.2) с учетом (5.1).

А9. Сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку массы m, сообщает ей ускорение $\vec{a}$ относительно ИСО, которое можно определить с помощью **второго закона Ньютона**. В некоторых системах единиц, например, СИ, второй закон записывается в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}\,. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) называют также **уравнением движения материальной точки**. Это фундаментальное уравнение механики. Оно **инвариантно относительно преобразования Галилея** (см. А6).

А10. При взаимодействии двух тел (материальных точек) силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, которыми они действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}' = -\vec{F}\,. \tag{5.7}$$

Приведённое утверждение – **это третий закон Ньютона**.

А11. Важнейшая физическая величина – импульс – определяется так.

Импульсом материальной точки называется произведение массы материальной точки на ее скорость,

$$\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}\,; \tag{5.8}$$

импульсом механической системы (сводящейся к набору конечного числа (n) материальных точек) называется физическая величина

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\,, \tag{5.9}$$

где $\vec{p}_i \equiv m_i \vec{\upsilon}_i$, i – номер материальной точки, пробегающий значения от 1 до n.

А12. Традиционная формулировка закона сохранения импульса:
импульс замкнутой системы сохраняется.

А13. Второй закон Ньютона можно записать как в форме (5.6), так и в форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{5.10}$$

5.2. Опыт Майкельсона. Принцип относительности Эйнштейна. Относительность одновременности

Переходя к релятивистской механике, прежде всего отметим следующее (**к истории вопроса**) – см [3].

Ньютон сформулировал закон инерции по отношению к одной, выделенной системе отсчета, покоящейся относительно **абсолютного пространства**. Максвелл и его современники считали, что основные уравнения электродинамики справедливы только в одной инерциальной системе отсчета, в такой, которая покоится относительно так называемого мирового эфира. Под эфиром понималась такая среда, которая является носителем оптических и электромагнитных процессов. Более того, мировой эфир считался носителем абсолютной системы отсчета, придавая смысл ньютонову абсолютному пространству.

Многочисленные эксперименты (прежде всего оптические – в силу наибольшей достигнутой здесь точности), выполненные на рубеже XIX–XX веков преследовали цель изучения эффектов, которые должны иметь место в любой инерциальной СО, движущейся относительно эфира. **В частности**, проводилось определение скорости света в ИСО, сопровождающей Землю, которая движется по круговой орбите вокруг Солнца. Указанная ИСО считается, таким образом, движущейся относительно эфира. Предполагалось, что закон сложения скоростей для светового сигнала аналогичен закону сложения скоростей (5.5) для материальной точки. Если скорость света относительно эфира равна c, то при измерении его скорости аппаратурой, неподвижной относительно земной поверхности, при различных направлениях распространения света должны получаться различные значения скорости. Это связано с тем, как говорят, что «эфирный ветер» сносит световую (электромагнитную) волну точно так же, как атмосферный ветер сносит волну акустическую. Ключевым экспериментом считается **опыт Майкельсона** (1881г.), с высокой точностью показавший, что скорость света относительно Земли не зависит от его направления распространения. Все выглядит таким образом, как будто никакого эфира (и соответственно эфирного ветра) в природе нет. Пытаясь примирить результат опыта Майкельсона с **общепризнанной** концепцией эфира, Лоренц на основе электронной теории сформулировал **гипотезу** о сокращении длин движущихся предметов в продольном (по скорости) направлении (т.н. **лоренцево сокращение**). Как было выяснено позже Эйнштейном, лоренцево сокращение действительно имеет место, но является эффектом **элементарным**, не требующим для его объяснения ни гипотезы эфира, не привлечения электронной теории.

Анализ результатов экспериментов и теоретических работ, прежде всего работ Лоренца и Пуанкаре, позволил Эйнштейну сформулировать в 1905 г. Основные положения специальной теории относительности (СТО).

Нерелятивистская физика, включающая механику Ньютона-Галилея, с хорошей точностью описывает процессы с характерными скоростями, малыми по сравнению со скоростью света в вакууме,

$$\upsilon \ll c. \tag{5.11}$$

При этом скорость распространения взаимодействий по умолчанию считается бесконечно большой.

Специальная теория относительности (СТО) – это в широком смысле физика рассматриваемых в ИСО процессов с произвольными возможными характерными скоростями, подчиненными **единственному физическому ограничению** (см. ниже)

$$\upsilon \le c, \tag{5.12}$$

причем скорость распространения взаимодействий этому ограничению также подчинена!

Нас здесь интересует механика СТО – **релятивистская механика**, – в которой действует лишь ограничение (5.12) и которая является, таким образом, обобщением ньютоновой (нерелятивистской) механики. Все результаты механики Ньютона-Галилея соответственно должны получаться из результатов механики СТО переходом к нерелятивистскому пределу (5.11). В дальнейшем мы постоянно уделяем внимание этому моменту.

Перечисляя далее **фундаментальные положения СТО**, будем обращаться к соответствующим положениям из приведенного в начале лекции нерелятивистского списка А1 – А13.

Определение инерциальной системы отсчета (ИСО) остается в силе. Таким образом, **первый закон Ньютона** формулируется в СТО точно так же, как и в нерелятивистской механике (см. А5).

Принцип относительности в СТО распространяется на **все** физические процессы (не только механические, см. А6):

- **все законы природы во всех инерциальных системах отсчета имеют один и тот же вид.**

В СТО отсутствует постулат об абсолютности времени (см. А2, равенство (5.1)). Как мы увидим, **одновременность** оказывается понятием **относительным**: события **(определение – то же**, А3), одновременные в одной ИСО, не одновременны в другой, и это подтверждается экспериментом. Многочисленные опытные данные (том числе опыт Майкельсона) позволяют сформулировать следующий **важнейший постулат**:

- **существует максимальная скорость распространения взаимодействий.**

В силу принципа относительности эта **максимальная скорость – одна и та же во всех ИСО**. Эксперимент подсказывает, что это не что иное, как скорость света (скорость распространения электромагнитной волны) в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Чаще всего постулат о существовании максимальной скорости так и формулируют:

- **скорость света в вакууме во всех ИСО одна и та же.**

Таким образом, никакая физическая скорость – скорость частицы, скорость распространения какого-либо сигнала – не может превышать c ни в какой ИСО; скорость **любого физического объекта в любой ИСО** подчинена ограничению (5.12), которое, как мы видим, представляет собой **постулат**.

Объединение принципа относительности с постулатом (5.12) называют **принципом относительности Эйнштейна**.

Преобразование координат и времени событий при переходе от одной ИСО к другой в СТО строится на основе принципа относительности Эйнштейна и, естественно, не совпадает с преобразованием Галилея (см. А7). Полученный из галилеева преобразования **нерелятивистский закон сложения скоростей** (5.5) также в области $\upsilon \sim c$ не работает. Прежде чем приступать к построению преобразования от одной ИСО к другой, обсудим понятие **одновременности**.

Пусть имеется платформа длины L, на концах которой расположены приемники светового сигнала $П_1$ и $П_2$, а точно в середине – лампочка *Л* (рис. 5.1 а). В ИСО K, относительно которой платформа покоится, при вспышке лампочки световые сигналы достигают приемников **одновременно**, через промежуток времени

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{L}{2c}. \qquad (5.13)$$

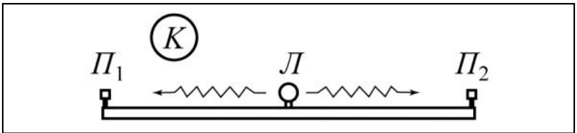


Рис. 5.1 а

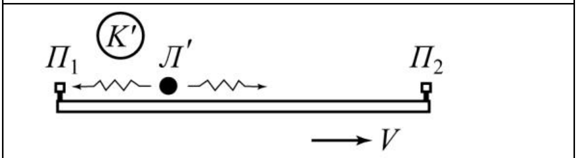


Рис. 5.1 б

В системе отсчета K', относительно которой платформа движется вправо со скоростью V, скорость светового сигнала также равна c. Приемник $П_1$ движется навстречу световому сигналу, а приемник $П_2$ – так, что световой сигнал его догоняет. За время $\Delta t_1'$ сигнал, пройдя расстояние $L_1' < L/2$, будет зафиксирован приемником $П_1$,

$$\Delta t_1' = \frac{L_1'}{c} < \Delta t_1 . \qquad (5.14)$$

Этот момент показан на рис. 5.1 б; здесь $Л'$ – положение лампочки в момент вспышки. Ясно, что за время $\Delta t_1'$ световой сигнал до приемника $П_2$ дойти не успеет – это произойдет позже. Таким образом, событие (регистрация светового сигнала приемниками $П_1$ и $П_2$), одновременные в ИСО K, не одновременны в K'.

Для определения моментов времени, когда происходят различные события в разных точках пространства, нужен набор **синхронизированных часов**. В [3] по этому поводу сказано следующее.

«Предположим, что мы находимся в некоторой инерциальной системе отсчета K, и в нашем распоряжении имеется большое количество стандартных часов, которые отсчитывают одинаковое время, если покоятся в одном и том же месте. Разместим эти часы в системе K везде, где нужно измерять время. Для синхронизации часов используем световые сигналы…

…Выберем в качестве центра синхронизации некоторую точку O системы K, из которой будем испускать во все стороны световые сигналы. Пусть часы в точке O в момент испускания сигнала показывают время t_0, в момент прихода сигнала в некоторую точку P часы в P поставим на время $t_0 + l_0/c$, где l_0 – расстояние OP, измеренное неподвижной измерительной линейкой. При этом все часы в системе K размещены определенным образом. Говорят, что два события в точках P и P_1 произошли одновременно, если часы в этих точках показывают одинаковое время. Такое определение одновременности является корректным, если можно показать, что в нем нет противоречий, для чего необходимо выполнение двух условий.

1. Сигнал, испущенный из точки O в момент времени $t_0+\tau$ (на τ сек. позже синхронизирующего сигнала), прибудет в точку P, когда часы в P покажут время $t_0+l_0/c+\tau$, т.е. также на τ сек. позже. Это значит, что метод синхронизации часов не зависит от времени регулировки.

2. Способ синхронизации не зависит от выбора точки O (центра синхронизации)…»

В [3] показано, что эти два условия всегда выполняются.

5.3. Интервал между двумя событиями. Инвариантность интервала относительно перехода в другую систему отсчета. Преобразование Лоренца.

Займемся теперь поиском **правила преобразования координат и времени события** при переходе от одной ИСО к другой. При этом сразу ограничимся частным случаем (упрощение непринципиальное) и будем искать преобразование, аналогичное **частному преобразованию Галилея** – системе (5.1), (5.3).

Пусть имеется две ИСО: K и K', причем (как и в А.7) координатные оси OX и $O'X'$ сонаправлены и совпадают, а OY и $O'Y'$, OZ и $O'Z'$ – сонаправлены; K' движется относительно K со скоростью V в направлении OX ($O'X'$) и начало отсчета времени в K и K', $t=0$, $t'=0$, выбрано в момент, когда начала отсчета (начала координат O и O') совмещены.

Событие определяется набором (t,x,y,z) в K и, соответственно, набором (t',x',y',z') в K'. Мы будем искать преобразование $(t',x',y',z')\to(t,x,y,z)$, **аналогичное частному**

галилееву, т.е. преобразование **линейное** и **однородное**. В нерелятивистском приближении оно должно совпадать с галилеевым. Ясно, что одной этой информации недостаточно. Вопрос о виде преобразования решает **постулат об инвариантности скорости света** по отношению к переходу $K' \to K$, точно так же, как постулат об инвариантности времени в нерелятивистской механике однозначно приводит к галилееву преобразованию.

Рассмотрим **новую** (и **очень важную!**) физическую величину.

Интервалом s_{12} между двумя событиями (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2) называется величина, квадрат которой определяется равенством

$$s_{12}^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 . \qquad (5.15)$$

Очевидно, s^2 может иметь любой знак, т.е. интервал между двумя событиями может оказаться чисто мнимым.

Если обозначить через l_{12} расстояние между двумя точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), то (5.15) можно переписать в виде

$$s_{12}^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2 . \qquad (5.16)$$

Световой сигнал, отправленный в момент t_1 из точки (x_1, y_1, z_1), приходит в точку (x_2, y_2, z_2) в момент t_2, пройдя за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ расстояние $l_{12} = c(t_2 - t_1)$, поэтому интервал между этими двумя событиями **равен нулю**. Но так получается во всех ИСО. Таким образом, если интервал между двумя событиями равен нулю в ИСО K, то он также равен нулю в любой другой ИСО K'.

Отсюда следует, что для двух произвольных событий, в силу того, что искомое преобразование координат и времени линейное, величина s^2 должна быть пропорциональна величине s'^2,

$$s^2 = k(|V|)s'^2 \tag{5.17}$$

с коэффициентом пропорциональности k, зависящим от величины относительной скорости систем отсчета K и K'. Но ИСО K и K' абсолютно равноправны, поэтому $k = 1$ и мы имеем для любых двух событий и любых двух ИСО K и K'

$$s^2 = s'^2. \tag{5.18}$$

Это равенство остается в силе при произвольном направлении скорости $\vec{V}$ системы K' относительно K.

Интервал между двумя событиями **является инвариантом** по отношению к переходу от одной ИСО к другой. **Инвариантность интервала** (5.18) – **математическое выражение инвариантности скорости света в вакууме**. Отметим, что интервал – величина аналогичная расстоянию между точками в пространстве.

Рассмотрим два события, которые в K определяются так: (0,0,0,0) и (t, x, y, z), а в K' – (0,0,0,0) и (t', x', y', z'). Равенство интервалов между этими событиями K и K' приводит к следующему результату. Искомое линейное преобразование времени и координат второго события должно удовлетворять условию (5.18), которое перепишется в виде

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \tag{5.19}$$

Будем считать очевидным, что частное преобразование не затрагивает поперечных координат: $y = y', z = z'$. Тогда вместо (5.19) имеем

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2\,. \qquad (5.20)$$

Преобразование $K' \to K$ определяется равенствами

$$t = \alpha t' + \beta x'\,, \qquad (5.21\text{ а})$$

$$x = \theta\, t' + \delta\, x'\,, \qquad (5.21\text{ б})$$

где $\alpha, \beta, \theta, \delta$ – неизвестные пока постоянные коэффициенты, зависящие от скорости V.

Подставляя (5.21) в (5.20), получаем

$$\begin{aligned} &c^2\left(\alpha^2 t'^2 + 2\alpha\beta\, t'x' + \beta^2 x'^2\right) - \left(\theta^2 t'^2 + 2\theta\delta\, t'x' + \delta^2 x'^2\right) - \\ &-\left(c^2 t'^2 - x'^2\right) = 0 \end{aligned}\,. \qquad (5.22)$$

Это равенство должно выполняться тождественно, т.е. при произвольных t', x'. Поэтому коэффициенты при t'^2, $t'x'$ и x'^2 в левой части (5.22) равны нулю, откуда следует

$$c^2\alpha^2 - \theta^2 - c^2 = 0\,, \qquad (5.23\text{ а})$$

$$2c^2\alpha\beta - 2\theta\delta = 0\,, \qquad (5.23\text{ б})$$

$$c^2\beta^2 - \delta^2 + 1 = 0\,. \qquad (5.23\text{ в})$$

Недостающее уравнение получим, рассмотрев движения начала отсчета O' системы K' относительно системы K. С одной стороны, O' движется в K по (заданному) закону:

$$x = Vt\,. \tag{5.24}$$

С другой, совпадение начала O' с определенной точкой пространства в определенный момент времени – это событие, описываемое набором $(t', 0, 0, 0)$ в K' и набором $(t, x, 0, 0)$ в K. Подставив в (5.21) $x' = 0$ и поделив (5.21 б) на (5.21 а), с учетом (5.24) получаем

$$\theta = \alpha V\,. \tag{5.25}$$

Система (5.23), (5.25) достаточна для вычисления коэффициентов преобразования (5.21). Они выражаются так:

$$\alpha = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2},\ \beta = \alpha V/c^2,\ \ \theta = \alpha V,\ \delta = \alpha. \qquad \text{(5.26 а,б,в,г)}$$

Мы, таким образом, получили преобразования времени и координат события в виде

$$t = \frac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},\ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}},\ y = y',\ z = z'\,. \qquad \text{(5.27 а,б,в,г)}$$

Полученное нами преобразование (5.27) называется **преобразованием Лоренца**, точнее, **частным преобразованием Лоренца**.

Легко видеть, что оно обладает следующими свойствами.

1). При $V > c$ знаменатели в (5.27 а,б) становятся мнимыми и преобразование теряет смысл (в полном соответствии с основным постулатом).

2). В нерелятивистском пределе $V \ll c$ (5.27) переходит в частное преобразование Галилея.

Преобразование (5.27) описывает переход $K' \to K$. Обратное преобразование получается легко: нужно в (5.27) поменять штрихованные величины на нештрихованные и, наоборот, а также сделать замену $V \to -V$:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z. \quad (5.28\ \text{а,б,в,г})$$

5.4 Следствия преобразования Лоренца. Сокращение длин. Запаздывание движущихся часов. Релятивистский закон сложения скоростей.

Теперь сформулируем и обсудим важнейшие следствия преобразования Лоренца.

1. Сокращение длин (лоренцево сокращение).

Рассмотрим стержень, покоящийся в системе K' и расположенный на оси $O'X'$ (или параллельно ей). Координаты концов стержня – x_1' и x_2', причем (будем считать) $x_2' > x_1'$. В системе K стержень движется со скоростью V и в некоторый момент времени t его концы имеют координаты x_1 и x_2 соответственно. Связь между координатами концов в K и K' определяется равенством (5.28 б). Запишем его два раза:

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (5.29\ \text{а,б})$$

Вычитая (5.29 а) из (5.29 б), получим

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (5.30)$$

Но $(x'_2 - x'_1)$ – это длина стержня в K', относительно которой он покоится, а $(x_2 - x_1)$ – длина стержня, измеренная в некоторый момент времени t в системе отсчета K, т.е. длина движущегося со скоростью V стержня. Обозначив первую через l_0, а вторую через l, вместо (5.30) получаем

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \qquad (5.31)$$

Формула (5.31) описывает сокращение движущихся предметов (тел) в направлении движения (лоренцево сокращение).

Поперечные размеры тела в K и K' одинаковы, поэтому объем движущегося тела сокращается в соответствии с тем же законом (5.31), что и его продольные размеры.

Выскажем одно замечание (см. [3]).

«… При выводе формулы (5.31) использовалось понятие одновременности (координаты концов стержня x_1 и x_2 должны измеряться одновременно), но как указывал еще Эйнштейн, эту формулу можно проверить экспериментально и без использования часов. Рассмотрим два стержня с одной и той же **собственной длиной** l_0, движущихся в системе K со скоростями V и $(-V)$. Поскольку длина зависит лишь от квадрата скорости, то стержни имеют в системе K одинаковую длину l, поэтому в некоторый момент времени t эти стержни будут совпадать, и совпадение двух концов стержней в двух системах отсчета – это два одновременных события в данной инерциальной системе K. Пусть эти два события произошли в

точках A и B. Тогда измеренное стандартной линейкой расстояние AB дает искомую величину l.
…данное рассмотрение показывает, что лоренцево сокращение есть реальный эффект, в принципе наблюдаемый. Этот эффект в то же время выражает не столько свойство движущегося стержня, сколько взаимосвязь движущихся друг относительно друга измерительных линеек…»

Как уже упоминалось, лоренцево сокращение – эффект элементарный, т.е. фундаментальный. Можно обсуждать его происхождение (принцип относительности Эйнштейна), но свести эффект непосредственно к чему-то более простому – нельзя.

2. Запаздывание движущихся часов (замедление хода движущихся часов).

Пусть два события происходят в одной точке (x', y', z') в системе K' в моменты времени t_1' и t_2', $t_2' > t_1'$. В системе K эти события происходят в моменты t_1 и t_2 соответственно в разных точках пространства. Связь между t_1' и t_1, t_2' и t_2 определяется равенством (5.27 а):

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (5.32 \text{ а,б})$$

Вычитая (5.32 а) из (5.32 б), получим

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (5.33)$$

где $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ – интервал времени между событиями в ИСО K', а $\Delta t = t_2 - t_1$ – временной интервал между теми же событиями в системе K; промежуток времени $\Delta t'$ показывают часы, неподвижные относительно K' и **движущиеся** относительно системы K. Очевидно,

$$\Delta t' < \Delta t, \tag{5.34}$$

и, как говорят, движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Время, измеренное часами, неподвижными относительно некоторого физического объекта, т.е. движущимися вместе с физическим объектом, например, с каким-либо телом, называется **собственным временем физического объекта**.

Эффект замедления времени подтверждается фактами из жизни нестабильных частиц. Нестабильная частица рождается в некоторый момент времени и, спустя определенный промежуток времени, распадается. Указанный промежуток между этими двумя событиями – рождением и распадом – называется временем жизни частицы. Для частиц определенного сорта время жизни – величина статистическая, поэтому говорят о **среднем времени жизни частицы**. Среднее время жизни **мюонов**, измеренное в ИСО, относительно которой они покоятся или движутся с малыми ($\upsilon << c$) скоростями, составляет $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с. Известно, что эти частицы имеются в составе космических лучей. Они образуются на высоте 20–30 км и значительное их количество успевает достигнуть земной поверхности. Даже при скорости очень близкой к скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, за время $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с частица прошла бы расстояние порядка 600 м. То, что мюоны успевают долететь до земной поверхности, объясняется тем фактом, что в СО, связанной с Землей, их время жизни τ, определяемое равенством

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{5.35}$$

существенно превышает собственное время жизни τ_0. На основе приведенных цифр, кстати говоря, нетрудно оценить скорость мюонов относительно Земли.

3. Релятивистский закон сложения скоростей.

Для вывода закона сложения скоростей в релятивистской кинематике рассмотрим два бесконечно близких события, связанных с движущейся материальной точкой (частицей). В системе K' в некоторый момент t' частица проходит точку с координатами (x', y', z'), а в бесконечно близкий момент $t' + dt'$ она, совершив бесконечно малое перемещение, оказывается в точке $(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$. В системе отсчета K имеем соответственно t, $t + dt$ и (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Перепишем преобразование Лоренца (5.27) для второго события:

$$t + dt = \frac{t' + dt' + \frac{V}{c^2}(x' + dx')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x + dx = \frac{x' + dx' + V(t' + dt')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.36 а,б}$$

$$y + dy = y' + dy', \quad z + dz = z' + dz'. \tag{5.36 в,г}$$

Вычитая из равенств (5.36) соответствующие равенства (5.27), получим:

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \; . \qquad (5.37а,б,в,г)$$

Используя определение скорости

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \; \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \; \upsilon_z = \frac{dz}{dt} \qquad (5.38\ а,б,в)$$

относительно системы K и аналогичное определение для K', поделив на (5.37а) последовательно равенства (5.37б), (5.37в) и (5.37г), получаем соответственно

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}}, \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}}, \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\upsilon'_x}{c^2}} \; . \qquad (5.39\ а,б,в)$$

Это и есть искомый **закон сложения скоростей** – закон преобразования скорости $\vec{\upsilon}' \to \vec{\upsilon}$ при переходе от одной ИСО к другой, $K' \to K$.

Отметим, следующие свойства закона (5.39).

1). При $V > c$ закон теряет смысл (в соответствии с постулатом).

2). В нерелятивистском приближении $V \ll c$, $\upsilon \ll c$ получаем нерелятивистский закон сложения скоростей (соответствующий частному преобразованию Галилея):

3).

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + V, \; \upsilon_y = \upsilon'_y \, , \; \upsilon_z = \upsilon'_z \, . \qquad (5.40\ а,б,в)$$

4). Если скорость физического объекта в системе K' равна c – например, $\upsilon'_x = c$, $\upsilon'_y = 0$, $\upsilon'_z = 0$, – то из (5.39) получаем: $\upsilon_x = c$, $\upsilon_y = 0$, $\upsilon_z = 0$; т.е. скорость объекта в K **также** равна c (как и должно быть – по постулату).

5). Можно показать, что при $\upsilon' \le c$ закон (5.39) всегда приводит к результату $\upsilon \le c$.

6). Преобразование $\vec{\upsilon} \to \vec{\upsilon}'$, обратное (5.39), получается заменой штрихованных величин на нештрихованные и наоборот с одновременной заменой V на $(-V)$.

ГЛАВА 6

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО). РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

6.1. Масса материальной точки (частицы). Второй закон Ньютона и закон сохранения импульса: необходимость переопределения импульса в релятивистской динамике.

В нерелятивистской механике масса m материальной точки (частицы) является инвариантом преобразования Галилея, т.е. эта величина одна и та же во всех инерциальных системах отсчета (ИСО). Инвариантность массы – **постулат**, алгоритм определения массы содержит ссылку на опытные данные [1]. В любом справочнике можно, например, найти массу покоя электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

В релятивистской механике СТО под массой частицы понимают **эту же самую** (определенную по нерелятивистской процедуре) **величину**: масса – мера инертности, неотрицательный параметр частицы, **один и тот же во всех ИСО, т.е. инвариантный относительно преобразования Лоренца**.

Уравнение движения частицы в виде

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{5.6}$$

(см. ГЛАВА 5, А9), однако, **в релятивистской области не работает**, и в этом нетрудно убедиться.

Рассмотрим движение электрона в постоянном однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}$. Заряд электрона равен $(-e)$, где элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Вместо (5.6) пишем

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = (-e)\vec{E}\,. \tag{6.1}$$

Уравнение (6.1) легко интегрируется:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 - \frac{e}{m_e}\vec{E}t\,. \tag{6.2}$$

Если электрон в начальный момент времени покоился ($\upsilon_0 = 0$), то зависимость величины его скорости от времени определяется равенством

$$\upsilon(t) = \frac{e}{m_e}Et\,. \tag{6.3}$$

Подставив в (6.3) $E = 1\text{МВ/м} = 10^6$ В/м – вполне реальное поле в вакууме, – при $t = 2\text{нс} = 2 \cdot 10^{-9}$ с получаем $\upsilon \approx 3{,}52 \cdot 10^8$ м/с, т.е. $\upsilon > c$!

Мы приводили еще одну версию уравнения движения (см. А13):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{5.10}$$

где $\vec{p}$ – импульс частицы. Но при том определении импульса, которое сформулировано в нерелятивистской механике (см. А11, ГЛАВА 5),

$$\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}, \tag{5.8}$$

уравнение (5.10) **эквивалентно** (5.6). Таким образом, мы поставлены перед альтернативой: либо мы остаемся **без второго закона Ньютона (!)**, либо следует «подправить» определение импульса так, чтобы уравнение движения (5.10) работало в релятивистской области. Мы как бы пока забыли про силу $\vec{F}$, но рассуждаем, тем не менее, правильно.

Непригодность определения импульса (5.8) в релятивистской области проявляется еще и в том, что **фундаментальный закон сохранения импульса** (следствие однородности пространства в ИСО) оказывается неинвариантным относительно преобразования Лоренца, т.е. определение (5.8) создает ситуацию, когда в одной ИСО импульс замкнутой системы сохраняется, а в другой ИСО – нет. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим (см. [1]), как выглядит в ИСО K и K' абсолютно неупругое столкновение двух материальных точек с одинаковыми массами m. Это могут быть одинаковые шары или одинаковые атомы, объединяющиеся при столкновении в молекулу.

Пусть в СО K материальные точки движутся друг навстречу другу вдоль оси OX с одинаковыми по величине скоростями υ_0, проекции скоростей на ось OX равны:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_0, \quad \upsilon_{2x} = -\upsilon_0. \qquad (6.4\ \text{а,б})$$

При этих условиях после столкновения они будут покоиться:

$$u_{1x} = 0, \quad u_{2x} = 0. \qquad (6.5\ \text{а,б})$$

Оставим в силе определение импульса системы (5.9) как векторной суммы импульсов материальных точек, входящих в ее состав. Тогда импульс системы и до и после столкновения равен нулю – в СО K импульс сохраняется.

Теперь рассмотрим этот процесс в СО K', полагая, что она движется относительно K в направлении оси OX со скоростью

$$V = \upsilon_0. \qquad (6.6)$$

Используя релятивистский закон сложения скоростей (точный), для преобразования $\upsilon_x \to \upsilon'_x$ запишем

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x V / c^2} = \frac{\upsilon_x - \upsilon_0}{1 - \upsilon_x \upsilon_0 / c^2}. \qquad (6.7)$$

Отсюда получаем, подставляя в (6.7) значения (6.4) и (6.5):

$$\upsilon'_{1x} = 0, \ \upsilon'_{2x} = -\frac{2\upsilon_0}{1 + \upsilon_0^2 / c^2}, \qquad (6.8\ \text{а,б})$$

$$u'_{1x} = -\upsilon_0,\ u'_{2x} = -\upsilon_0. \qquad (6.9\ \text{а,б})$$

В системе отсчета K' проекция импульса системы на ось OX до столкновения

$$P'_x(\text{до}) = m\upsilon'_{1x} + m\upsilon'_{2x} = -\frac{2m\upsilon_0}{1+\upsilon_0^2/c^2}, \qquad (6.10)$$

а после столкновения

$$P'_x(\text{после}) = mu'_{1x} + mu'_{2x} = -2m\upsilon_0. \qquad (6.11)$$

Импульс в системе K' не сохраняется.

Формальной причиной неинвариантности закона сохранения импульса явился тот неправильный закон преобразования проекции импульса материальной точки, который мы использовали, опираясь на **хороший** закон сложения скоростей и **нехорошее** определение (5.8).

6.2. Релятивистский импульс (импульс релятивистской частицы).

Для переопределения импульса материальной точки перепишем «старое» определение (5.8) в виде

$$\vec{p} \equiv m\frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (6.12)$$

В правой части у нас – произведение инвариантной массы на производную радиуса-вектора по **инвариантному времени**.

Когда физическая величина конструируется из других величин, то закон преобразования этой величины при переходе от одной ИСО к другой определяется, в частности, законами преобразования элементов конструкции. Чем плохо – с этой точки зрения – определение (6.12)? – А тем, что при переходе от нерелятивистского случая к релятивистскому **качественно** меняется закон преобразования величины dt: теряется инвариантность этой величины. Таким образом, dt – слабое место определения (6.12). Хорошо было бы в новом (релятивистском) определении импульса **заменить** dt **инвариантом**, который является бесконечно малой первого порядка, имеет размерность времени и в нерелятивистском пределе обращается в dt. Оказывается, такой инвариант есть: это величина ds/c, где ds – интервал между двумя бесконечно близкими событиями (t,x,y,z) и $(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$. Первое из них (как уже упоминалось) состоит в том, что движущаяся материальная точка в момент t проходит точку пространства (x,y,z), а второе – появление материальной точки в момент $t+dt$ в точке с координатами $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$.

Для двух **произвольных** бесконечно близких событий определение интервала (см. ГЛАВУ 5, (5.15)) запишется так:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \qquad (6.13)$$

Если dl – расстояние между близкими точками в пространстве, то $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, и можно переписать (6.13) в виде, аналогичном (1.16):

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 . \qquad (6.14)$$

Для движущейся материальной точки (частицы) $dl = |d\vec{r}|$, где $d\vec{r}$ – бесконечно малое ее перемещение за промежуток времени dt, поэтому

$$dl^2 = (d\vec{r})^2 = (\vec{\upsilon}dt)^2 = \upsilon^2dt^2 . \qquad (6.15)$$

Отсюда

$$ds^2 = \left(c^2 - \upsilon^2\right)dt^2 . \tag{6.16}$$

Величина ds^2 в (6.16) всегда неотрицательна ($\upsilon \le c$), и можно записать

$$\frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}dt . \tag{6.17}$$

Инвариант в левой части (6.17) действительно обладает всеми необходимыми свойствами, которые мы перечислили выше.

Итак, выполняя в старом определении импульса (5.8) замену

$$dt \to \frac{ds}{c}, \tag{6.18}$$

Мы приходим к **определению релятивистского импульса материальной точки** (частицы) – релятивистского обобщения импульса (5.8):

$$\vec{p} \equiv mc\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} . \tag{6.19}$$

Проекции релятивистского импульса на координатные оси имеют вид:

$$p_x = mc\frac{dx}{ds} = \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad p_y = mc\frac{dy}{ds} = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$
$$p_z = mc\frac{dz}{ds} = \frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (6.20 \text{ а,б,в})$$

где $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$.

С импульсом (6.19), (6.20) все обстоит благополучно: **закон сохранения импульса инвариантен относительно преобразования Лоренца, уравнение движения (5.10) работает при любых $\upsilon < c$.**
Вернемся к примеру с ускоряющимся электроном. Запишем (5.10):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E}. \qquad (6.21)$$

Отсюда, после интегрирования, получаем

$$\vec{p} = \vec{p}_0 - e\vec{E}t. \qquad (6.22)$$

При начальном условии $\vec{p}_0 = 0$ для величины импульса имеем

$$p(t) = eEt, \qquad (6.23)$$

так что зависимость величины скорости электрона от времени выражается равенством

$$\frac{m_e\upsilon(t)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2(t)}{c^2}}}=eEt\,, \qquad (6.24)$$

откуда находим:

$$\upsilon(t)=c\frac{eEt}{\sqrt{(eEt)^2+(m_e c)^2}}\,. \qquad (6.25)$$

Из формулы (6.25) видно, что при всех конечных t получается $\upsilon(t)<c$, как и должно быть. Сравните этот результат с (6.3).

6.3. Равноправие $ct, x, y, z.$ Релятивистская энергия частицы. Связь между энергией и импульсом. Уравнение баланса энергии. Энергия покоя. Формула Эйнштейна. Эквивалентность массы и энергии.

Отметим следующее. Конструкцию $d\vec{r}/ds$, входящую в определение релятивистского импульса $\vec{p}$, а также величины dx/ds, dy/ds, dz/ds, – проекции $d\vec{r}/ds$ на координатные оси, – можно рассматривать как производные радиуса-вектора частицы и ее координат по интервалу s. Речь вот о чем.

Положение частицы в данный момент времени можно **изобразить точкой в четырехмерном пространстве событий (*ct*, *x*, *y*, *z*)**. Мы взяли ct вместо t, чтобы все величины, характеризующие событие, имели одну размерность – размерность длины. Пусть в некоторый момент времени t_0 частица находится в точке пространства (x_0, y_0, z_0). В пространстве событий этому соответствует **изображающая точка** $M_0(ct_0, x_0, y_0, z_0)$. При движении частицы изображающая точка движется вдоль некоторой линии L в четырехмерном пространстве событий, которая **однозначно определяется законом движения частицы** $(x(t), y(t), z(t))$. Интервал s между событиями $M_0(ct_0, x_0, y_0, z_0)$ и $M(ct, x, y, z)$ можно вычислить как интеграл вдоль кривой L

$$s = \int_{M_0}^{M} ds\,. \qquad (6.26)$$

При фиксированной точке M_0 каждой $M(ct, x, y, z)$ соответствует одно определенное значение s. Для разных точек эти значения различны, поскольку для каждого бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ за бесконечно малое dt имеем $ds > 0$ (мы полагаем $\upsilon < c$). Таким образом, при заданном законе движения величина s является параметром, перечисляющим изображающие точки в пространстве событий. Наоборот, кривую в пространстве событий, проходящую через фиксированную точку M_0, можно задать параметрически

$$ct = ct(s), \;\; x = x(s), \;\; y = y(s), \;\; z = z(s). \qquad (6.27\ а,б,в,г)$$

Ясно, что (6.27) не что иное, как параметрически заданный закон движения частицы. Так что величины типа dx/ds – это производные функций (6.27).

Система (6.27) в явном виде указывает на равноправие времени и координат в релятивистской теории. Если мы хотим быть последовательными, нам необходимо вместе с величинами $p_x,\ p_y,\ p_z$, содержащими производные функций (6.27 б,в,г), ввести в рассмотрение величину $mc\cdot d(ct)/ds$ с производной функции (6.27 а). Однако, как оказывается, значительно больший интерес представляет величина, определяемая равенством

$$\mathrm{E} \equiv mc^2 \frac{d(ct)}{ds} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \,. \tag{6.28}$$

Она называется **релятивистской энергией** частицы (материальной точки).

Обсудим свойства введенной нами величины и связь ее с величинами уже известными.

Нетрудно убедиться в том, что из энергии E и релятивистского импульса можно составить очень простую комбинацию, являющуюся **лоренц-инвариантом**:

$$\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = (mc)^2 = inv \,. \tag{6.29}$$

Связь между скоростью $\vec{\upsilon}$ частицы, ее импульсом $\vec{p}$ и энергией E определяется (см. (6.19), (6.28)):

$$\vec{p} = \frac{\mathrm{E}}{c^2}\vec{\upsilon} \,. \tag{6.30}$$

Если на частицу действует сила $\vec{F}$, то энергия частицы должна изменяться, причем это изменение за любой бесконечно малый промежуток времени должно быть равно работе δA на соответствующем бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$:

$$d\mathrm{E} = \delta \mathrm{A} = \vec{F} d\vec{r} \,. \tag{6.31}$$

Дифференцируя (6.29), получаем

$$\frac{\mathrm{E}}{c^2}d\mathrm{E} = \vec{p}d\vec{p}\,. \tag{6.32}$$

Выразив импульс $\vec{p}$ с помощью (6.30) и переписав уравнение движения (5.10) в виде

$$d\vec{p} = \vec{F}dt\,, \tag{6.33}$$

получаем вместо (6.32):

$$d\mathrm{E} = \vec{\upsilon}\vec{F}dt\,. \tag{6.34}$$

Равенство (6.34) совпадает с уравнением баланса энергии (6.31). Отметим, что скалярное произведение $\vec{\upsilon}\vec{F}$ в (6.34) – это мощность силы $\vec{F}$.

Таким образом, введенная определением (6.28) физическая величина имеет размерность энергии и удовлетворяет уравнению баланса энергии. Стало быть, **это и есть энергия**, вряд ли у кого-нибудь остались сомнения, несмотря на «необычный» вид выражения (6.28).

Скорость одной ИСО относительно другой – это скорость, с которой движется **тело отсчёта.** Она не может быть ни больше c, ни даже равной c. Во втором случае релятивистская энергия тела отсчёта, а также релятивистские энергии приборов: часов, масштабных линеек и т.д., – были бы бесконечно большими. Поэтому во всех случаях для скорости движения одной ИСО относительно другой имеем:

$$\left|\vec{V}\right| < c\,.$$

Особо отметим то обстоятельство, что **покоящаяся частица** (материальная точка) **обладает отличной от нуля энергией**:

$$E_0 = mc^2. \qquad (6.35)$$

Эта величина называется **энергией покоя**. Формула (6.35) – знаменитая формула Эйнштейна, она определяет внутреннюю энергию частицы (материальной точки), не связанную с ее движением. Можно сказать так, что это энергия, которой частица обладает только вследствие того, что она существует. Физический смысл энергии покоя, скажем, для элементарной частицы определяется так: это минимальная энергия, необходимая для создания (рождения) частицы. Если в каких-то процессах освобождаются энергии, меньшие E_0, то в таких процессах данные частицы не рождаются.

Формула (6.35) применима и к неэлементарным физическим объектам: атомам, телам, состоящим из большого числа атомов и т.д. – во всех случаях E_0 определяется для покоящегося в целом объекта. Но в соответствующей системе отсчета энергии, связанные с движением элементов объекта, и энергия их взаимодействия между собой также включаются в энергию покоя E_0 наряду с суммой энергий покоя элементов. Например, в энергию покоя тела включается сумма кинетических энергий движущихся атомов (или молекул) и энергия их взаимодействия. Горячее покоящееся тело имеет б*о*льшую энергию и массу, чем это же тело после остывания. Энергия покоя и масса возбужденного атома больше, чем энергия и масса того же атома, находящегося в основном состоянии. Масса покоя ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов (**дефект масс**). Энергия покоя ядра равна сумме энергий покоя нуклонов плюс энергия их взаимодействия; последняя отрицательна и равна энергии связи, взятой со знаком «–».

Из сказанного следует что, **масса целого, вообще говоря, не равна сумме масс составляющих его элементов, и закон сохранения массы в природе отсутствует.** Это касается и энергии покоя.

Простая взаимосвязь между массой и энергией покоя, выражаемая формулой Эйнштейна (6.35), трактуется как **эквивалентность массы и энергии**.

6.4. Кинетическая энергия частицы. Теорема о кинетической энергии.

Кинетической энергией частицы (материальной точки) в релятивистской механике называется величина

$$T \equiv \mathrm{E} - \mathrm{E}_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{6.36}$$

Отметим, что после замены $d\mathrm{E}$ на dT уравнение баланса энергии (6.31) приобретает вид **теоремы о кинетической энергии**.

Разложение скобки в правой части (6.36) в степенной ряд по малому параметру $\delta = \upsilon^2 / c^2$ дает:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\delta}} - 1 = \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + \ldots. \tag{6.37}$$

Если ограничиться первым слагаемым в разложении (6.37), то из (6.36) получаем известное нерелятивистское выражение

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{6.38}$$

6.5. Релятивистская масса частицы. Частицы с нулевой массой.

В некоторых разделах физики удобно использовать так называемую **релятивистскую массу** m_r:

$$m_r \equiv \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.39}$$

Выражения для релятивистского импульса и релятивистской энергии при использовании m_r оказываются совсем простыми:

$$\vec{p} = m_r\vec{\upsilon}, \tag{6.40}$$

$$\mathrm{E} = m_r c^2. \tag{6.41}$$

Та инвариантная масса, которую мы ввели с самого начала, в текстах, содержащих m_r, называется **массой покоя** и обозначается m_0.

Допустим, мы рассматриваем движение частицы с зарядом q и массой $m \equiv m_0$ в магнитном поле индукцией $\vec{B}$. На частицу действует сила Лоренца

$$\vec{F}_л = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]. \tag{6.42}$$

Мощность ее равна нулю, и мы получаем из уравнения (6.34) $\mathrm{E} = const$, откуда следует $m_r = const$. Это позволяет записать уравнение движения (5.10) в **«нерелятивистской»** форме

$$m_r \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] \qquad (6.43)$$

и рассматривать задачу как формально нерелятивистскую с поправкой на то, что масса частицы m_r не совпадает с ее массой покоя.

Отметим, что формально совпадающее с формулой Эйнштейна (6.35) соотношение (6.41) часто также называют формулой Эйнштейна и говорят об эквивалентности массы и энергии, имея в виду связь (6.41) между релятивистской энергией и релятивистской массой.

Релятивистская масса m_r не инвариантна относительно преобразования Лоренца. Поэтому она так раздражает специалистов, работающих в области физики элементарных частиц, – они этой величиной не пользуются.

В природе существуют очень интересные объекты – **частицы с нулевой массой**. Примером такой частицы является **фотон** – квант электромагнитного излучения. Выражение для релятивистской энергии

$$\mathrm{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (6.28)$$

показывает, что она может быть отличной от нуля при $m = 0$ только в том случае, если скорость частицы (всегда, относительно любой инерциальной системы отсчета!) равна c. На это обстоятельство указывает и выражение для релятивистского импульса. Итак, мы делаем вывод:

- **Частицы с нулевой массой движутся со скоростью c относительно любой инерциальной системы отсчета**.

Связь между импульсом и энергией для таких частиц имеет очень простой вид (см. (6.29)):

$$p = \frac{\mathrm{E}}{c}. \tag{6.44}$$

Энергия фотона определяется известной формулой Планка:

$$\mathrm{E} = \hbar\omega, \tag{6.45}$$

где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка (лоренц-инвариант!), ω – циклическая частота излучения. Импульс фотона определяется равенством

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \tag{6.46}$$

где $\vec{k}$ – т.н. волновой вектор; направление $\vec{k}$ совпадает с направлением движения фотона (направление распространения излучения), а его модуль выражается через длину волны излучения λ:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{6.47}$$

Величины ω и k связаны равенством

$$\frac{\omega}{k} = c. \tag{6.48}$$

Нетрудно убедиться в том, что энергия E (6.45) и импульс $\vec{p}$ (6.46) фотона удовлетворяют равенству (6.44), поэтому можно, например, написать:

$$p = \hbar\omega / c. \tag{6.49}$$

Иногда вводят в рассмотрение релятивистскую массу фотона

$$m_r = \mathrm{E} / c^2 = \hbar\omega / c^2. \tag{6.50}$$

Известные эффекты отклонения светового луча в гравитационном поле или уменьшение частоты излучения при распространении света противоположно направлению гравитационного поля объясняют, например, так. В силу **принципа эквивалентности** фотон обладает отличной от нуля гравитационной массой, равной его инертной массе (6.50):

$$m_g = m_r. \tag{6.51}$$

Поэтому гравитационное поле на него действует: в первом из рассмотренных эффектов – изменяет направление импульса, во втором – уменьшает его по величине, «тормозит» фотон, что приводит к уменьшению энергии (а не скорости!) и – соответственно – частоты.

6.6. Законы преобразования энергии и импульса при переходе от одной инерциальной системы отсчёта – к другой.

Последний вопрос, который мы рассмотрим в этой лекции, связан с **законами преобразования энергии** E **и проекций импульса** $\vec{p}$ **частицы** при переходе от одной ИСО к другой. Этот вопрос – чрезвычайно важный – решается, тем не менее, чрезвычайно просто. Выпишем здесь определения величин E, p_x, p_y, p_z еще раз (см. (6.20) и (6.28)):

$$\mathrm{E} \equiv mc^3 \frac{dt}{ds}, \quad p_x = mc \frac{dx}{ds}, \quad p_y = mc \frac{dy}{ds}, \quad p_z = mc \frac{dz}{ds}. \quad \text{(6.52 а,б,в,г)}$$

Фигурирующие в (6.52) величины m, c, ds – инварианты. Поэтому очевидно, что закон преобразования E совпадает с законом преобразования dt, p_x преобразуется, как dx, p_y – как dy, а p_z – как dz. Но формулы, определяющие преобразования величин dt, dx, dy и dz нам известны, мы их вывели в ГЛАВЕ 5 (см. (5.37)). Воспользуемся этими формулами. Рассмотрим, например, величину E. Нам понадобится в данном случае закон преобразования dt:

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (5.37 \text{ а})$$

Выражая dt, dt' и dx' с помощью (6.52 а,б):

$$dt = \frac{\mathrm{E}}{mc^3} ds, \; dt' = \frac{\mathrm{E}'}{mc^3} ds, \; dx' = \frac{p'_x}{mc} ds, \qquad (6.53 \text{ а,б,в})$$

– и подставляя эти выражения в (5.37а), получим после сокращения

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (6.54 \text{ а})$$

Действуя аналогично, находим

$$p_x = \frac{p'_x + \dfrac{V}{c^2}\mathrm{E}'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z. \qquad (6.54\ б,в,г)$$

Полученные равенства (6.54) определяют **закон преобразования энергии и импульса частицы**.

Этот закон распространяется и на частицы с нулевой массой. Изменение, скажем, энергии фотона при переходе в другую ИСО, означает изменение частоты ω при таком переходе. Это – известный эффект Доплера, который мы теперь вполне можем описать.

Следует подчеркнуть, что законы преобразования физических величин при переходе от одной ИСО к другой, которые мы внимательно исследовали как в первой, так и во второй лекциях, помимо прочего, имеют еще и большую практическую значимость. Знание законов преобразования позволяет при решении конкретной задачи **выбрать удобную систему отсчета**. С формальной точки зрения эти законы предоставляют возможность использования замены переменных, без чего, скажем, никакую сколько-нибудь интересную научную задачу решить нельзя.

Особую роль в теории играют инвариантные величины – лоренц – инварианты, т.е. величины, имеющие одно и то же значение во всех ИСО. Примеры таких величин (напомним): скорость света в вакууме, интервал между двумя событиями, масса частицы; добавим в этот список электрический заряд частицы. В конечном счёте закон преобразования физической величины при переходе в другую систему отсчёта, в частности, факт её инвариантности, устанавливается на основе той информации о физической величине, которая получена **опытным путём**.

Отметим в заключение следующее.

Третий закон Ньютона в релятивистской механике не выполняется: он запрещен постулатом СТО о конечности скорости распространения взаимодействий.

Специальная теория относительности в настоящее время является общепризнанной и в таких разделах, как ядерная физика, физика элементарных частиц, физика космических лучей – используется как стандартный аппарат научных исследований.

Приложение №1

Интегрирование уравнения поперечного движения (2.83 б)

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_{\perp}}{dt} = q\left[\vec{\upsilon}_{\perp}, \vec{B}\right]$$

дает

$$m\vec{\upsilon}_{\perp} = q\left[\vec{r}_{\perp}, \vec{B}\right] + \vec{C}_{\perp}, \qquad (\text{П } 1)$$

где $\vec{C}_{\perp}$ – произвольный вектор, перпендикулярный силовым линиям магнитного поля, т.е. поперечный. Мы можем, впрочем, написать просто $\vec{C}$, имея в виду

$$\vec{C} = \vec{C}_{\parallel} + \vec{C}_{\perp}, \qquad (\text{П } 2)$$

но тогда из уравнения (П 1) немедленно получаем $\vec{C}_{\parallel}=0$.

Оказывается, в поперечной плоскости движения частицы можно для любого $\vec{C}_{\perp}$ подобрать точку C, так чтобы радиус вектор $\vec{r}_{\perp c}$ этой точки удовлетворял равенству

$$\vec{C}_{\perp} = -q\left[\vec{r}_{\perp c}, \vec{B}\right]. \qquad (\text{П } 3)$$

Найдем $\vec{r}_{\perp c}$. Для этого умножим уравнение (П 3) на $\vec{B}$ векторно:

$$\left[\vec{B}, \vec{C}_{\perp}\right] = -q\left[\vec{B}\left[\vec{r}_{\perp c}, \vec{B}\right]\right]. \qquad (\text{П } 4)$$

Отсюда

$$\left[\vec{B}, \vec{C}_\perp\right] = -qB^2 \cdot \vec{r}_{\perp c}. \qquad \text{(П 5)}$$

Таким образом,

$$\vec{r}_{\perp c} = \frac{\left[\vec{C}_\perp, \vec{B}\right]}{qB^2}, \qquad \text{(П 6)}$$

т.е. $\vec{r}_{\perp c}$ по $\vec{C}_\perp$ определяется однозначно, как и $\vec{C}_\perp$ по $\vec{r}_{\perp c}$ (см. П 3).

Теперь мы можем представить результат (П 1) следующим образом:

$$m\vec{\upsilon}_\perp = q\left[\vec{r}_\perp, \vec{B}\right] - q\left[\vec{r}_{\perp c}, \vec{B}\right] = q\left[\vec{r}_\perp - \vec{r}_{\perp c}, \vec{B}\right], \qquad \text{(П 7)}$$

где $\vec{r}_{\perp c}$ – радиус-вектор произвольной точки C. Если совместить начало отсчета O′ с точкой C, то $\vec{r}_{\perp c}$=0, и уравнение (П 1) приобретает вид (2.86):

$$m\vec{\upsilon}_\perp = q\left[\vec{r}_\perp, \vec{B}\right].$$

Отсюда, кстати, следует: $r_\perp = 0 \Leftrightarrow \upsilon_\perp = 0$.

Приложение № 2
Скалярные и векторные поля (фрагмент)

Если в каждой точке области D пространства (или во всем пространстве) задана какая-либо скалярная величина, то говорят, что в области D (или во всем пространстве) задано скалярное поле. Векторное поле определяется аналогично. Задание скалярного или векторного поля эквивалентно заданию скалярной $\varphi(x,y,z)$ или векторной $\vec{a}(x,y,z)$ функции координат. Величины $\varphi, \vec{a}$ являются, таким образом, функциями точки пространства, и поэтому для них используются также обозначения $\varphi(M), \vec{a}(M), \varphi(\vec{r}), \vec{a}(\vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки *M*. Примером скалярного поля может служить поле температуры неравномерно нагретого тела $T(\vec{r})$, концентрация молекул определенного вида в неоднородной смеси $n(\vec{r})$ и т.д., примером векторного поля – поле скоростей жидкости в реке $\vec{\upsilon}(\vec{r})$, напряженность электрического поля, создаваемого заряженным проводником, $\vec{E}(\vec{r})$. Вообще говоря, физические величины $\varphi, \vec{a}$ помимо координат могут зависеть также от времени t, однако с точки зрения тех операций, которые мы будем рассматривать в этом разделе, зависимость от времени не существенна, поэтому будем писать $\varphi(\vec{r}), \vec{a}(\vec{r})$, имея в виду, что среди аргументов функции $\varphi, \vec{a}$ может оказаться и переменная t, которая должна рассматриваться как параметр функции.

К основным понятиям векторного анализа относятся производная по направлению, градиент, дивергенция и ротор. Прежде чем вводить эти операции, необходимо изучить понятия циркуляции и потока вектора.

Циркуляция вектора

Рассмотрим произвольный контур, т.е. замкнутую кривую. На контуре зададим положительное направление обхода – оно указано стрелками на рис. П1.

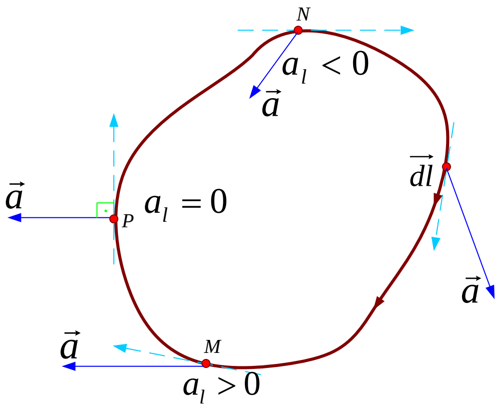


Рис. П 1

Пусть в каждой точке контура определен некоторый вектор $\vec{a}$. Построим касательную к контуру в какой-либо точке и зададим на ней направление так, чтобы оно совпадало с положительным направлением обхода контура в данной точке. На полученную таким образом ось спроецируем вектор $\vec{a}$ и обозначим проекцию через a_l. Эта величина – скаляр, она может быть положительной (точка M контура), отрицательной (точка N) или равной нулю (точка P) – см. рис. П1.

Введем бесконечно малый элемент контура $\vec{dl}$ – вектор, направление которого совпадает с направлением, выбранным на касательной (по обходу).

Циркуляцией вектора $\vec{a}$ по контуру L называется интеграл

$$C_a = \oint_L a_l dl = \oint_L a\cos\alpha\, dl = \oint_L \vec{a}\,\overrightarrow{dl}\,, \qquad (\Pi1)$$

где α – текущий угол между $\vec{a}$ и касательной к контуру ($\alpha < \pi/2$ в точке *M*, и здесь $a_l > 0$; $\alpha > \pi/2$ в точке N, и здесь $a_l < 0$), $\vec{a}\overrightarrow{dl}$ – скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на элемент контура $\overrightarrow{dl}$.

Очевидно, что циркуляция – это положительный или отрицательный скаляр. Если циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, то векторное поле называется потенциальным, а при условии $\partial\vec{a}/\partial t = 0$ – консервативным.

Производная по направлению. Градиент.

Эти понятия определим для скалярного поля $\varphi(\vec{r})$. Возьмем точку *M* и проведем через нее прямую l в пространстве, причем выберем на этой прямой положительное направление – оно указано единичным вектором $\vec{l}$ (рис. П2). Производной скалярной функции $\varphi(M)$ по направлению $\vec{l}$ в точке *M* называется величина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{M_1\to M}\frac{\varphi(M_1)-\varphi(M)}{\overline{MM_1}}\,, \qquad (\Pi2)$$

где $\overline{MM_1}$ – длина отрезка MM_1, взятая со знаком плюс, если направление от M к M_1 совпадает с направлением $\vec{l}$, и – со знаком минус, если наоборот.

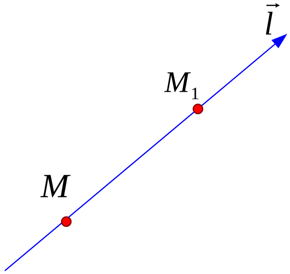


Рис. П 2

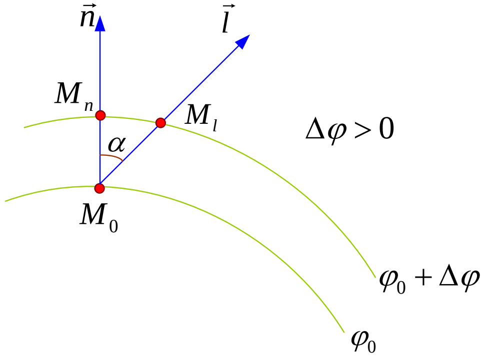


Рис. П 3

Пусть в какой-то точке M_0 скалярная величина φ принимает значение φ_0. В области задания функции $\varphi(\vec{r})$, вообще говоря, имеются еще другие точки, где $\varphi = \varphi_0$, причем множество этих точек образует поверхность. Такая поверхность, на которой скалярная величина φ имеет определенное значение, называется поверхностью уровня скалярного поля φ. Уравнение этой поверхности имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0 . \qquad \text{(П3)}$$

Рассмотрим две близкие поверхности уровня, на которых значения φ отличаются на малую величину $\Delta\varphi$ (на рис. П 3 изображено сечение этих поверхностей плоскостью чертежа).

Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор нормали к поверхности уровня $\varphi = \varphi_0$, направленный в сторону возрастания φ, и найдем связь между производными по направлению $\partial\varphi/\partial n$ и $\partial\varphi/\partial l$. Пусть M_n и M_l – точки, в которых прямые n и l пересекают поверхность $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$. Тогда для производной $\partial\varphi/\partial l$ получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{M_0 M_l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\overline{\overline{M_0 M_l}}}. \tag{П4}$$

Но $\overline{M_0 M_l} = \dfrac{M_0 M_n}{\cos\alpha}$, отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{M_0 M_l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{M_0 M_n}\cos\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\alpha. \tag{П5}$$

Вектор, численно равный $\partial\varphi/\partial n$ и направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания φ, называется градиентом скалярного поля $\varphi(\vec{r})$

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}. \tag{П6}$$

Приведенное определение является, очевидно, инвариантным по отношению к выбору системы координат – оно не связано с какой-то конкретной (например, декартовой) координатной системой.

В соответствие с (П5) производная φ по любому направлению $\vec{l}$ равна проекции вектора градиента φ на направление $\vec{l}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = |grad\varphi|\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,\vec{n}) = grad_l\varphi. \tag{П7}$$

Для направлений, соответствующих декартовым координатам, в частности, получаем

$$grad_x\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\; grad_y\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\; grad_z\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,,$$

и, вводя единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, определяющие направления осей OX, OY, OZ соответственно, можно написать выражение для градиента скалярного поля в декартовых координатах в виде

$$grad\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,. \qquad (П8)$$

Отметим, что из уравнения (П6) следует, что направление градиента $\vec{n}$ есть направление наиболее быстрого возрастания скаляра φ и наоборот: $(-\vec{n})$ определяет направление, в котором скорость убывания φ максимальна.

Если рассматривать вычисление градиента скалярной функции как операцию, определенную на скалярном поле $\varphi(\vec{r})$, то такая операция порождает новое векторное поле – поле $grad\varphi$.

ГЛОССАРИЙ

Двойные звёзды

«**Двойные звёзды** (ДЗ) – пары звёзд, обращающихся вокруг общего центра масс. Данное определение предполагает наличие устойчивой орбиты и тем самым ограничивает расстояние между компонентами и периоды обращения. Пары с расстояниями более 10^4а.е. (1 а.е. = $1{,}496 \cdot 10^{11}$м – среднее расстояние от Земли до Солнца) постепенно разрушаются при взаимодействии с ближайшими к ним звёздами Галактики. Наименьшее расстояние соответствует контакту звёзд и равно сумме радиусов компонент… Периоды обращения варьируют примерно от 6 часов до 10^6 лет. Подавляющее большинство известных двойных звёзд… – это **визуально – двойные звёзды (ВДЗ)**, их можно наблюдать раздельно (угловое расстояние между компонентами ВДЗ, как правило, $> 0{,}1''$**).**

Звёзды, у которых зарегистрировано (по эффекту Доплера) изменение лучевых скоростей вследствие орбитального движения, называют **спектрально - двойными звёздами (СДЗ)**…В некоторых ДЗ (как правило, **тесных**) компоненты поочерёдно затмевают друг друга, такие ДЗ называют **затменными двойными звёздами (ЗДЗ)**. Имеются и другие способы обнаружения и исследования двойных звёзд…» [4]

«Доля двойных и **кратных** (три и более компонент) звёзд в нашей Галактике составляет около 50%. В составе двойных систем встречаются любые комбинации звёзд. Астрономы считают большой удачей, когда интересующий их объект входит в состав двойной системы. Среди двойных звёзд выделяют **тесные двойные системы (ТДС)** – системы из двух звёзд, в которых на некотором этапе эволюции происходит обмен веществом между компонентами. Наиболее заметные наблюдательные проявления перетекания вещества отмечаются у **ТДС** , находящихся на поздних стадиях эволюции… Именно характеристики поздних стадий эволюции **ТДС** являются самыми сильными критериями для проверки правильности наших представлений об эволюции звёзд, поскольку поздние стадии эволюции связаны с образованием таких особенных (пекулярных) объектов, как белые карлики, звёзды Вольфа – Райе (WR), нейтронные звёзды и чёрные дыры.

Достижения рентгеновской астрономии привели к открытию новых типов **ТДС**, в частности рентгеновских двойных систем, состоящих из нормальной оптической звезды типа Солнца, которая является донором и поставляет вещество на соседний объект, и **релятивистского объекта** (нейтронная звезда, чёрная дыра), находящегося в режиме непрерывающегося захвата (аккреции) вещества…»[5].

Важно отметить, что поведение **релятивистских объектов** подчиняется **релятивистской теории гравитации** (а не закону всемирного тяготения Ньютона, который в данном случае не применим). Таким образом, рассмотренный нами пример с двойной звездой, компоненты которой взаимодействуют именно в соответствии с законом всемирного тяготения, – к упомянутым новым типам **ТДС** не имеет отношения. – В нашем примере двойная звезда рассматривается как объект нерелятивистский. Примеры такого рода объектов, очевидно, найдутся, прежде всего, среди **визуально – двойных звёзд**.

Законы Кеплера

«**Законы Кеплера (КЗ)** – эмпирические законы, описывающие движение планет вокруг Солнца. Установлены И.Кеплером (J.Kepler) в начале 17в. на основе наблюдений положений планет относительно звёзд.

- **Первый закон Кеплера**. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
- **Второй закон Кеплера.** Площади, описываемые радиусами – векторами планет, пропорциональны времени.

- **Третий закон Кеплера.** Квадраты периодов обращения относятся как кубы их средних расстояний от Солнца.

Первые два КЗ были опубликованы в 1609 г., третий – в 1619 г. КЗ сыграли важную роль в установлении И.Ньютоном закона всемирного тяготения. Решение задачи о движении материальной точки (м.т.), взаимодействующей по этому закону с **неподвижной центральной точкой** (невозмущённое кеплеровское движение), приводит к формулировке **обобщённых КЗ.**

1. В невозмущённом движении орбита движущейся м.т. есть кривая второго порядка, в одном из фокусов которой находится центр силы притяжения.
2. В невозмущённом движении площадь, описываемая радиусом – вектором м.т., изменяется пропорционально времени.
3. В невозмущённом эллиптическом движении двух материальных точек произведение квадратов времён обращений на суммы масс центральной и движущейся точек относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения точек с массами m_1 и m_2, движущихся вокруг центральной точки с массой m_0 по эллипсам с большими полуосями a_1 и a_2 соответственно…» [6].

Рассмотрим планету массы m, движущуюся по эллиптической орбите вокруг Солнца (масса m_0), которое считается неподвижным и находится в одном из фокусов эллипса (рис.1).

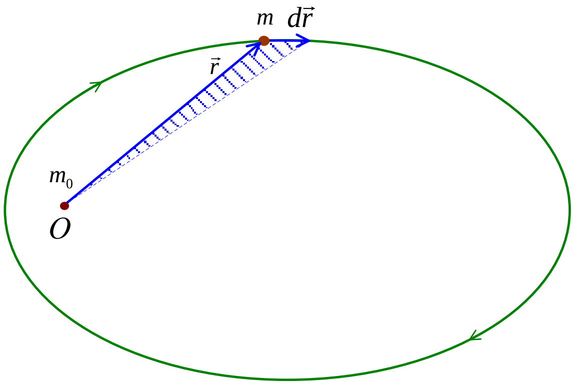


Рис. 1

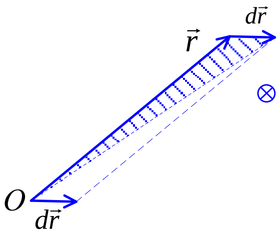


Рис. 2

На планету со стороны Солнца действует ньютонова сила гравитационного притяжения

$$\vec{F} = -G\frac{m_0 m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ – радиус – вектор планеты (см. рис.1), $r \equiv |\vec{r}|$ – расстояние между планетой и Солнцем.

За бесконечно малый промежуток времени dt планета совершает бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$.

На рис.2 показаны параллелограмм, построенный на векторах $\vec{r}$ и $d\vec{r}$, и единичный
вектор $\vec{k}$, перпендикулярный плоскости чертежа (плоскости эллиптической орбиты) и направленный «от нас».

Очевидно,

$$[\vec{r}, d\vec{r}] = \left|[\vec{r}, d\vec{r}]\right|\cdot\vec{k}, \tag{2}$$

причём выражение $\left|[\vec{r}, d\vec{r}]\right|$ представляет собой площадь параллелограмма. Тогда

$$dS = \frac{1}{2} \left| \left[\vec{r}, d\vec{r}\right] \right| \qquad (3)$$

– площадь бесконечно малого заштрихованного треугольника, показанного на рис.1 и рис.2, которая совпадает с **площадью бесконечно малого сектора эллипса** (см. рис.1), описываемого радиус – вектором $\vec{r}$ за бесконечно малый промежуток времени dt. Таким образом,

$$\left[\vec{r}, d\vec{r}\right] = 2dS \cdot \vec{k}\ . \qquad (4)$$

Поделим уравнение (4) на dt и умножим на массу планеты m. С учётом определения импульса

$$\vec{p} \equiv m\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (5)$$

получаем

$$\left[\vec{r}, \vec{p}\right] = 2m\frac{dS}{dt} \cdot \vec{k}\ . \qquad (6)$$

Величина в левой части уравнения (6) – момент импульса планеты относительно точки O (рис.1),

$$u_S \equiv \frac{dS}{dt} \qquad (7)$$

– **секториальная скорость**. Вместо (6) теперь имеем

$$\vec{l} = 2mu_S \cdot \vec{k} \qquad (8)$$

Сила гравитационного притяжения (1) является **центральной,** поэтому момент импульса планеты сохраняется:

$$\vec{l} = const\,. \tag{9}$$

Тогда из (8) следует **постоянство секториальной скорости:**

$$u_S \equiv \frac{dS}{dt} = const\,. \tag{10}$$

Площадь, описываемая радиусом – вектором планеты, как следует из (10), изменяется пропорционально времени:

$$\Delta S = u_S \Delta t\,. \tag{11}$$

Таким образом, **второй закон Кеплера является непосредственным следствием закона сохранения момента импульса.**

Важно отметить следующее. На спутники Земли со стороны Земли действует сила гравитационного притяжения (1), в которой под m_0 следует понимать массу Земли, под m – массу спутника, а под $\vec{r}$ – радиус – вектор спутника, проведённый из центра планеты. Земля со спутниками аналогична системе Солнце – планеты. Поэтому движение спутников вокруг Земли также подчиняется законам Кеплера, в частности, второму закону, утверждающему постоянство секториальной скорости.

<u>Напряженность поля произвольной системы</u>

Напряженность гравитационного поля, создаваемого точечной массой m_i в точке с радиусом-вектором $\vec{r}$, определяемая равенством

$$\vec{g}_i(\vec{r}) = -\frac{Gm_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|},$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение m_i.

Если обозначить

$$\vec{r}_i' \equiv \vec{r} - \vec{r}_i,$$

то

$$r'_i \equiv |\vec{r} - \vec{r}_i|,$$

– расстояние от массы m_i до точки наблюдения, причем

$$\vec{g}_i = -\frac{Gm_i}{r'^2} \cdot \frac{\vec{r}_i'}{r_i'},$$

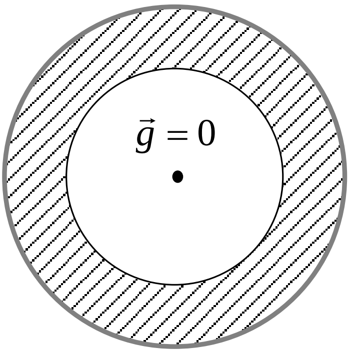
$$g_i \sim \frac{1}{r_i'^2}, \qquad (*)$$

т.е. **величина напряженности обратно пропорциональна квадрату расстояния** между точечной массой и точкой наблюдения.

Вектор напряженности подчиняется принципу суперпозиции (см. (2.108))

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_i \vec{g}_i(\vec{r}). \qquad (**)$$

Поля, обладающие свойствами (*) и (**) подчиняются **теореме Гаусса**.



Еще одно интересное следствие этой теоремы: если из шара со сферически симметричным распределением массы удалить внутреннюю часть так, чтобы образовалась сферическая полость, центр которой совпадает с центром шара (см. рис.), то внутри этой полости напряженность гравитационного поля равна нулю – поля там нет.

СПИСОК ЛИТРЕТУРЫ

1. Савельев И.В. «Курс общей физики. Т.1. //СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля //М.: Наука, 1973, 504 с. С. 228.
3. К. Меллер. Теория относительности // М.: Атомиздат, 1975. 400с.
4. Токовинин А.А. – В кн. Физическая энциклопедия. Т.1. С.563 // М.: Советская энциклопедия, 1988.
5. Черепащук А.М. Тесные двойные звёзды на поздних стадиях эволюции. – В кн. Энциклопедия. Современное естествознание. Т.4. С.205 // М.: Магистр – пресс, 2000.
6. Герасимов И.А. – В кн. Физическая энциклопедия. Т.2. С.347 // М.: Советская энциклопедия, 1990.