

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Инженерно-технологическая академия

А. Б. КОЛПАЧЕВ
О. В. КОЛПАЧЕВА

КОЛЕБАНИЯ

Учебное пособие

Ростов-на-Дону–Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2025

УДК 539.1(075.8) + 530.145 (075.8)

ББК 22.383я73 +22.314 я73

К615

*Печатается по решению кафедры физико-математических основ инженерного образования Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета
(протокол № 9 от 25 июня 2025 г.)*

Рецензенты:

зав. кафедрой электротехники и электроники Донского государственного технического университета, доктор физико-математических наук, профессор *А. А. Лаврентьев*;

профессор кафедры математики и физики Таганрогского института им. А. П. Чехова (филиала) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), кандидат технических наук, доцент *С. Н. Кихтенко*.

Колпачев, А. Б.

К615 Колебания: учебное пособие /А. Б. Колпачев, О. В. Колпачева; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2025. – 128 с.

ISBN

Пособие содержит изложение разделов курса физики, касающихся механических и электромагнитных колебаний.

Предназначено для студентов ЮФУ, обучающихся по направлениям «Приборостроение», «Электронная техника, радиотехника и связь», «Электроника и наноэлектроника».

УДК 539.1(075.8) + 530.145 (075.8)

ББК 22.383я73 +22.314 я73

© Южный федеральный университет, 2025

© Колпачев А. Б., Колпачева О. В., 2025

© Оформление. Макет. Издательство

Южного федерального университета, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	6
1.1. Гармонические колебания пружинного маятника	6
1.2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний пружинного маятника.....	7
1.3. Как решить дифференциальное уравнение гармонических колебаний? Математическая справка	11
1.4. Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний	14
1.5. Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний для тех, кто не умеет решать дифференциальные уравнения.....	16
1.6. Гармонические колебания пружинного маятника.....	19
1.7. Скорость движения пружинного маятника	25
1.8. Ускорение пружинного маятника и сила, действующая на него ...	29
1.9. Фаза гармонических колебаний и ее физический смысл	34
1.10. Энергия тела, совершающего гармонические колебания	37
1.11. Колебания физического маятника	42
1.12. Колебания математического маятника. Приведенная длина физического маятника	47
1.13. Условия возникновения гармонических колебаний. Квазиупругие силы	50
1.14. Затухающие механические колебания. Дифференциальное уравнение	58
1.15. Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний	64
1.16. Затухающие механические колебания	68

1.17. Количественные характеристики процесса затухающих колебаний	74
1.18. Вынужденные механические колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний	78
1.19. Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний	81
1.20. Вынужденные колебания. Резонанс	86
2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	91
2.1. Физические процессы, происходящие в колебательном контуре	91
2.2. Дифференциальное уравнение незатухающих колебаний в колебательном контуре	94
2.3. Незатухающие гармонические колебания в колебательном контуре	96
2.4. Определение начальной фазы гармонических колебаний в колебательном контуре	99
2.5. Колебания энергии электрического и магнитного полей в процессе незатухающих электромагнитных колебаний	101
2.6. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в колебательном контуре	106
2.7. Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний в колебательном контуре. Условие возникновения колебаний	108
2.8. Затухающие электромагнитные колебания	111
2.9. Вынужденные электромагнитные колебания	118
2.10. Принципы радиосвязи. Применение явления резонанса	123
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	126
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	127

ВВЕДЕНИЕ

Среди явлений природы и технических процессов мы часто можем наблюдать, как некоторая физическая величина через определенные (подчас неодинаковые) промежутки времени принимает одно и то же значение. Природа таких процессов может быть самой разнообразной. Это могут быть изменения термодинамических параметров системы (давления, температуры, объема), изменения освещенности поверхности (например, земной поверхности в течение суток). Это также может быть связано с механическим движением или с процессами протекания тока в электрических цепях. Все такого рода процессы называют колебаниями. Можно дать такое определение колебаний: колебаниями называют физический процесс, в ходе которого некоторая физическая величина принимает одинаковые значения через какие-то промежутки времени.

Если одинаковые значения наблюдаемой физической величины повторяются через равные промежутки времени, то такие колебания называют периодическими. В этом случае промежуток времени, который проходит между появлениями одинаковых значений некоторой физической величины, называют периодом колебаний. Если изменения физической величины происходит по гармоническому закону, т.е. по закону синуса или косинуса, колебания называют гармоническими.

Многие колебательные процессы можно описать, используя одинаковые математические уравнения. В нашем пособии мы рассмотрим простые примеры механических и электромагнитных колебаний, выделим одинаковые математические аспекты их писания и рассмотрим их существенные физические различия. Среди механических движений процессы, обладающие той или иной периодичностью, встречаются часто. Такие движения лежат в основе функционирования различных машин и механизмов.

1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Гармонические колебания пружинного маятника

Для того чтобы понять главные особенности колебательных процессов, и способы их описания, мы начнем рассмотрение колебаний с простейшей механической колебательной системы – так называемого пружинного маятника. Это механическая система, и для того, чтобы описать ее движение, нужно определить закон ее движения, т.е. зависимость координат материальных точек этой системы от времени. Как мы знаем из раздела «Механика» курса физики [1,2,3], определить закон движения механической системы можно из динамического уравнения движения. В случае поступательного движения динамическое уравнение движения проще всего получить из второго закона Ньютона. Так мы и поступим. Сначала мы определим силы, действующие на пружинный маятник, затем запишем второй закон Ньютона в векторной форме, а потом и в виде проекций на координатные оси. В результате мы получим динамические уравнения, определяющие ускорения частиц, участвующих в движении. Из полученных динамических уравнений мы определим закон движения пружинного маятника и проанализируем все особенности его движения, сравним полученные результаты с тем, что наблюдается в эксперименте, и после этого сможем сделать некоторые выводы о отличительных особенностях колебательного движения. Теперь приступим к реализации нашего плана действий.

Основные результаты и выводы

Задача о колебаниях пружинного маятника может быть сформулирована как задача о движении материальной точки под действием силы упругости. Решать эту задачу следует, используя стандартны средства механики, и в частности, второй закон Ньютона.

Контрольные вопросы

1. Поставлена задача исследовать движение пружинного маятника на плоскости. Какие силы надо учитывать в этой системе при решении задачи о колебаниях пружинного маятника?

2. Изучаются вертикальные колебания пружинного маятника в поле Земли. Как выбрать нулевую точку отсчета при описании процесса колебаний? Какое положение считается равновесным?

1.2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний пружинного маятника

Итак, мы рассматриваем следующую простейшую колебательную систему. На гладкой горизонтальной поверхности находится тело массы m . С помощью идеальной упругой пружины тело соединено с неподвижной стеной. Трение между горизонтальной поверхностью и телом отсутствует. Тело выводят из положения равновесия, удлиняя пружину на величину x , и отпускают. Такая механическая колебательная система называется пружинным маятником [1,2]. Тело участвует только в поступательном движении, поэтому для описания этого движения можно использовать модель материальной точки, масса которой сосредоточена в центре масс тела. Будем считать, что все силы, действующие на тело, приложены именно в этой точке – центре масс. Систему отсчета выберем таким образом, что положение равновесия груза, в котором находится его центр масс, когда пружина не деформирована, совпадает с началом координат, т.е. с точкой, в которой координата $x = 0$. При таком выборе начала координат величина удлинения пружины равна величине смещения материальной точки из положения равновесия, которая, в свою очередь, по модулю равна координате x . Когда пружина растянута, координата $x > 0$, когда пружина сжата, $x < 0$.

На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила упругости деформированной пружины \vec{F}_y . В результате воздействия этих сил тело

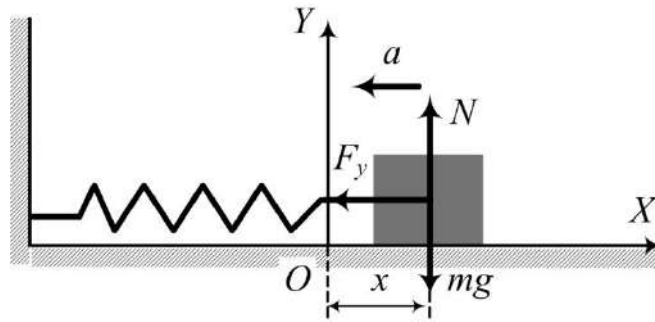


Рис. 1.1. Пружинный маятник

движется с ускорением \vec{a} (рис. 1.1). Запишем для этого маятника второй закон Ньютона [1 – 3]:

$$m\vec{a} = \vec{F}_y + m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1.1)$$

Согласно закону Гука [1,2], проекция силы упругости на горизонтальную ось $F_{yx} = -k|x|$, где $|x|$ – величина смещения тела от положения равновесия, а знак «минус» указывает на то, что сила направлена в сторону, противоположную смещению тела. Таким образом, уравнение второго закона Ньютона можно переписать в виде проекций на оси координат:

$$OX: \quad ma_x = -kx, \quad (1.2)$$

$$OY: \quad 0 = N - mg. \quad (1.3)$$

Так как поверхность гладкая, трение между телом и поверхностью отсутствует. Поэтому уравнение (1.3), записанное для проекций сил на вертикальную ось, которое обычно применяется для вычисления силы реакции опоры и силы трения скольжения, нам не понадобится.

Рассмотрим подробнее уравнение (1.2) для проекций сил на горизонтальную ось. Вспомним, что проекция ускорения на ось OX есть вторая производная по времени от координаты x [1,2]:

$$a_x = x''_{tt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Подставим это выражение в уравнение (2) и получим уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Разделив правую и левую части этого уравнения на m – массу тела, и перенеся все слагаемые в правую часть уравнения, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.4)$$

Мы получили уравнение, вид которого заметно отличается от привычных алгебраических уравнений. Это уравнение содержит вторую производную по времени величины x в одном слагаемом и саму величину x – в другом. Такие уравнения, которые содержат некоторую функцию и ее производные, называются дифференциальными уравнениями [4–6]. Решениями таких уравнений, в отличие от уравнений алгебраических, являются не числа, а функции, отражающие зависимость величины x от переменной, по которой проводится дифференцирование, т.е. в данном случае от времени t . Таким образом, решая это уравнение, мы сможем узнать, как величина смещения тела от положения равновесия изменяется с течением времени. Дифференциальное уравнение (1.4), полученное из второго закона Ньютона, является динамическим уравнением движения пружинного маятника, а его решение, функция $x = x(t)$, описывающая изменение положения тела (материальной точки) с течением времени, является законом движения тела или кинематическим уравнением движения [1]. Таким образом, первый этап решения задачи о движении пружинного маятника можно считать завершенным. Наша задача на следующем этапе состоит в том, чтобы решить дифференциальное уравнение (1.4) и определить закон движения тела, прикрепленного пружиной к стене. Когда мы узнаем зависимость координаты тела от времени, $x = x(t)$, мы сможем подробно исследовать характер его движения.

Мы рассмотрим два способа решения этого простого уравнения. Это пособие адресовано студентам различных направлений подготовки с разным уровнем знания математики. Первый способ решения мы предлагаем для студентов, знакомых с основами теории дифференциальных уравнений. Вторым способом – для тех, кто знает математику похуже, но хотя бы понимает, что такое

производная функции и помнит, как ее вычислить. Предлагаем читателю самостоятельно выбрать способ решения по душе.

Основные результаты и выводы

1. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний пружинного маятника получено из применения второго закона Ньютона к описанию движения тела, на которое действует сила, величина которой прямо пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направленная к положению равновесия.

2. Дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника позволяет определить зависимость величины смещения груза маятника от положения равновесия как функцию времени, т.е. закон движения груза.

Контрольные вопросы

1. Какие физические модели следует применить при решении задачи о движении пружинного маятника, чтобы колебания маятника соответствовали гармоническим и незатухающим?

2. Как выбрать систему отсчета и начало отсчета при описании движения пружинного маятника на плоскости? Ответить на этот вопрос, если пружинный маятник совершает движение по вертикали.

3. Как определяется величина удлинения пружины? Какое состояние пружинного маятника называется положением равновесия?

4. Запишите второй закон Ньютона для пружинного маятника, применив модель колебаний без затухания.

5. Как отличаются по направлению сила упругости и смещение тела?

6. Известна зависимость от времени смещения пружинного маятника, колеблющегося вдоль оси Ox , $x = 4 \cdot \cos(\pi t/2 + \pi/4)$ см. Найдите функции скорости и ускорения.

7. Запишите, как зависит от времени проекция ускорения на ось Ox , если скорость в колебательном процессе $v_x(t) = 5 \cdot \cos(3\pi t/2 + \pi/4)$ см.

8. Запишите дифференциальное уравнение незатухающих колебаний для пружинного маятника. К какому классу относится такое уравнение? Какой вид имеет решение этого уравнения?

9. Груз массой 200 г, подвешенный к пружине, колеблется с такой же частотой, что и математический маятник длиной 0,2 м. Найти коэффициент жесткости пружины.

1) 10 Н/м; 2) 8 Н/м; 3) 6 Н/м; 4) 1 Н/м; 5) 0,1 Н/м.

10. Пружина, к которой подвесили груз, растянулась на 41 мм. С какой частотой будет совершать колебания груз, если его вывели из положения равновесия?

1) 1,2 Гц; 2) 2,5 Гц; 3) 5,6 Гц; 4) 6,3 Гц; 5) 8,5 Гц.

1.3. Как решить дифференциальное уравнение гармонических колебаний?

Математическая справка

Полученное нами дифференциальное уравнение гармонических колебаний является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение таких уравнений часто является необходимым при решении различных физических и инженерных задач. Существует огромное количество учебников и учебных пособий, в которых изложена методика решения таких уравнений. Например, можно ознакомиться с этой методикой в книгах [4, 5, 6]. Подробное и обоснованное рассмотрение теории решения дифференциальных уравнений выходит за рамки нашего курса, поэтому мы ограничимся только кратким изложением результатов для линейных уравнений второго порядка. В этом изложении мы будем следовать книге [6].

Линейными дифференциальными уравнениями называются уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y(x) = f(x). \quad (1.5)$$

Непрерывные функции $p(x)$ и $q(x)$ называются коэффициентами уравнения, $f(x)$ называется правой частью или свободным членом уравнения. Если свободный член уравнения $f(x) = 0$, то уравнение называется линейным однородным, если $f(x) \neq 0$, то линейным неоднородным. В случае, когда коэффициенты уравнения являются не функциями, а постоянными величинами, $p(x) = a$, $q(x) = b$, уравнение называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by(x) = 0. \quad (1.6)$$

Для решения такого уравнения составляют характеристическое уравнение относительно переменной k . Для этого в исходном дифференциальном уравнении заменяют вторую производную неизвестной функции на k^2 , первую производную – на k (k в первой степени), а саму неизвестную функцию – на k в нулевой степени, т.е. на единицу. Характеристическое уравнение для уравнения (1.6) имеет вид

$$k^2 + ak + b = 0. \quad (1.7)$$

Затем находят корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Общее решение дифференциального линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами можно записать так:

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (1.8)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые определяются из начальных или граничных условий. Корни характеристического уравнения могут быть действительными, комплексными или кратными, т.е. $k_1 = k_2$. Подстановки таких корней в формулу (1.8) приводят к разным результатам. Возможные случаи сведены в табл. 1.1. Таблица также взята из книги [6].

Таблица 1.1 Решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Случай	Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	Общее решение
1	Корни действительные и различные, $k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	Корни комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$
3	Корни кратные $k_1 = k_2$	$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти как сумму общего решения линейного однородного уравнения (1.6) и частного решения линейного неоднородного уравнения [4, 5, 6].

Основные результаты и выводы

Применение теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка позволяет находить решения для уравнений, описывающих значительную часть физических процессов. В частности, дает возможность решать уравнения, описывающие колебательные процессы.

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются линейными однородными (неоднородными) дифференциальными уравнениями второго порядка?
2. Запишите линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
3. Составьте характеристическое уравнение для дифференциального линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

4. Какие значения должны принимать корни характеристического уравнения, составленного для дифференциального линейного уравнения второго порядка, чтобы решение дифференциального уравнения было гармоническим?

5. Запишите общее решение дифференциального линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1.4. Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний

Теперь обратимся к решению дифференциального уравнения гармонических колебаний (1.4). Сравним это уравнение с общим видом линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1.6). В уравнении (1.4) отсутствует слагаемое с первой производной неизвестной функции. Поэтому его можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0,$$

где $b = \omega^2 = \frac{k}{m}$. Составим характеристическое уравнение [6]:

$$k^2 + b = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$k_1 = +i\beta, \quad k_2 = -i\beta.$$

Здесь

$$\beta = \sqrt{b} = \sqrt{\omega^2} = \frac{k}{m}.$$

Общее решение уравнения (1.6) согласно табл. 1.1 [6] имеет вид

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

однако в уравнении гармонических колебаний (1.4) коэффициент $a = 0$, следовательно, и $\alpha = 0$. Поэтому общее решение этого уравнения можно записать как

$$x(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t). \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.9) видно, что зависимость смещения груза маятника от положения равновесия есть гармоническая функция времени и поэтому колебания маятника являются гармоническими. Перепишем решение (1.9) в виде, ко-

торый является общепринятым в физике для описания колебаний. Для этого воспользуемся формулой для синуса суммы двух аргументов [7]:

$$\sin(\beta t + \varphi) = \cos\varphi \sin(\beta t) + \sin\varphi \cos(\beta t).$$

Умножим правую и левую части этого уравнения на постоянную величину A :

$$A \sin(\beta t + \varphi) = A \cos\varphi \sin(\beta t) + A \sin\varphi \cos(\beta t).$$

Обозначим

$$A \sin\varphi = C_1, \quad A \cos\varphi = C_2,$$

и получим

$$A \sin(\beta t + \varphi) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t).$$

Таким образом, функция

$$x(t) = A \sin(\beta t + \varphi)$$

является решением дифференциального уравнения гармонических колебаний (1.4). Здесь величины A и φ – произвольные постоянные. Так как φ – произвольная постоянная, она может быть равна $\varphi_1 = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда функция

$$x(t) = A \cos(\beta t + \varphi_1)$$

также является решением уравнения (1.4). Используем введенные ранее обозначения для величины β и запишем решения уравнения (1.4) в общепринятом для анализа колебаний виде:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.10)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.11)$$

Решения (1.10) и (1.11) абсолютно эквивалентны и в практических приложениях можно использовать любое из них.

Основные результаты и выводы

Решение дифференциального уравнения колебаний пружинного маятника (1.4) является гармонической функцией и его можно записать либо в виде (1.10), либо в виде (1.11). В этих формулах A – амплитуда колебаний маятника,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклическая частота колебаний, φ – начальная фаза колебаний.

Контрольные вопросы

1. Запишите второй закон Ньютона для пружинного маятника, совершающего движение по горизонтали, и получите для него дифференциальное уравнение.
2. Получите характеристическое уравнение для дифференциального уравнения, описывающего незатухающее движение пружинного маятника.
3. Чему должна быть равна циклическая частота в этом уравнении? Как она связана характеристиками маятника: частотой и массой?
4. Колебания пружинного маятника имеют характер гармонических колебаний. Какой вид имеет зависимость от времени величина смещения?

1.5. Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний для тех, кто не умеет решать дифференциальные уравнения

Итак, нам нужно найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Это уравнение описывает движение груза, который соединен пружиной с неподвижной стенкой и может скользить по гладкой горизонтальной поверхности. Уравнение такого типа обращается в тождество не только при одном или нескольких фиксированных значениях переменной x , как обычное алгебраическое уравнение. Решением такого уравнения является функция $x = x(t)$, которая описывает изменение координаты центра масс груза (материальной точки) в процессе его движения. Попробуем подобрать функцию, при подстановке которой, это уравнение обратится в тождество. При этом мы будем опираться не только на математические свойства этой функции, но и на физические свойства рассматриваемой системы.

Уравнение можно переписать так:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t).$$

Последнее равенство может обратиться в тождество только в том случае, когда функция $x = x(t)$ и ее вторая производная по времени имеют одинаковый вид и отличаются друг от друга не более, чем постоянным, не зависящим от времени множителем. Кроме того, так как эти функции должны описывать изменение координаты материальной точки, они должны быть действительными. Таких функций среди элементарных немного. Наиболее просто выглядят следующие функции [7]:

$$x_1(t) = Ae^{\alpha t}, \quad (1.12)$$

$$x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad (1.13)$$

$$x_3(t) = A\sin(\omega t + \varphi). \quad (1.14)$$

Первая из приведенных выше функций не подходит нам из физических соображений. Она должна описывать движение груза на пружине в отсутствие трения. Опыт подсказывает, что такое движение должно быть колебательным. Когда мы отведем груз от положения равновесия и отпустим его, он сначала будет двигаться по направлению к положению равновесия, потом пройдет положение равновесия, пружина сожмется, груз остановится, а потом начнет движение в противоположном направлении. Если мы отсчитываем координату x от положения равновесия груза, то эта координата должна принимать как положительные, так и отрицательные значения, функция должна поочередно возрастать и убывать. Функция (1.12) либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает в зависимости от знака параметра α . Требуемыми свойствами обладают тригонометрические функции (1.13) и (1.14). Они ограничены, периодичны, непрерывны [7].

Предположим, что координата груза изменяется с течением времени по закону косинуса по формуле (1.13). Найдем производные от этой функции [7].

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2'(t) = A(\cos(\omega t + \varphi))'_t = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

$$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = x_2''(t) = A(\cos(\omega t + \varphi))''_{tt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

Подставим функцию (1.13) в исходное дифференциальное уравнение (1.4):

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m} A \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любом t , если

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.15)$$

Таким образом, мы доказали, что функция $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ является решением дифференциального уравнения (1.4). Интересно, что функция является решением только тогда, когда выполняется условие (1.15). Действительные постоянные величины A и φ при этом могут принимать произвольные значения.

Отметим, что функция (1.14) $x_3(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ также является решением этого дифференциального уравнения. В этом можно убедиться, найдя вторую производную по времени и подставив ее вместе с самой функцией в дифференциальное уравнение, как мы это сделали для функции (1.13). Можно убедиться в этом и другим способом. В решении (1.13) $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ φ – произвольная постоянная величина. Функция (1.13) является решением дифференциального уравнения при любом действительном значении величины φ , в том числе и при значении $\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Но из тригонометрии известно, что

$$A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

То есть функция (1.14) также является решением этого дифференциального уравнения. Итак, функции (1.13) и (1.14) могут быть решениями дифференциального уравнения (1.4) при выполнении условия (1.15). Такой результат получается независимо от способа решения дифференциального уравнения, который мы использовали.

Основные результаты и выводы

Решение дифференциального уравнения в некоторых простых случаях может быть найдено методом подбора функции, опираясь на некоторые свойства этого решения, вытекающие из его физического смысла. Однако такой способ решения уравнений нельзя признать универсальным.

Контрольные вопросы

1. Перечислите условия для сил, действующих в системе пружинного маятника, чтобы дифференциальное уравнение при описании движения пружинного маятника имело вид $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$.

2. Почему решением дифференциального уравнения при описании движения пружинного маятника должна быть функция, зависящая от времени по закону синуса (косинуса)?

1.6. Гармонические колебания пружинного маятника

Итак, мы установили, что решением дифференциального уравнения движения пружинного маятника является функция

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Проверим, правильно ли эта функция описывает движение маятника. Предположим, что в начальный момент времени, как это показано на рис. 1.2, *а*, маятник был отведен на максимальное удаление от положения равновесия и отпущен. Тогда в начальный момент, при $t = 0$, смещение груза было максимальным. Подставим в найденный нами закон движения значение времени $t = 0$ и получим

$$x_0 = A \cos \varphi. \quad (1.16)$$

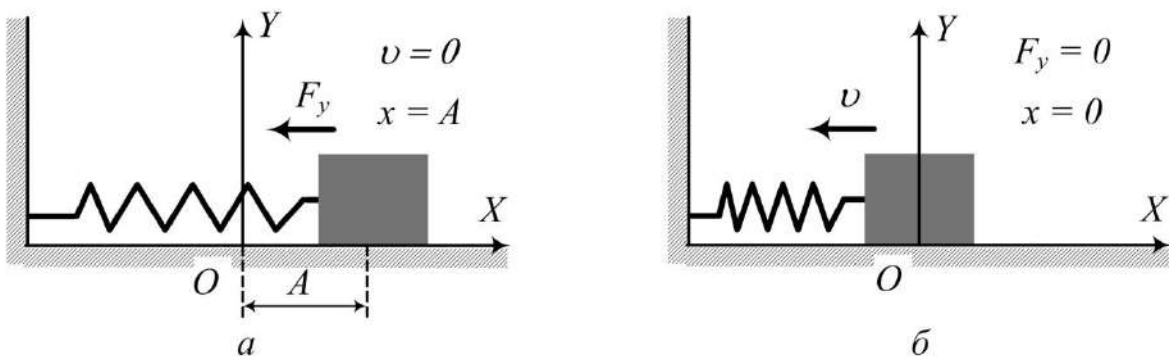


Рис. 1.2. Колебания пружинного маятника: *а*) начало колебательного процесса из точки наибольшего смещения; *б*) прохождение положения равновесия

Согласно нашему предположению, в начальный момент времени смещение маятника от положения равновесия было максимальным. Функция $\cos\varphi$ достигает максимального значения, равного единице, при $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ и так далее [7]. Для описания движения маятника, начинающего свое движение из точки максимального отклонения от положения равновесия, из всех возможных значений параметра φ следует выбрать любое из указанных значений. Выберем $\varphi = 0$. Тогда мы из (1.16) получаем, что $x_0 = A$. Это означает, что значение второй произвольной постоянной A в общем решении дифференциального уравнения должно быть равно максимальному смещению груза от положения равновесия. Назовем такое максимальное смещение груза **амплитудой колебаний** [1,2] и будем далее обозначать буквой A . В общем случае амплитудой колебаний называется максимальное значение изменяющейся величины. Для нашего маятника это максимальное смещение груза от положения равновесия. Для маятника, начавшего движение из положения максимального смещения, закон движения выглядит так:

$$x(t) = A\cos\omega t. \quad (1.17)$$

График этой зависимости показан на рис. 1.3. Из этого графика видно, что координата груза сначала убывает до значения $x = 0$, когда груз проходит положение равновесия. Затем значение координаты возрастает по модулю в отрицательной области до положения максимального сжатия пружины достигая значения $x = -A$, а потом груз снова проходит положение равновесия и возвращается

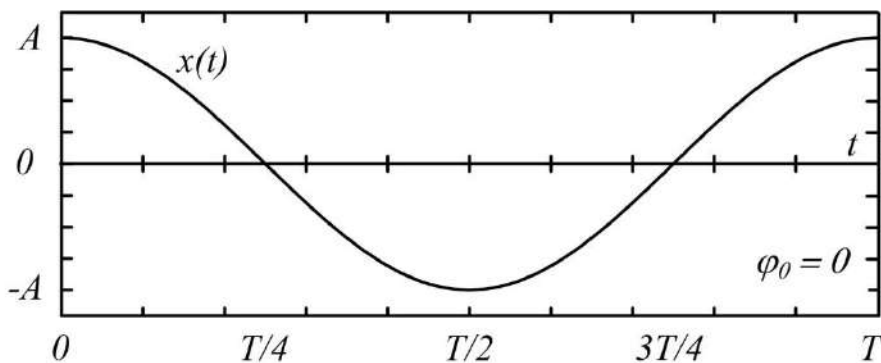


Рис. 1.3. Изменение смещения груза из положения равновесия для случая начала колебаний из положения максимального смещения

ся в исходное положение, когда $x = A$. Это хорошо соответствует реальному движению груза. Напомним, что если какая-то величина изменяется по закону синуса или косинуса, то говорят, что она изменяется по гармоническому закону. Координата груза изменяется по гармоническому закону.

В формуле $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, описывающей закон движения пружинного маятника, выражение в скобках $\alpha = \omega t + \varphi_0$ называется **фазой колебаний** [1,2]. Это очень важный параметр, позволяющий единообразно описывать колебания различной физической природы. Его физический смысл мы обсудим отдельно. Значение фазы колебаний в начальный момент времени $t = 0$, $\alpha = \varphi_0$ называется **начальной фазой колебаний**.

В первый раз координата $x = A$ в момент времени $t = 0$. Косинус – периодическая функция с периодом 2π , и во второй раз координата достигнет максимального положительного значения, когда аргумент косинуса $\omega t = 2\pi$. Наименьшее время, по прошествии которого колебательная система возвращается в исходное состояние, называется **периодом колебаний** [1,2]. Его обозначают буквой T . В системе СИ период колебаний измеряется в секундах.

$$\omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота колебаний – это число колебаний, совершаемое системой в единицу времени. Частота связана с периодом соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частота измеряется в Герцах (Гц).

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Величина ω называется **циклической частотой колебаний** [1,2]. Циклическая частота в системе единиц СИ измеряется в $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ или в $\frac{1}{\text{с}}$ или в с^{-1} .

Когда мы решали дифференциальное уравнение, мы установили, что функции синуса или косинуса являются его решениями только при выполнении условия (1.15):

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Таким образом мы определили циклическую частоту колебаний пружинного маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.18)$$

Здесь k – коэффициент жесткости пружины, m – масса груза. Период колебаний пружинного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.19)$$

Частота колебаний пружинного маятника

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.20)$$

Мы получили все характеристики движения пружинного маятника, исследуя уравнения, описывающие его движение. Однако всегда требуется экспериментальная проверка результатов, полученных теоретически. В данном случае провести такую проверку несложно. Во-первых, можно непосредственно измерить период колебаний пружинного маятника. При проведении таких измерений лучше измерять время, за которое совершается достаточно большое число колебаний. Это повысит точность измерений. В то же время следует помнить, что реальные колебания хотя и медленно, но все же затухают, поэтому время измерения не должно быть настолько большим, чтобы эффектами затухания нельзя было пренебречь. Измерения показывают, что экспериментальные значения периода и частоты колебаний очень хорошо согласуются с рассчитанными по формулам (1.19) и (1.20).

Убедиться в том, что изменение смещения груза из положения равновесия происходит по гармоническому закону, можно с помощью несложного устройства, которое называют механическим осциллографом [1, 2].

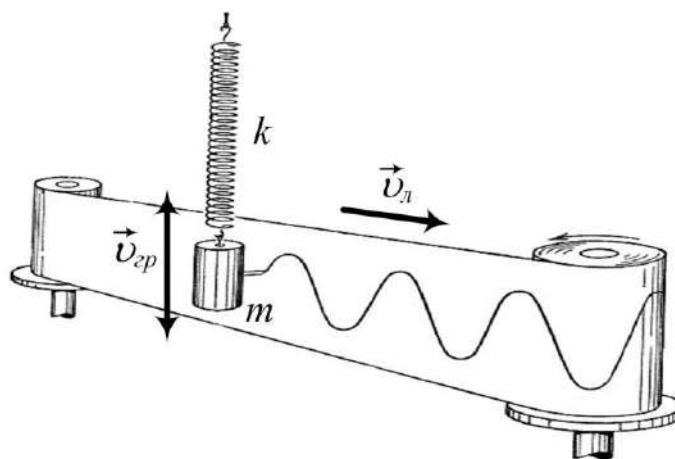


Рис. 1.4. Механический осциллограф [1]

Возможны различные конструкции таких устройств, но их работа основана всегда на том, что маятник не только совершает колебания, но и движется с постоянной скоростью относительно бумажной ленты либо другого объекта, на котором он оставляет следы своего движения.

На рис. 1.4 представлен один из вариантов работы такого устройства [1]. Груз маятника, снабженный пером, совершает колебания вдоль вертикали. Скорость движения маятника $\vec{v}_{гр}$. Перо оставляет следы движения маятника на бумажной ленте. Если лента не движется, то в процессе колебаний перо изобразит на бумаге вертикальную линию, длина которой равна удвоенному значению амплитуды колебаний. Если же заставить ленту двигаться в направлении, перпендикулярном направлению движения маятника с постоянной скоростью $\vec{v}_д$, то смещение ленты относительно положения маятника будет прямо пропорционально времени, и перо станет рисовать на ленте график зависимости смещения маятника от положения равновесия от времени. Это называют разверткой изображения колебаний. Для колебаний пружинного маятника в условиях, когда силами сопротивления среды можно пренебречь, график смещения от времени представляет собой синусоиду, близкую к идеальной.

Основные результаты и выводы

Поведем промежуточный итог. Решая динамическое уравнение движения, которое мы получили из второго закона Ньютона, мы установили следующие факты.

1. Пружинный маятник совершает гармонические колебания, смещение маятника из положения равновесия изменяется по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где ω – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний.

2. Циклическая частота, период и частота гармонических колебаний пружинного маятника определяются формулами (1.18), (1.19) и (1.20).

3. Амплитуда колебаний – максимальное по величине значение изменяющейся по гармоническому закону величины.

4. Фазой гармонических колебаний называется аргумент функции синуса или косинуса $\alpha = \omega t + \varphi$.

5. Начальной фазой гармонических колебаний называется значение фазы колебаний в момент времени $t = 0$.

Контрольные вопросы

1. Что называется амплитудой колебаний?
2. Чему равна амплитуда колебаний материальной точки, если уравнение движения задано в виде $x = 4 \cdot \cos(\pi t/2 + \pi/4)$ см?
3. Величина изменяется по гармоническому закону, что это значит?
4. Записать функцию, представляющую решение дифференциального уравнения для пружинного маятника в отсутствии затухания. На основании этой зависимости опишите, как меняется смещение пружинного маятника во времени.
5. Что называется фазой колебаний?
6. Что называется начальной фазой колебаний?
7. Что называется циклической частотой колебаний?

8. В каких единицах измеряются частота колебаний, период колебаний, циклическая частота колебаний?

9. Выразить циклическую частоту колебаний пружинного маятника через параметры пружинного маятника: массу тела и жесткость пружины.

10. Как найти период колебаний, если известна циклическая частота колебаний? Как найти частоту колебаний, если известна циклическая частота колебаний?

11. Что называется периодом колебаний? Что называется частотой колебаний? Выразить частоту колебаний пружинного маятника через период колебаний пружинного маятника.

12. Чему равна начальная фаза колебаний материальной точки, если уравнение движения материальной точки дано в виде $x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см?

13. Чему равна циклическая частота колебаний материальной точки, если уравнение движения материальной точки дано в виде $x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см?

14. Чему равен период колебаний материальной точки, если уравнение движения материальной точки дано в виде $x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см?

1.7. Скорость движения пружинного маятника

Как известно из раздела «Механика» курса физики, если мы знаем закон движения материальной точки, то можем легко найти законы изменения скорости и ускорения этой точки. По определению [1–3], проекция скорости на ось OX равна $v_x = \frac{dx}{dt}$. Найдем закон изменения проекции скорости на ось OX в рассматриваемом нами случае движения пружинного маятника.

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\cos(\omega t + \varphi)) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi).$$

В полученной нами формуле величина ωA имеет размерность скорости и представляет собой максимальную величину проекции скорости на ось OX в про-

цессе гармонических колебаний. Итак, амплитудное значение проекции скорости на ось OX равно

$$v_{x0} = \omega A. \quad (1.21)$$

Закон изменения проекции скорости на ось OX имеет вид

$$v_x(t) = -v_{0x} \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.22)$$

Проанализируем, насколько соответствует полученная формула тому, как изменяется проекция скорости маятника на горизонтальную ось в действительности. На рис.1.5. показаны графики изменения смещения от положения равновесия $x(t)$ и проекции скорости $v_x(t)$ для пружинного маятника, который начинает свое движение из положения максимального смещения вправо (рис.1.2). Как было показано выше, для такого положения значение начальной фазы колебаний $\varphi_0 = 0$ и законы изменения координаты (смещения) и проекции скорости принимают вид: $x(t) = A \cos \omega t$, и $v_x(t) = -v_{0x} \sin \omega t$.

Как видно из графиков, представленных на рис. 1.5, в начальный момент времени $t_1 = 0$ смещение груза максимально, а его скорость равна нулю. Это соответствует условию поставленной нами задачи. Далее, когда груз проходит положение равновесия в момент времени t_2 , его смещение от положения равновесия равно нулю, а проекция скорости достигает максимальной по модулю величины. Знак «минус» проекции скорости означает, что груз маятника движется в направлении к началу координат (рис. 1.2), т.е. в направлении, противоположном-

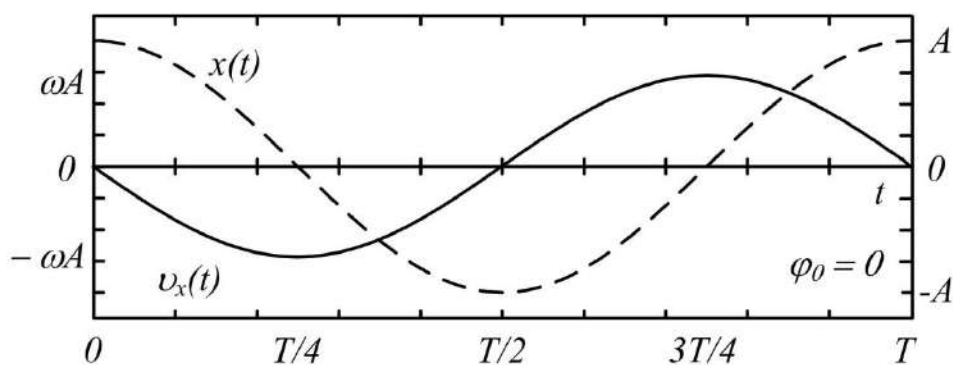


Рис. 1.5. Колебания проекции скорости груза на ось OX в сравнении с колебаниями смещения из положения равновесия

ном оси OX . Найдем момент времени t_2 . В этот момент времени груз проходит положение равновесия, то есть $x(t_2) = 0$. Следовательно, $A\cos(\omega t_2) = 0$.

$$\text{Отсюда } \omega t_2 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2\omega}, \quad t_2 = \frac{\pi \cdot T}{2 \cdot 2\pi} = \frac{T}{4}.$$

Таким образом, груз, начавший движение из правого положения максимального смещения через время, равное четверти периода колебаний, проходит положение равновесия с максимальной по модулю скоростью. Это хорошо согласуется с наблюдаемой картиной колебаний маятника.

Далее в момент времени t_3 смещение груза из положения равновесия составляет $x(t_3) = -A$. Это соответствует тому, что груз достиг положения максимального смещения слева от положения равновесия. Смещение

$$A\cos(\omega t_3) = -A,$$

откуда $t_3 = \frac{T}{2}$.

Через время, равное половине периода колебаний, груз достигает положения максимального смещения слева от положения равновесия и там останавливается. Это также хорошо согласуется с наблюдаемой в эксперименте картиной [1,2].

В момент времени t_4 груз проходит положение равновесия во второй раз, двигаясь в направлении, совпадающем с направлением оси OX , его смещение равно нулю, а проекция скорости достигает максимального положительного значения.

$$A\cos(\omega t_4) = 0.$$

$$\text{Отсюда } \omega t_4 = \frac{3\pi}{2}, \quad t_4 = \frac{3\pi}{2\omega}, \quad t_4 = \frac{3\pi \cdot T}{2 \cdot 2\pi} = \frac{3T}{4}.$$

Обращаю внимание читателей на то, что в данном случае, в отличие от определения момента времени t_2 , мы выбрали другой корень [7] уравнения $A\cos(\omega t_4) = 0$. При этом мы исходили из физического смысла решения. Момент времени t_4 наступает после момента t_2 и поэтому $t_4 > t_2$. В качестве еще одного доказательства этого факта можно обратиться к условию, что проекция скорости груза в момент времени t_4 достигает максимального положительного значения, т.е.

$$v_{0x} = -v_{0x} \sin(\omega t_4),$$

$$\sin \omega t_4 = -1, \quad t_4 = \frac{3\pi}{2\omega}, \quad t_4 = \frac{3\pi \cdot T}{2 \cdot 2\pi} = \frac{3T}{4}.$$

В момент времени t_5 груз возвращается в начальное положение, в котором $x(t_5) = A$, а проекция скорости равна нулю. Это происходит через время, равное одному полному периоду колебаний груза.

Из проделанных нами рассуждений и вычислений следует, что найденный нами закон движения груза хорошо описывает не только изменение координаты груза, но и изменение его скорости. Это еще раз подтверждает правильность вывода о том, что пружинный маятник совершает гармонические колебания.

Основные результаты и выводы

1. В случае, когда малое тело (материальная точка) совершает гармонические колебания по закону $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, проекция скорости этого тела изменяется по закону

$$v_x(t) = -v_{0x} \sin(\omega t + \varphi),$$

где v_{0x} – максимальное (амплитудное) значение проекции скорости, а величину начальной фазы колебаний φ следует определять из начальных условий задачи.

2. Максимальное значение проекции скорости $v_{x0} = \omega A$, где ω – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний.

Контрольные вопросы

1. Запишите законы изменения от времени величины смещения, величины скорости при гармоническом движении пружинного маятника.

2. Зависимость смещения от времени для пружинного маятника определяется формулой $x(t) = A \cos \omega t$. На основании этой формулы получите зависимость скорости маятника от времени.

3. Дайте определение циклической частоты колебаний пружинного маятника.

4. Чему равно амплитудное значение скорости движения пружинного маятника, если известны амплитудное смещение и частота колебаний?

5. Начертите на одном графике зависимости от времени смещения и скорости пружинного маятника. Выберите некоторый момент времени на оси времени, поясните, как различаются фазы смещения и скорости пружинного маятника для этого момента? Что можно сказать о разности фаз для других моментов времени?

6. Период гармонических колебаний тела равен 2,4 с, а амплитуда колебаний равна 12 см. Каково смещение тела от положения равновесия через 0,2 с после прохождения им положения равновесия?

- 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 2 см; 4) 6 см; 5) 12 см.

7. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и частотой $\nu = 2$ Гц. Если смещение точки в начальный момент времени равно своему максимальному значению, то точка колеблется в соответствии с уравнением ...

- 1) $x = 0,04 \cdot \cos 4\pi t$; 2) $x = 0,04 \cdot \sin \pi t$; 3) $x = 0,04 \cdot \cos(\pi/2)t$; 4) $x = 0,04 \cdot \cos \pi t$.

8. Если тело совершает гармонические колебания с амплитудой 15 см и круговой частотой 8 с^{-1} , то максимальное значение модуля скорости тела (в м/с) равно

- 1) 12,00 м/с; 2) 0,02 м/с; 3) 1,20 м/с; 4) 9,60 м/с; 5) 0,50 м/с.

9. Чему равна максимальная величина скорости точки, движение которой описывается уравнением $x = 5 \cdot \sin(2t - \pi/4)$ см? Ответ дать в м/с.

- 1) 0,01 м/с; 2) 0,02 м/с; 3) 0,04 м/с; 4) 0,08 м/с; 5) 0,10 м/с.

1.8. Ускорение пружинного маятника и сила, действующая на него

Проекция ускорения на ось OX есть первая производная по времени от проекции скорости на ту же ось или вторая производная от координаты [1–3]:

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v_x(t)).$$

В нашем случае пружинного маятника, начинающего движение из точки максимального смещения от положения равновесия, зависимость проекции скорости на горизонтальную ось определяется уравнением (1.22). Найдем зависимость от времени проекции ускорения на ось OX .

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}(-A\omega \sin(\omega t)) = -A\omega^2 \cos(\omega t).$$

Обозначим $A\omega^2 = a_0$, a_0 – максимальное (амплитудное) значение проекции ускорения маятника на горизонтальную ось. Теперь можно записать зависимость проекции ускорения на ось OX в виде

$$a_x(t) = -a_{x0} \cos \omega t. \quad (1.23)$$

В общем случае зависимость проекции ускорения на ось OX для колебаний пружинного маятника с произвольной начальной фазой принимает вид

$$a_x(t) = -a_{x0} \cos(\omega t + \varphi) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.24)$$

Для анализа полученного результата снова воспользуемся графиками зависимостей от времени смещения маятника от положения равновесия и проекций на горизонтальную ось скорости и ускорения маятника. Эти графики приведены на рис. 1.6. Графики построены для маятника, начинающего свободное движение из точки с максимальным смещением (рис.1.2).

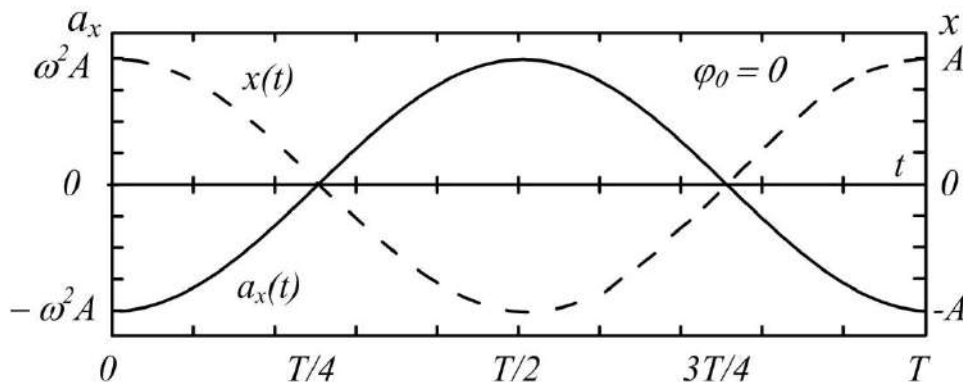


Рис. 1.6. Изменение проекции ускорения груза на ось OX в сравнении с изменением смещения груза из положения равновесия

Как и на рис.1.5, момент времени $t_1 = 0$ — это начало движения, в этот момент груз смещен вправо на максимальное расстояние, его скорость равна нулю, а ускорение по модулю максимально, но направлено к положению равновесия, т.е. в сторону убывания координаты x и потому проекция ускорения отрицательна. Как следует из второго закона Ньютона, величина ускорения пропорциональна силе, приложенной к телу. В нашем случае это сила упругости деформированной пружины, а она пропорциональна величине деформации [1,2,3]. В начальный момент времени деформация пружины максимальна, следовательно, сила, действующая на маятник и ускорение маятника также достигают максимальных величин.

В момент времени $t_2 = \frac{T}{4}$, где T — период колебаний, груз с максимальной по величине скоростью проходит положение равновесия, двигаясь в направлении убывания координаты. Деформация пружины в этот момент времени равна нулю, следовательно, сила, действующая на тело, и его ускорение также равны нулю. Далее, в положении максимального смещения, в момент времени $t_3 = \frac{T}{2}$ груз останавливается, а его ускорение максимально и проекция этого ускорения положительна. Проанализировать дальнейшее изменение проекции ускорения тела и ее поведение в моменты времени $t_4 = \frac{3T}{4}$ и $t_5 = T$ предлагаем читателю самостоятельно.

По изменению проекции ускорения на горизонтальную ось можно установить, как изменяется проекция силы или равнодействующей сил, приложенных к телу, совершающему гармонические колебания. В случае пружинного маятника сила упругости, которая приводит маятник в движение, по величине пропорциональна смещению маятника от положения равновесия, которое, в свою очередь, равно деформации пружины [1,2,3]. Согласно закону Гука $F_x = -kx$, k — коэффициент жесткости пружины, деформация пружины равна величине смещения груза, которое определяется уравнением (1.11). Поэтому

$$F_x(t) = -kx(t) = -kA\cos(\omega t + \varphi). \quad (1.25)$$

В других случаях, когда известно, что тело совершает гармонические колебания, но такое движение тела обусловлено действием нескольких сил, то проекцию их равнодействующей на горизонтальную ось можно найти из второго закона Ньютона. Согласно второму закону Ньютона [1,2,3], проекция равнодействующей на ось Ox $F_x = ma_x$. Проекция ускорения a_x тела, совершающего гармонические колебания, изменяется со временем согласно формуле (1.23). Тогда

$$F_x(t) = -ma_{x0}\cos(\omega t + \varphi). \quad (1.26)$$

Основные результаты и выводы

1. В случае, когда малое тело (материальная точка) совершает гармонические колебания по закону $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, проекция ускорения этого тела изменяется по закону

$$a_x(t) = -a_{0x}\cos(\omega t + \varphi),$$

где a_{0x} – максимальное (амплитудное) значение проекции ускорения тела, а величину начальной фазы колебаний φ следует определять из начальных условий задачи.

2. Максимальное значение проекции ускорения такого тела равно

$$a_{x0} = \omega^2 A,$$

где ω – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний.

3. Равнодействующая сил, приложенных к малому телу, совершающему гармонические колебания, равна

$$F_x(t) = -ma_{0x}\cos(\omega t + \varphi).$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Гука. Как определяется направление силы упругости деформированной пружины?

2. В процессе движения пружинного маятника массы m сила упругости меняется по определенному закону. Запишите закон, дающий представление о

характере изменения силы упругости от времени, с использованием информации о смещении $x(t) = A \cos \omega t$ пружинного маятника.

3. Запишите гармонический закон, дающий представление о характере изменения силы упругости от времени в процессе колебаний пружинного маятника, если известно, что смещение пружинного маятника $x(t) = A \cos \omega t$, а коэффициент жесткости равен k .

4. Запишите зависимость от времени величины силы упругости деформированной пружины, если ускорение пружинного маятника массы m определяется формулой $a(t) = -A \omega^2 \cos \omega t$.

5. В каком положении пружинного маятника времени сила, действующая на маятник, максимальна? В каком положении пружинного маятника времени сила, действующая на маятник, минимальна?

6. Начертите графики временных зависимостей смещения и силы в процессе колебаний пружинного маятника, если скорость пружинного маятника в начальный момент времени максимальна. Какова фаза смещения, какова фаза силы в начальный момента движения?

7. Найдите амплитудное значение ускорения движения пружинного маятника, если смещение имеет вид $x(t) = A \cos \omega t$.

8. Найдите значение амплитудного ускорения при движении пружинного маятника, зная амплитудную скорость и частоту колебаний.

9. К чему стремится значение ускорения при движении пружинного маятника, если скорость движения пружинного маятника стремится к минимальному значению? Чему равно значение скорости движения пружинного маятника, если ускорение стало максимально по значению?

10. Нарисуйте графики зависимостей от времени для смещения, скорости и ускорения пружинного маятника.

11. Подробно расскажите о движении пружинного маятника и взаимосвязанности поведения смещения, скорости и ускорения, опираясь на представленный вами график зависимости от времени всех этих величин.

12. Точка совершает гармонические колебания с периодом 0,5 с и амплитудой 2 см. Какова максимальная величина ускорения этой точки?

- 1) 3,2 м/с²; 2) 4,6 м/с²; 3) 6,4 м/с²; 4) 8,0 м/с²; 5) 12,0 м/с².

13. Чему равна максимальная величина ускорения точки, движение которой описывается уравнением $x = 5 \cos(2t + \pi/4)$ см?

- 1) 0,02 м/с²; 2) 0,04 м/с²; 3) 0,08 м/с²; 4) 0,16 м/с²; 5) 0,20 м/с².

14. Чему равна максимальная величина силы, действующая на материальную точку, если ее масса равна 10 г и ее колебательное движение описывается уравнением $x = 5 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см ?

- 1) 308 мкН; 2) 197 мкН; 3) 500 мкН; 4) 985 мкН; 5) 1970 мкН.

15. Материальная точка колеблется по закону $x = 0,5 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Чему равна максимальная величина импульса материальной точки (в кг·м/с), если масса материальной точки 10 г?

1.9. Фаза гармонических колебаний и ее физический смысл

Как мы с вами установили, закон движения пружинного маятника – это уравнение гармонических колебаний. Смещение маятника из положения равновесия изменяется по формуле $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где ω – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний. Выражение в скобках

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (1.27)$$

называется фазой колебаний, величина φ_0 – начальной фазой колебаний. Величину проекции скорости движения маятника на горизонтальную ось (1.22), можно найти как

$$v_x(t) = -v_{0x} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $v_{0x} = -\omega A$ – максимальное значение проекции скорости.

Вообще говоря, динамическое состояние материальной точки определяется значениями ее координат и проекций импульса на оси координат [1,2]. В нашем простом случае одномерного движения для определения динамического состояния маятника, кроме амплитуды и циклической частоты колебаний, достаточно знать его горизонтальную координату и величину проекции импульса на ось OX . Проекция импульса $p_x = mv_x$ (m – масса маятника), поэтому для определения динамического состояния маятника в любой момент времени нам достаточно уравнений $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $v_x(t) = -v_{0x}\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Уравнения для смещения и скорости можно с учетом соотношения (1.27) переписать так:

$$x(t) = A\cos\varphi, \quad (1.28)$$

$$v_x(t) = -v_{0x}\sin\varphi. \quad (1.29)$$

Фаза колебаний φ зависит от времени и начальной фазы колебаний и определяется уравнением (1.27). Если нам известна фаза колебаний в данный момент времени, то чтобы определить динамическое состояние маятника, нет необходимости указывать значение времени, циклической частоты и начальной фазы колебаний.

Например, известно, что в некоторый момент времени фаза колебаний маятника массой $m = 10$ г $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Кроме того, известно, что амплитуда колебаний составляет 10 см, а максимальная скорость $v_0 = 1$ м/с. Тогда, согласно уравнениям (1.28) и (1.29), в данный момент времени маятник проходит положение равновесия, так как его координата $x = A\cos\varphi = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Проекция скорости маятника $v_x(t) = -v_0\sin\varphi = -1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (м/с). То есть маятник движется в направлении, противоположном направлению оси OX , со скоростью 1 м/с. Вектор импульса маятника направлен так же, как и вектор скорости, и по величине равен $p = m|v_x| = 0,01$ (кг·м/с).

Таким образом, зная фазу колебаний, мы можем полностью определить динамическое состояние маятника.

У двух разнородных колебательных систем будут разные периоды колебаний, максимальные скорости движения, амплитуда колебаний и т. д. Но в любом случае, если фаза колебаний $\varphi = \pi/2$, маятник проходит положение равновесия, причем его скорость направлена в сторону убывания координаты. Если же $\varphi = \pi$, то маятник достиг положения максимального смещения, причем он сместился в сторону, противоположную первоначальному смещению. Анализ фаз колебаний позволяет сравнивать протекание совершенно разнородных колебательных процессов и выявлять в них подобные элементы.

Основные результаты и выводы

Фаза гармонического колебания содержит важную информацию о состоянии колеблющегося тела. Значение фазы колебаний показывает, на какой стадии находится колебательный процесс в данный момент времени. Зная фазу и уравнение гармонического колебания, можно определить значения всех параметров колебательного процесса в данный момент времени.

Контрольные вопросы

1. Запишите закон движения пружинного маятника в виде дифференциального уравнения. Запишите решение этого уравнения.
2. Что называется фазой колебаний?
3. Какую информацию о движущемся объекте можно получить, зная фазы колебаний в данный момент времени? Приведите примеры.
4. О каких величинах при описании колеблющегося объекта идет речь, когда утверждают, что динамическое состояние объекта известно?
5. Как начальные условия определяют начальную фазу гармонических колебаний?
6. Как называется величина, стоящая под знаком косинуса в уравнении гармонического колебаниях $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$?
7. Уравнение колебаний имеет вид $x = 0,7 \cos 2,5\pi(t + 0,2)$. Какова начальная фаза колебаний (в рад/с)?

- 1) 1,57; 2) 0,5; 3) 0,2; 4) 3,14; 5) 7,85.

1.10. Энергия тела, совершающего гармонические колебания

Как и для любой механической системы, полная механическая энергия пружинного маятника равна сумме его кинетической E_k и потенциальной U энергии [1,2,3]:

$$E = E_k + U.$$

В рассматриваемой колебательной системе трение отсутствует, действуют только консервативные силы упругости. Следовательно, согласно закону сохранения энергии, изменение полной механической энергии [1,2,3] в процессе колебаний будет равно нулю:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta U = 0.$$

В то же время отдельно взятые кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника в процессе гармонических колебаний изменяются. Рассмотрим, как это происходит.

Начнем с изменения потенциальной энергии деформированной пружины. Как известно, изменение потенциальной энергии упругого тела при изменении абсолютной деформации тела от величины x_1 до величины x_2 можно вычислить по формуле [1,2,3]

$$\Delta U = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Если принять за начало отсчета положение равновесия маятника, в котором величина смещения $x = 0$, то можно считать, что величина потенциальной энергии равна

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

В процессе гармонических колебаний смещение груза от положения равновесия можно определить как

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний, ω – циклическая частота колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний. Величина потенциальной энергии, отсчитываемой от положения равновесия маятника, будет равна

$$U = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.30)$$

Если колебания начались, когда груз был смещен из положения равновесия на максимальное расстояние вправо, тогда при $t = 0$ $x = A$ и начальная фаза $\varphi_0 = 0$. При таких условиях потенциальная энергия системы достигнет своего максимального значения, равного

$$U_0 = \frac{kA^2}{2}. \quad (1.31)$$

Выражение (1.30) для потенциальной энергии можно переписать, воспользовавшись известной из тригонометрии [7] формулой

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha).$$

Применив эту формулу, и с учетом (1.31) мы получим закон изменения потенциальной энергии маятника:

$$U = \frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi_0). \quad (1.32)$$

Из формулы (1.32) видно, что величина потенциальной энергии всегда положительна и совершает гармонические колебания с частотой в два раза больше, чем частота колебаний груза. На рис. 1.7 приведены графики измене-

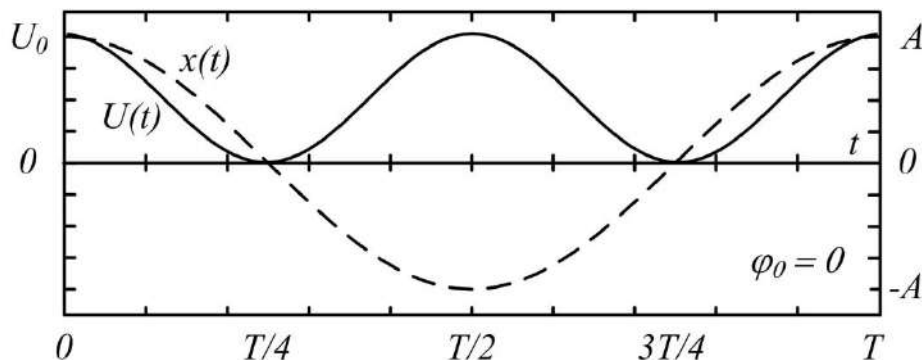


Рис. 1.7. Колебания потенциальной энергии пружинного маятника в сравнении с колебаниями смещения из положения равновесия

ния потенциальной энергии колеблющегося груза (сплошная линия) и смещения груза из положения равновесия (пунктирная линия).

Теперь рассмотрим, как изменяется кинетическая энергия груза в процессе гармонических колебаний. Величина кинетической энергии равна [1,2,3] $E_k = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза, v – его скорость. Если мы описываем величину смещения груза в процессе колебаний формулой $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, то величина проекции скорости на горизонтальную ось определяется формулой:

$$v_x(t) = -v_{0x}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Кинетическая энергия груза будет изменяться в зависимости от времени, как

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.33)$$

Воспользуемся еще одной формулой из тригонометрии [7] $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, и получим

$$E_k = \frac{E_{k0}}{2} - \frac{E_{k0}}{2}\sin(2\omega t + 2\varphi_0). \quad (1.34)$$

Здесь E_{k0} – максимальное значение кинетической энергии груза.

Кинетическая энергия груза также совершает гармонические колебания с частотой, в два раза большей, чем частота колебаний груза. Графики изменения величины кинетической энергии груза (сплошная линия) и смещения груза от положения равновесия (пунктир) для случая, когда груз начал движение из положения максимального смещения, показаны на рис. 1.8.

Сравним максимальные величины кинетической и потенциальной энергии груза. Величина максимальной скорости движения маятника определяется частотой и амплитудой колебаний $v_0 = \omega A$. Максимальное значение кинетической энергии $E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{mkA^2}{2m} = \frac{kA^2}{2} = U_0$.

Здесь мы воспользовались тем, что циклическая частота колебаний маятника равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

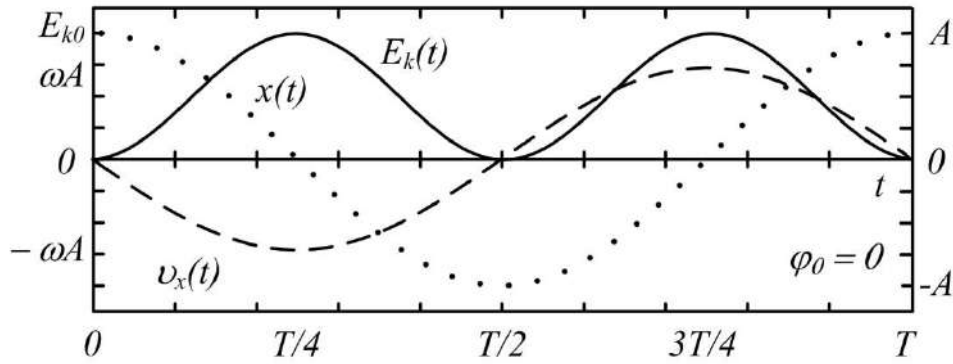


Рис. 1.8. Колебания кинетической энергии маятника в сравнении с колебаниями скорости и смещения из положения равновесия

Итак, максимальное значение кинетической энергии маятника равно максимальному значению его потенциальной энергии. Это согласуется с тем, что для маятника выполняется закон сохранения энергии. Вычислим значение полной механической энергии маятника в произвольный момент времени t . Для этого воспользуемся формулами для потенциальной и кинетической энергии (1.30) и (1.33). Учтем также, что максимальные значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой.

$$\begin{aligned}
 E = E_k + U &= \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{mv_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\
 &= \frac{kA^2}{2} \left(\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в любой момент времени полная механическая энергия пружинного маятника равна максимальному значению его потенциальной энергии и одновременно максимальному значению его кинетической энергии. В любой момент колебательного процесса закон сохранения механической энергии, как и следовало ожидать, выполняется. На рис. 1.9 показано, как изменяется потенциальная U (сплошная линия) и кинетическая E_k (пунктир) энергия маятника в процессе колебаний. По оси абсцисс отложено время, T – период колебаний смещения, скорости и ускорения пружинного маятника. По оси ординат – энергия, E – полная механическая энергия маятника. Еще раз подчеркнем, что сумма кинетической и потенциальной энергий всегда остается постоянной.

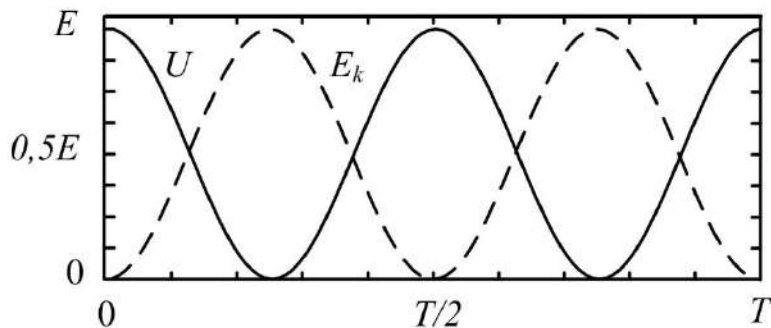


Рис. 1.9. Изменение потенциальной и кинетической энергии в процессе гармонических колебаний

Основные результаты и выводы

1. Потенциальная энергия тела, совершающего гармонические колебания, изменяется по закону

$$U = U_0 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi_0).$$

Максимальная величина потенциальной энергии, если отсчитывать ее от положения равновесия тела, равна

$$U_0 = \frac{kA^2}{2},$$

где k – коэффициент жесткости, A – амплитуда колебаний.

2. Кинетическая энергия тела, совершающего гармонические колебания,

$$E_k = E_{k0} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{E_{k0}}{2} - \frac{E_{k0}}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi_0).$$

Максимальная величина кинетической энергии

$$E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2},$$

где m – масса тела, v_0 – максимальная величина скорости тела.

3. Максимальные величины потенциальной и кинетической энергии тел равны

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

В любой момент времени в процессе колебаний выполняется закон сохранения энергии

$$E = E_k + U = E_{k0} = U_0.$$

Контрольные вопросы

1. Из каких видов энергий состоит полная механическая энергия пружинного маятника?
2. При выполнении каких условий полная механическая энергия пружинного маятника не будет меняться?
3. Запишите формулу, показывающую, как меняется со временем величина потенциальной энергии системы.
4. Как найти максимальное значение потенциальной энергии системы?
5. Запишите формулу зависимости кинетической энергии системы от времени. Определите максимальное значение кинетической энергии системы.
6. С какой частотой потенциальная энергия совершает гармонические колебания? С какой частотой кинетическая энергия совершают гармонические колебания?
7. Покажите на графике зависимости от времени потенциальной, кинетической энергий.
8. Поясните, используя графики зависимостей от времени потенциальной и кинетической энергий, каков характер поведения полной энергии?
9. Как изменится величина максимальной кинетической энергии материальной точки, совершающей гармонические колебания с неизменной амплитудой, при уменьшении частоты колебаний этой точки?
10. Материальная точка совершает гармонические колебания. Частота колебаний этой точки 10 Гц. Найти период колебаний её кинетической энергии.
 - 1) 0,1 с;
 - 2) 0,2 с;
 - 3) 0,05 с;
 - 4) 0,0628 с;
 - 5) 0,0314 с.

1.11. Колебания физического маятника

Груз на пружине, совершающий колебания в горизонтальной плоскости без трения, мы называли пружинным маятником. Но со словом «маятник», скорее всего, ассоциируется другое устройство, например, маятник в старинных часах. Это достаточно большое тело, которое может совершать колебательное движение вокруг некоторой, обычно горизонтальной, оси. Если в процессе колебаний тело отклоняется от положения равновесия на малую величину, то колебания называют малыми. Такое массивное тело, имеющее неподвижную ось вращения и совершающее малые колебания вокруг этой оси, называется физическим маятником [1, 2].

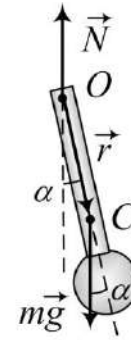


Рис. 1.10. Физический маятник

Давайте попытаемся описать движение такого маятника. Предположим, что тело может совершать колебания вокруг горизонтальной оси и его отклонили от положения равновесия, так, что линия, соединяющая ось вращения и центр масс, тела отклонилась на небольшой угол α от вертикали (рис. 1.10). При этом мы будем считать, что скорость движения этого тела невелика, и силой сопротивления воздуха его движению, которая пропорционально скорости тела, можно пренебречь. На тело, отклоненное от положения равновесия, как это показано на рис.1.10, действует сила тяжести и сила реакции оси, вокруг которой вращается тело.

Так как тело совершает вращательное движение, запишем основной закон вращательного движения для тела с постоянным моментом инерции [1, 2, 3]:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

где \vec{M} – суммарный момент сил, приложенных к телу; I – момент инерции тела; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, с которым движется тело. К физическому маятнику приложены две силы – сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции оси \vec{N} . Точкой приложения силы тяжести является центр масс маятника, обозначенный на рис.1.10 буквой C . Вектор \vec{r} определяет положение центра масс. Момент силы тяжести [1, 2]

$$\vec{M}_T = [\vec{r}, m\vec{g}].$$

Ось вращения на рис. 1.10 совпадает с координатной осью OZ , направленной «на наблюдателя». Проекция момента силы тяжести на горизонтальную ось вращения OZ , которая также называется моментом силы относительно оси OZ , равна

$$M_z = -|\vec{R}| \cdot |m\vec{g}| \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов \vec{r} и $m\vec{g}$. Точка приложения силы реакции \vec{N} лежит на оси вращения, поэтому вращающий момент этой силы равен нулю. Таким образом, в проекции на ось OZ уравнение основного закона динамики вращательного движения можно записать так:

$$I\varepsilon_z = -rmgs\sin\alpha. \quad (1.35)$$

Угол α – это величина углового перемещения маятника, поэтому проекция углового ускорения на ось OZ

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Теперь динамическое уравнение движения маятника (1.35) можно переписать так:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -rmgs\sin\alpha.$$

При малых отклонениях маятника от положения равновесия $\alpha \rightarrow 0$, поэтому можно считать, что $\sin\alpha = \alpha$. И тогда

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rmg}{I}\alpha = 0. \quad (1.36)$$

Мы получили дифференциальное уравнение движения физического маятника в отсутствие трения. По своему виду это уравнение похоже на уравнение гармонических колебаний (1.4), которое можно записать так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

где $\omega^2 = k/m$ – квадрат циклической частоты гармонических колебаний. Ранее мы установили, что решением дифференциального уравнения гармонических колебаний является функция

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Очевидно, что в случае движения физического маятника это решение будет иметь вид

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.37)$$

где α_0 – максимальный угол отклонения маятника от вертикали, ω – циклическая частота колебаний физического маятника, φ_0 – начальная фаза колебаний. При этом циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{rmg}{I}}, \quad (1.38)$$

а период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{rmg}}. \quad (1.39)$$

Из уравнения (1.37) легко получить уравнение, описывающее изменение смещения центра масс маятника или края маятника от положения равновесия. Так, смещение края маятника (рис.1.7) равно $x = Ltg\alpha$, где L – длина маятника. Для малых углов $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$. Умножим левую и правую части уравнения (1.37) на L :

$$L\alpha(t) = L\alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Учитывая малость углов, получим

$$L \cdot tg\alpha(t) = L \cdot tg\alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Это также будет уравнение гармонических колебаний.

Основные результаты и выводы

1. Физическим маятником называется произвольное тело, имеющее неподвижную ось вращения и совершающее малые колебания вокруг этой оси.

При этом условие малости колебаний является существенным.

2. Угол отклонения физического маятника от положения равновесия изменяется по закону гармонических колебаний:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

3. Циклическая ω частота и период T колебаний физического маятника можно определить по формулам

$$\omega = \sqrt{\frac{r m g}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{r m g}},$$

где r – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, m – масса маятника, g – ускорение свободного падения, I – момент инерции маятника относительно оси вращения.

4. Следует помнить, что все эти результаты справедливы только для малых колебаний. При существенных отклонениях от положения равновесия они неверны.

Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником?

2. Запишите основной закон вращательного движения применительно к физическому маятнику.

3. Моменты каких сил надо учитывать при описании колебаний физического маятника?

4. Какие условия накладываются на угловые отклонения маятника от положения равновесия при решении задач о колебаниях физического маятника?

5. Запишите дифференциальное уравнение для описания движения физического маятника в проекции на ось вращения OZ .

6. Запишите решение дифференциального уравнения гармонических колебаний физического маятника.

7. Как рассчитываются циклическая частота и период колебаний для гармонических колебаний физического маятника?

8. Как рассчитать момент инерции маятника относительно оси вращения? Сформулируйте теорему Штейнера.

1.12. Колебания математического маятника.

Приведенная длина физического маятника

Математическим маятником называется малое тело (материальная точка), подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити и совершающая малые колебания [1,2,3]. Очевидно, что математический маятник является частным случаем физического маятника и многие результаты, полученные для физического маятника, можно распространить на случай математического маятника. Математический маятник и силы, действующие на него в процессе колебаний, изображены на рис.1.11.

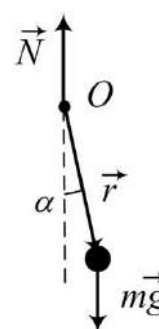


Рис. 1.11. Математический маятник

Так как математический маятник можно рассматривать как частный случай физического, воспользуемся дифференциальным уравнением колебаний физического маятника (1.36) и преобразуем его для случая математического маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{r}{l} \alpha = 0.$$

В случае математического маятника расстояние от оси вращения до точки подвеса равно длине маятника, так как подвешенное тело мы считаем материальной точкой, $r = l$. Момент инерции точечного тела, находящегося на рас-

стоянии l от точки подвеса, $I = ml^2$. После подстановки этих выражений в дифференциальное уравнение колебаний получаем

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0. \quad (1.40)$$

Это и будет дифференциальное уравнение колебаний математического маятника. Его вид совпадает с видом уравнения, описывающего гармонические колебания груза на пружине (1.4). Следовательно, математический маятник также совершает гармонические колебания, угол отклонения математического маятника от вертикали изменяется по тому же закону, что и для физического маятника:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Изменение смещения тела, находящегося на конце нити, от положения равновесия можно тем же уравнением, что и смещение края физического маятника:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

При описании математического маятника, как и при описании физического следует помнить, что все результаты справедливы только для его малых колебаний.

Как было показано ранее, коэффициент перед неизвестной функцией в дифференциальном уравнении гармонических колебаний равен квадрату циклической частоты. Поэтому циклическая частота гармонических колебаний математического маятника равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (1.41)$$

а период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.42)$$

Период и частота колебаний математического маятника не зависят от его массы. Последняя формула носит название формулы Гюйгенса, в честь нидер-

ландского физика Христиана Гюйгенса (1629 – 1695), который впервые получил ее, исследуя колебания различных тел [2, 8].

Для описания малых колебаний реальных тел, которые можно рассматривать как физические маятники, иногда используют такую величину, как приведенная длина физического маятника. Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника. Вычислим приведенную длину [1, 2]. Периоды колебаний физического и математического маятников равны,

$$2\pi \sqrt{\frac{I}{rmg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}.$$

Здесь I – момент инерции физического маятника относительно его оси вращения; r – расстояние от точки подвеса до центра масс физического маятника; m – масса физического маятника; $l_{\text{пр}}$ – длина математического маятника, которую мы называем приведенной длиной физического. Получим из формулы, записанной выше, значение приведенной длины физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{rm}. \quad (1.43)$$

Основные результаты и выводы

1. Математическим маятником называется малое тело, подвешенное на невесомой и нерастяжимой нити и совершающее малые колебания.

2. Колебания математического маятника являются гармоническими, их циклическая частота и период определяются формулами:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина маятника.

3. Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{rm},$$

где I – момент инерции физического маятника относительно его оси вращения, r – расстояние от точки подвеса до центра масс физического маятника, m – масса физического маятника.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического маятника.
2. Как рассчитать момент инерции тела для математического маятника?
3. Запишите дифференциальное уравнение колебаний математического маятника и решение для него.
4. Чему равны циклическая частота и период гармонических колебаний математического маятника?
5. Запишите формулу Томсона для периода колебаний математического маятника.
6. Какие параметры математического маятника влияют на величину периода колебаний математического маятника?
7. Во сколько раз изменится период колебаний, если длину нити увеличить в 4 раза?
8. Как изменится период колебаний математического маятника, если его перенести с Земли на Луну?
9. Как изменится период колебаний математического маятника, если он будет подниматься вертикально вверх с постоянным ускорением?
10. Как изменится период колебаний математического маятника, если он будет подниматься вертикально вверх равнозамедленно?
11. Как изменится период колебаний математического маятника, если он будет двигаться по горизонтальной прямой равноускоренно? Как изменится пе-

риод колебаний математического маятника, если он будет двигаться по горизонтальной прямой равнозамедленно?

12. Что называют приведенной длиной физического маятника?

13. Запишите формулу для вычисления приведенной длины физического маятника.

1.13. Условия возникновения гармонических колебаний.

Квазиупругие силы

Рассматривая различные механические колебательные процессы, такие как колебания пружинного маятника, колебания физического и математического маятников, мы установили, что гармонические колебания возникают в механической системе, если динамическое уравнение движения имеет вид дифференциального уравнения гармонических колебаний (1.4). Это уравнение также можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.44)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

имеет физический смысл циклической частоты гармонических колебаний, k – коэффициент жесткости пружины, m – масса груза маятника. Такой вид динамического уравнения движения получается потому, что сила упругости прямо пропорциональна смещению груза из положения равновесия x и направлена в сторону, противоположную этому смещению, т.е. в направлении положения равновесия. В этом случае уравнение второго закона Ньютона можно записать так:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (1.45)$$

Из вышесказанного следует, что гармонические колебания в механической системе возникают при выполнении двух условий.

1. Должно существовать положение устойчивого равновесия, т.е. такое положение тела, что при выведении его из этого положения возникают силы, стремящиеся вернуть тело в это положение равновесия. Такие силы иногда называют возвращающими силами.

2. Величина возвращающей силы должна быть прямо пропорциональна величине смещения тела из положения равновесия, $|\vec{F}| = k'x$. Природа возвращающей силы может быть какой угодно. Это также может быть равнодействующая многих сил различной природы.

В таких случаях уравнение второго закона Ньютона будет иметь вид (1.45), а уравнение колебаний (1.44). Циклическую частоту колебаний можно будет рассчитать по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}},$$

где k' – так называемый квазиупругий коэффициент. Возвращающую силу, прямо пропорциональную смещению тела от положения равновесия, называют квазиупругой силой [1, 2]. Приставка «квази» означает «похожая на». То есть рассматриваемая сила или равнодействующая сил похожа на силу упругости тем, что ее величина прямо пропорциональна смещению тела. Величину квазиупругого коэффициента или формулу, по которой его можно рассчитать, следует определять из второго закона Ньютона, записанного для рассматриваемой системы. Рассмотрим несколько примеров возникновения гармонических колебаний в механических системах.

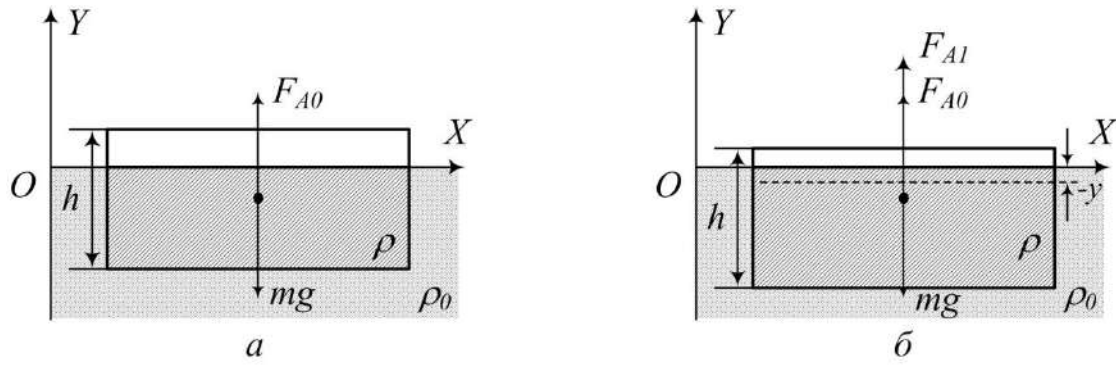


Рис. 1.12. Брусok плавает в воде: *a)* в положении равновесия; *б)* после небольшого погружения

Колебания тела, плавающего в воде. Пусть тело, например, деревянный брусok, плавает в воде. Если его вывести из равновесия, погрузив в воду немного больше, чем в состоянии равновесия, начнутся вертикальные колебания бруска (рис. 1.12). Плотность дерева ρ , плотность воды ρ_0 . h – толщина бруска. Определим закон движения бруска, частоту и период его колебаний.

Сначала рассмотрим условие плавания бруска в положении равновесия (рис. 1.12,*a*). Брусok находится в равновесии, поэтому его ускорение равно нулю и второй закон Ньютона в этом случае имеет вид

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{A0}.$$

Здесь m – масса бруска, \vec{F}_{A0} – сила Архимеда, действующая на часть бруска, погруженную в воду [1, 2]. Для величин проекций сил можно записать:

$$mg = F_{A0}.$$

После дополнительного погружения бруска на величину y (рис. 1.12,*б*) сила Архимеда, величина которой равна $F_A = \rho_0 g V_{\text{п}}$, где $V_{\text{п}}$ – объем погруженной части бруска, возрастет, так как возрастет $V_{\text{п}}$. Погруженный в воду объем увеличится на величину $V_1 = Sy$, где S – площадь поперечного сечения бруска; y – величина, на которую погрузили дополнительно брусok. Величину архимедовой силы, действующей на брусok в этом случае, можно представить, как

$$F'_A = \rho_0 g V_0 + \rho_0 g V_1 = F_{A0} + F_{A1} = F_{A0} + \rho_0 g Sy.$$

Здесь V_0 – объем бруска, погруженного в воду в положении равновесия.

Теперь запишем второй закон Ньютона для бруска, выведенного из состояния равновесия [1, 2, 3] (рис.1.12,б)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{A0} + \vec{F}_{A1}.$$

Для проекций сил на вертикальную ось это уравнение выглядит так:

$$ma = -mg + F_{A0} + F_{A1}.$$

Как мы установили ранее, по величине сила тяжести равна архимедовой силе, действовавшей в состоянии равновесия бруска, поэтому можно записать

$$ma = F_{A1}.$$

Далее учтем, что проекция ускорения на ось OY есть вторая производная по времени от смещения бруска из положения равновесия, и что при смещении вниз дополнительная сила Архимеда F_{A1} направлена вверх, то есть в сторону, противоположную смещению. В результате получим

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho_0 g S y.$$

Масса бруска $m = \rho S h$, поэтому последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\rho_0 g S}{\rho S h} y,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho_0 g}{\rho h} y = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (1.44), мы видим, что дифференциальное уравнение гармонических колебаний, происходящих с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_0 h}{\rho g}}.$$

Смещение бруска из положения равновесия подчиняется закону

$$y = y_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Величину начальной фазы колебаний бруска φ_0 можно найти из начальных условий. Если в начале процесса на брусок действовали некоторой силой F и дополнительно погрузили его в воду, то в момент времени $t = 0$ смещение бруска из положения равновесия было максимальным, $y = y_0$. Поэтому

$$\cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = \frac{y_0}{y_0} = 1,$$

$$\varphi_0 = 0.$$

Величину амплитуды колебаний можно было бы найти, если бы нам была известна сила F , с которой действовали на брусок перед началом колебаний. Тогда амплитуду y_0 можно было бы найти из уравнения

$$F = \rho_0 g S y_0.$$

Отметим также еще один интересный момент. В рассматриваемом случае величина возвращающей силы пропорциональна смещению бруска из положения равновесия при любой возможной величине этого смещения, вплоть до полного погружения бруска под воду. Это видно из того факта, что «дополнительная» сила Архимеда, связанная с погружением бруска, равна

$$F_{A1} = \rho_0 g S y.$$

Это означает, что в отличие от колебаний математического или физического маятников, колебания бруска будут оставаться гармоническими, даже перестав быть малыми. Это – довольно редкая ситуация. Чаще всего гармоническими являются малые колебания, когда смещение из положения равновесия невелико. В таких случаях возвращающую силу часто можно приблизительно рассматривать, как прямо пропорциональную смещению, и возникающие колебания с высокой степенью точности можно считать гармоническими. В качестве примера такой ситуации рассмотрим еще одну задачу.

Колебания точечного электрического заряда в кулоновом поле. Пусть два точечных электрических заряда, соединенные тонкой изолирующей нитью длины l , надежно закреплены. Заряды положительны и каждый из них имеет величину Q . По нити может без трения скользить бусинка массой m , также обладающая положительным электрическим зарядом. Величина заряда бусинки q . Бусинку выводят из положения равновесия на небольшое расстояние и отпускают (рис.1.13). Как она будет двигаться?

В положении равновесия векторная сумма сил, приложенных к телу, равна нулю. Если считать, что вертикальную силу тяжести компенсирует вертикаль-

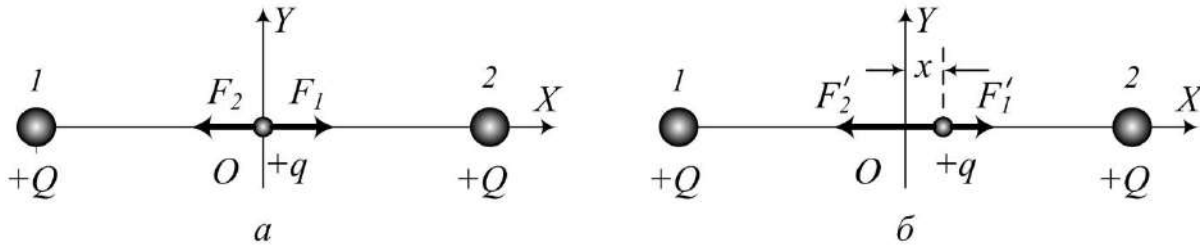


Рис. 1.13. Бусинка на нити между двумя зарядами: а) в положении равновесия; б) в положении максимального смещения

ная сила упругости нити, то кулонова сила [9,10] F_1 , действующая со стороны заряда 1 на бусинку в положении равновесия, равна кулоновой силе F_2 , действующей со стороны заряда 2. Так как $Q_1 = Q_2 = Q$, положение равновесия находится на равном расстоянии от каждого из закрепленных зарядов. Это расстояние равно половине длины нити $l/2$. Выберем начало отсчета смещения бусинки в этой точке (рис. 1.13,а).

Если бусинку сместили на малую величину x из положения равновесия, то равенство сил, действующих со стороны закрепленных зарядов, нарушается (рис. 1.13,б). Результирующая сила будет направлена в сторону того заряда, который находится дальше от бусинки. Запишем второй закон Ньютона для проекций сил на горизонтальную ось:

$$ma_x = F'_1 - F'_2,$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{qQ}{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2} - k \frac{qQ}{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2},$$

где $k = 1/4\pi\epsilon_0$ [9, 10].

Преобразуем правую часть полученного выражения:

$$k \frac{qQ}{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2} - k \frac{qQ}{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2} = \frac{kqQ}{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} \left(\frac{l^2}{4} - lx + x^2 - \frac{l^2}{4} - lx - x^2 \right) =$$

$$= - \frac{kqQ}{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} 2lx.$$

Если смещение бусинки из положения равновесия мало и выполняется условие $x \ll l$, то величиной x в скобках в знаменателе можно пренебречь. Тогда уравнение второго закона Ньютона приобретет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{32kqQ}{l^3} x.$$

Это означает, что на бусинку при выведении ее из положения равновесия действует возвращающая сила, величина которой прямо пропорциональна величине смещения. Преобразуем вышенаписанное уравнение и получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{8qQ}{\pi \epsilon_0 l^3} x = 0.$$

Уравнение второго закона Ньютона имеет вид, аналогичный уравнению (1.45), а дифференциальное уравнение колебаний бусинки аналогично уравнению (1.44). Отсюда следует, что бусинка будет совершать гармонические колебания с циклической частотой, удовлетворяющей условию

$$\omega^2 = \frac{8qQ}{m\pi\epsilon_0 l^3}.$$

Период таких колебаний

$$T = \pi l \sqrt{\frac{m\pi\epsilon_0 l}{2qQ}}.$$

Решение этой задачи показало, что и в такой колебательной системе возможно возникновение гармонических колебаний. Однако в данном случае очень важным является условие малости этих колебаний. Если бы при преобразовании правой части уравнения движения бусинки нельзя было бы считать, что смещение много меньше расстояния между зарядами, то мы не получили бы дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Это наталкивает нас на мысль о том, что если колебания по каким-то причинам можно считать малыми, то они могут быть гармоническими. Разумеется, рассмотрение одного частного случая не может служить доказательством того, что малые колебания всегда являются гармоническими. Однако полученный нами результат указыва-

ет путь для решения подобных задач. В огромном числе случаев малые колебания можно считать гармоническими.

Основные результаты и выводы

1. Гармонические колебания в системе могут возникнуть, если при выведении системы из положения равновесия возникают возвращающие силы, прямо пропорциональные величине этого смещения.

2. Если колебания малые, то в большом числе случаев можно с высокой точностью считать, что они являются гармоническими.

Контрольные вопросы

1. Назовите условия, необходимые для возникновения гармонических колебаний в механической системе.

2. Какую силу при описании гармонических колебаний называют квазиупругой силой?

3. Как связана квазиупругая сила с величиной смещения?

4. Какую величину называют квазиупругим коэффициентом?

5. Какие силы действуют на тело, колеблющееся в воде, какая сила будет играть роль квазиупругой силы? Какой вид имеет в этом случае квазиупругая сила, обеспечивающая колебания, и какой вид принимает дифференциальное уравнение? Чему равна циклическая частота в этом случае?

6. Приведите пример физического явления, когда происходит колебательное гармоническое движение, хотя условие малости отклонений от положения равновесия при колебаниях не соблюдается.

7. Получите дифференциальное уравнение для описания малых колебаний точечного электрического заряда в кулоновом поле. Покажите, что результирующая сила, действующая со стороны закрепленных зарядов на незакрепленный заряд, будет квазиупругой силой. Чему равен период таких колебаний?

1.14. Затухающие механические колебания.

Дифференциальное уравнение

До сих пор мы рассматривали самые простые физические модели колебательных процессов. В них мы никак не учитывали взаимодействие колебательной системы с окружающей средой. В то же время, очевидно, что такое взаимо-

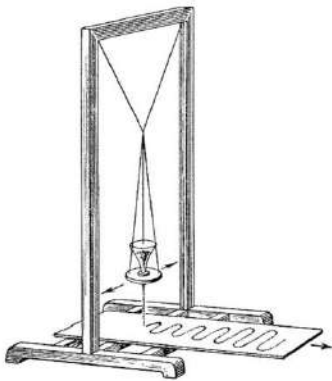


Рис. 1.14. Демонстрация затухающих колебаний

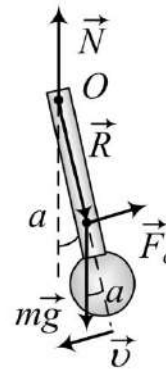


Рис. 1.15. Движение физического маятника с учетом трения

действие оказывает существенное воздействие на протекание колебательных процессов. Если возбудить колебания математического или физического маятника и каким-либо способом не поддерживать эти колебания, то спустя некоторое время колебания прекратятся. Это произойдет благодаря воздействию силы трения на маятник. Как известно из курса механики [1, 2, 3], если в системе действуют неконсервативные силы, а таковыми и являются силы трения, то изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил, т.е. сил трения. В результате механическая энергия маятника уменьшается, и колебания прекращаются. Такие колебания называются затухающими. Рассмотрим колебания физического и математического маятников, вертикальные колебания пружинного маятника и другие процессы, в которых на колебательную систему действуют силы вязкого трения [1,2,3]. Например, это могут быть силы трения о воздух.

Наблюдать затухающие колебания можно с помощью несложного устройства, показанного на рис. 1.14 [1, 2]. Это один из возможных вариантов механического осциллографа. На нити подвешен сосуд, заполненный песком. Его можно считать математическим маятником, который совершает гармонические колебания. В дне имеется отверстие, через это отверстие песок высыпается на движущуюся с постоянной скоростью ленту. В результате падающие песчинки образуют на ленте график зависимости величины смещения маятника из положения равновесия от времени. Амплитуда колебаний с течением времени уменьшается. Период гармонических колебаний математического маятника не зависит от массы маятника, поэтому возможные изменения периода могут быть связаны только с воздействием сил трения. Такое устройство позволяет наблюдать затухающие колебания в течение небольшого периода времени и изменения периода колебаний с его помощью заметить трудно. Будем считать, что если период колебаний изменяется, то незначительно.

Для объяснения наблюдаемых результатов рассмотрим движение физического маятника с учетом сил трения. Силы, действующие на физический маятник, показаны на рис. 1.15. Там использованы следующие обозначения: m – масса маятника; \vec{N} – сила реакции опоры; \vec{F}_c – сила сопротивления воздуха; \vec{R} – радиус-вектор, определяющий положение центра масс маятника; \vec{v} – скорость движения маятника в текущий момент времени. Ось вращения совпадает с координатной осью OZ , проходящей через точку O и направленной «на наблюдателя». Так как физический маятник совершает вращательное движение вокруг горизонтальной оси OZ , для описания его движения применим основной закон динамики вращательного движения для тела с постоянным моментом инерции [Ст, Ха, Св]. В общем случае этот закон можно записать так [1, 2, 3]:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

где \vec{M} – суммарный момент сил, приложенных к маятнику; I – момент инерции маятника; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, с которым он движется. К физическому маятнику приложены три силы – сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции оси \vec{N} и сила со-

сопротивления воздуха \vec{F}_c . Направления этих сил показаны на рис. 1.15. Точка приложения силы реакции \vec{N} лежит на оси вращения, поэтому момент этой силы относительно оси вращения равен нулю.

Точкой приложения силы тяжести является центр масс маятника, а вектор \vec{R} определяет положение центра масс. Поэтому момент силы тяжести [1, 2, 3] равен

$$\vec{M}_T = [\vec{R}, m\vec{g}].$$

Ось вращения на рис. 1.15 совпадает с координатной осью OZ , направленной «на наблюдателя». Проекция момента силы тяжести на горизонтальную ось вращения OZ , которая также называется моментом силы относительно оси OZ , равна

$$M_z = -|\vec{R}| \cdot |m\vec{g}| \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов \vec{R} и $m\vec{g}$.

Если считать скорость движения маятника не слишком большой, то сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости движения маятника [1, 2] и направлена в сторону, противоположную скорости:

$$\vec{F}_c = -r\vec{v}. \quad (1.46)$$

Здесь r – коэффициент вязкого трения, величина которого зависит от свойств среды, а также от формы и размеров тела. Будем считать, что \vec{F}_c – сила сопротивления воздуха, действующая на весь маятник, и что она приложена в его центре масс. Величина скорости движения центра масс маятника

$$v = R\omega = R \frac{d\alpha}{dt},$$

где ω – величина угловой скорости движения маятника. Проекция момента силы сопротивления воздуха на ось вращения равна

$$M_c = RF_c = -rR^2 \frac{d\alpha}{dt}.$$

Таким образом, в проекции на ось OZ уравнение основного закона динамики вращательного движения можно записать так:

$$I\varepsilon_z = -Rmg\sin\alpha - rR^2 \frac{d\alpha}{dt}.$$

Угол α – это величина углового перемещения маятника, поэтому проекция углового ускорения на ось OZ

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

При малых отклонениях маятника от положения равновесия $\alpha \rightarrow 0$, поэтому можно считать, что $\sin\alpha = \alpha$. С учетом малости угла отклонения динамическое уравнение движения маятника принимает вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rR^2}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{Rmg}{I} \alpha = 0. \quad (1.47)$$

Введем обозначения: $2\beta = \frac{rR^2}{I}$, $\omega_0^2 = \frac{Rmg}{I}$. Параметр ω_0 имеет смысл собственной циклической частоты гармонических колебаний физического маятника без учета трения (1.38). Физический смысл параметра β станет ясен из дальнейшего изложения, называется он коэффициентом затухания колебаний. Таким образом, дифференциальное уравнение движения физического маятника с учетом трения о воздух можно записать так:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (1.48)$$

Так как математический маятник является частным случаем физического, и для него расстояние от точки подвеса до маятника $l = R$, а момент инерции относительно оси вращения $I = ml^2 = mR^2$, уравнение (1.47) для математического маятника принимает вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (1.49)$$

Если обозначить $2\beta = \frac{r}{m}$ и $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, то уравнение (1.49) превращается в уравнение (1.48), а физический смысл параметров β и ω_0 остается таким же, как и для физического маятника.

Теперь рассмотрим движение пружинного маятника по идеально гладкой горизонтальной поверхности, на которой трение скольжения отсутствует, но

существует вязкое трение о воздух (рис.1.16). Запишем второй закон Ньютона [1, 2, 3] для этого маятника:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_y + \vec{F}_{mp}.$$

Так как трение скольжения отсутствует, силы тяжести и реакции опоры уравновешивают друг друга, но не влияют на движение груза. Для проекций сил на горизонтальную ось OX , с учетом закона Гука [1, 2, 3] и формулы (1.46) для силы вязкого трения [1, 2], мы получаем

$$ma_x = -kx - rv.$$

Это уравнение можно записать так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}v + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.50)$$

Если обозначить $2\beta = \frac{r}{m}$ и $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, то уравнение (1.50) совпадет с уравнением (1.48). При этом физический смысл параметров β и ω_0 остается таким же, это будут коэффициент затухания и циклическая частота гармонических незатухающих колебаний.

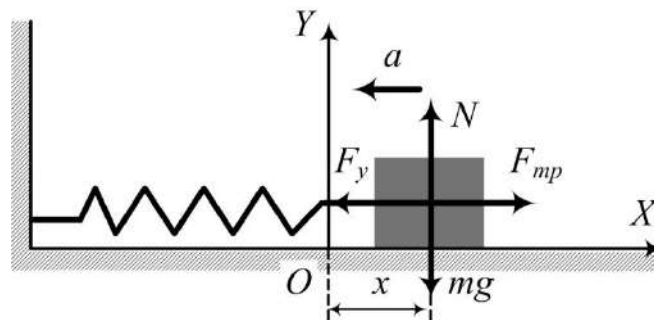


Рис. 1.16. Пружинный маятник с трением

Основные результаты и выводы

1. Для механических колебательных систем, в которых присутствует сила трения, прямо пропорциональная скорости движения, динамическое уравнение движения имеет вид дифференциального уравнения затухающих колебаний (1.48):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

2. Параметр β в этом уравнении называют коэффициентом затухания, а параметр ω_0 имеет смысл циклической частоты гармонических незатухающих колебаний в данной системе в отсутствие трения.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются затухающими?
2. Какие причины вызывают затухание колебаний?
3. Как зависит от скорости движения тела величина силы сопротивления движению?
4. Какие силы действуют на физический маятник, совершающий затухающие колебания?
5. Запишите основной закон динамики вращательного движения для физического маятника с учетом силы сопротивления движению.
6. Моменты каких сил учитываются при описании колебательного движения физического маятника относительно оси вращения? Почему момент силы тяжести равен нулю?
9. Получите дифференциальное уравнение движения математического маятника с учетом силы сопротивления движению.
10. Получите дифференциальное уравнение движения пружинного маятника на плоскости с учетом силы сопротивления движению.

1.15. Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

Полученное нами дифференциальное уравнение движения для колебательной системы при наличии силы трения, прямо пропорциональной скорости движения, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.51)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Методику решения таких уравнений [4, 5, 6] мы рассмотрели в

разд. 1.3 нашего пособия. Сначала следует составить характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения. В нашем случае характеристическое уравнение будет иметь вид

$$k^2 + 2\beta k + \omega_0^2 = 0.$$

Далее, нужно найти корни характеристического уравнения. В нашем случае корни равны

$$k_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.52)$$

Вид общего решения дифференциального уравнения в зависимости от того, каковы корни характеристического уравнения, приводится в [6], см. табл.1.1. Общее решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В зависимости от величин параметров β и ω_0 корни характеристического уравнения могут быть как действительными, так и комплексными. В зависимости от этого мы получим два класса решений, описывающие различные физические процессы.

Пусть $\beta < \omega_0$. Если в формулах для корней характеристического уравнения k_1 и k_2 значение параметра $\beta < \omega_0$, то подкоренное выражение будет отрицательным, а корни характеристического уравнения будут комплексными.

Обозначим

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega,$$

Тогда корни характеристического уравнения

$$k_1 = -\beta - i\omega, \quad k_2 = -\beta + i\omega.$$

В этом случае решение будет иметь вид

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)).$$

Выражение в скобках можно преобразовать, используя стандартные формулы тригонометрии, как мы это уже делали в процессе решения уравнения

гармонических колебаний в разд. 1.4. Результат можно записать, используя как функцию синуса, так и косинуса. Запишем его так:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.53)$$

Это уравнение описывает колебания с убывающей по экспоненциальному закону амплитудой. Причем коэффициент β определяет, как быстро убывает амплитуда колебаний. Теперь становится понятным, почему он был назван коэффициентом затухания колебаний [1, 2]. A – начальная амплитуда колебаний, ω – циклическая частота затухающих колебаний. Циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (1.54)$$

отличается от циклической частоты незатухающих гармонических колебаний ω_0 . Это различие тем значительнее, чем больше коэффициент затухания β . Период затухающих колебаний будет больше периода незатухающих гармонических колебаний и его можно рассчитать по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.55)$$

На практике мы часто имеем дело с ситуацией, когда затухание колебаний происходит медленно. Это возможно, если $\beta \ll \omega_0$. В таком случае величиной β^2 в формулах (1.53) и (1.54) можно пренебречь. Это называется приближением слабого затухания [1, 2]. В приближении слабого затухания можно считать, что период и частота затухающих колебаний равны соответственно периоду и частоте незатухающих гармонических колебаний. На рис. 1.17 показана зависи-

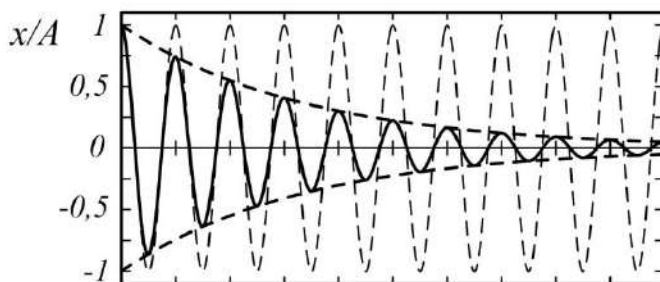


Рис. 1.17. Затухающие колебания. Приближение слабого затухания

мость смещения из положения равновесия от времени для затухающих колебаний в приближении слабого затухания. Пунктирной линией показана зависимость смещения от времени для незатухающих гармонических колебаний, а также закон убывания амплитуды колебаний, который можно выразить формулой $A = A_0 e^{-\beta t}$.

Теперь рассмотрим случай, когда выполняется соотношение $\beta > \omega_0$. В этом случае подкоренное выражение в формулах (1.52) для корней характеристических уравнений $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$. Корни характеристического уравнения будут действительными. В таком случае решение дифференциального уравнения можно записать в виде [6]

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}.$$

В формулах (1.52) $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$, поэтому оба корня характеристического уравнения будут отрицательными числами, $k_1 = -|k_1|$, $k_2 = -|k_2|$.

$$x(t) = C_1 e^{-|k_1|t} + C_2 e^{-|k_2|t}. \quad (1.56)$$

Такое решение не описывает какие-либо колебания. Оно соответствует монотонному убыванию величины смещения груза при стремлении его к положению равновесия. Такой процесс называют аperiодическим перемещением к положению равновесия. Такая ситуация возникает в колебательной системе, если силы трения очень велики. Например, ее можно наблюдать при движении маятника в жидкости.

Основные результаты и выводы

1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний (1.51) имеет решение, которое можно записать так:

$$x(t) = e^{-\beta t} A \cos(\omega t + \varphi)$$

при $\beta < \omega_0$, где β – коэффициент затухания, ω_0 – циклическая частота незатухающих гармонических колебаний в рассматриваемой системе, A – начальная величина амплитуды затухающих колебаний, φ – начальная фаза затухающих колебаний.

2. Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

3. В приближении слабого затухания, когда $\beta \ll \omega_0$, можно считать, что $\omega \approx \omega_0$, а $T \approx T_0$, где T_0 – период незатухающих гармонических колебаний в данной системе.

4. Если затухание очень сильное, т.е. $\beta > \omega_0$, то процесс колебаний не начинается. Происходит монотонное возвращение системы к положению равновесия.

Контрольные вопросы

1. Определить значение циклической частоты затухающих колебаний, если колебание описывается уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,6 \frac{dx}{dt} + 0,25x = 0$.

- 1) 0,4 1/с; 2) 0,25 1/с; 3) 0,51/с ; 4) 0,61/с .

2. Определить время релаксации затухающих колебаний, если колебание описывается уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5 \frac{dx}{dt} + 0,25x = 0$.

- 1) 3 с; 2) 4 с; 3) 5 с; 4) 2 с.

3. Определить коэффициент затухания затухающих колебаний, если колебание описывается уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5 \frac{dx}{dt} + 0,25x = 0$.

- 1) 0,4 1/с; 2) 0,25 1/с; 3) 0,5 1/с ; 4) 0,6 1/с .

4. Получить решение уравнения затухающих колебаний, если в начальный момент времени смещение принимает максимальное значение $A=10$ см, а колебание описывается уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,6 \frac{dx}{dt} + 0,25x = 0$.

5. Пружинный маятник, состоящий из пружины жесткостью k и прикрепленного к ней груза массы m , совершает колебания в вязкой среде вдоль гори-

горизонтальной поверхности. Коэффициент сопротивления движению равен b .
 Выбрать из предложенных ответов закон движения пружинного маятника.

$$1) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 ; \quad 2) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t ;$$

$$3) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 ; \quad 4) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

6. Сформулируйте критерии слабого и сильного затуханий.

1.16. Затухающие механические колебания

Рассматривая динамические уравнения движения физического маятника, математического маятника и пружинного маятника при наличии сил вязкого трения, мы убедились в том, что эти динамические уравнения (1.47), (1.49) и (1.50) имеют подобный вид и поэтому имеют похожие решения. В общем случае эти решения мы рассмотрели в предыдущем разделе. Теперь конкретизируем вид этих решений для отдельных частных случаев. Начнем со случая физического маятника.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний физического маятника имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rR^2}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{Rmg}{I} \alpha = 0.$$

Сравнивая это уравнение с общим видом дифференциального уравнения затухающих колебаний (1.51), мы видим, что коэффициент затухания в данном случае

$$\beta = \frac{rR^2}{2I}, \quad (1.57)$$

где r – коэффициент вязкого трения, R – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, I – момент инерции маятника относительно оси вращения.

Уравнение затухающих колебаний физического маятника, которое является решением дифференциального уравнения (1.47), имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где α_0 – начальное значение угла отклонения физического маятника от положения равновесия. Циклическая частота затухающих колебаний физического маятника согласно формуле (1.54) равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{Rmg}{I} - \left(\frac{rR^2}{2I}\right)^2}, \quad (1.58)$$

где m – масса маятника. Период затухающих колебаний физического маятника согласно (1.55) равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Rmg}{I} - \left(\frac{rR^2}{2I}\right)^2}}. \quad (1.59)$$

В приближении слабого затухания, когда $\beta \ll \omega_0$, в формулах (1.58) и (1.59) можно пренебречь вторыми слагаемыми в подкоренных выражениях.

В случае затухающих колебаний математического маятника дифференциальное уравнение можно записать так:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l} \alpha = 0.$$

Решение дифференциального уравнения аналогично решению для случая физического маятника. Сравнивая это уравнение с общим видом уравнения затухающих колебаний (1.51) и подставляя полученную формулу для коэффициента затухания в (1.54) и (1.55), получаем:

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad (1.60)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}, \quad (1.61)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}. \quad (1.62)$$

В формулах (1.60) – (1.62) m – масса маятника, l – длина маятника. Как и в случае физического маятника, в приближении слабого затухания вторыми слагаемыми в подкоренных выражениях можно пренебречь.

Для пружинного маятника дифференциальное уравнение затухающих колебаний можно записать так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}v + \frac{k}{m}x = 0,$$

k – коэффициент жесткости пружины. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Как и в предыдущих случаях, найдем коэффициент затухания, циклическую частоту и период затухающих колебаний:

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad (1.63)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}, \quad (1.64)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}. \quad (1.65)$$

И в этом случае в приближении слабого затухания вторыми слагаемыми в подкоренных выражениях можно пренебречь.

При очень сильном затухании колебания становятся невозможными, когда $\beta^2 > \omega_0^2$. Для физического маятника это происходит, если

$$\frac{Rmg}{I} < \left(\frac{rR^2}{2I}\right)^2,$$

или при

$$r > \frac{2}{R} \sqrt{\frac{Img}{R}}. \quad (1.66)$$

Для математического маятника условие невозможности возникновения колебаний можно записать так:

$$\frac{g}{l} < \left(\frac{r}{2m}\right)^2,$$

откуда предельное значение коэффициента вязкого трения

$$r > \frac{2}{m} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.67)$$

Колебания пружинного маятника не возникнут, если

$$\frac{k}{m} < \left(\frac{r}{2m}\right)^2.$$

Это возможно при величине коэффициента вязкого трения

$$r > 2\sqrt{km}. \quad (1.68)$$

Картина протекания процесса затухающих колебаний представлена на рис. 1.17.

Так как в любой из рассматриваемых колебательных систем действуют диссипативные силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Изменение полной механической энергии равно работе сил трения [1, 2, 3]. Как было показано на примере пружинного маятника ранее, полная механическая энергия колебательной системы равна максимальному значению ее потенциальной энергии. Поэтому убывание полной механической энергии любого из маятников в процессе затухающих колебаний будет происходить по тому же закону, что и убывание максимального значения его потенциальной энергии. В любой момент времени, когда потенциальная энергия достигает локального максимального значения, ее величина равна полной механической энергии системы. Для пружинного маятника максимальное значение потенциальной энергии

$$U_0 = \frac{kA^2}{2},$$

где A – амплитуда колебаний. Но в процессе затухающих колебаний амплитуда колебаний уменьшается по закону $A = A_0 e^{-\beta t}$. Это убывание амплитуды колебаний отражает убывание полной механической энергии, происходящее из-за рассеяния (диссипации) энергии [1, 2] в окружающей среде. Можно считать, что часть механической энергии переходит в тепло. Величина механической энергии системы убывает по закону

$$E(t) = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (1.69)$$

β – коэффициент затухания колебаний. Количество тепла, выделившегося в системе к моменту времени t , можно найти как

$$Q(t) = E_0 - E(t) = E_0 - E_0 e^{-2\beta t} = E_0(1 - e^{-2\beta t}).$$

На рис.1.18 показано, как убывает с течением времени механическая энергия затухающих колебаний (сплошная линия) и как увеличивается количество выделившегося тепла (пунктир). По оси ординат отложено отношение энергии системы в текущий момент времени к начальной величине механической энергии, $E(t)/E_0$, и отношение выделившегося количества теплоты к начальной величине механической энергии, $Q(t)/E_0$.

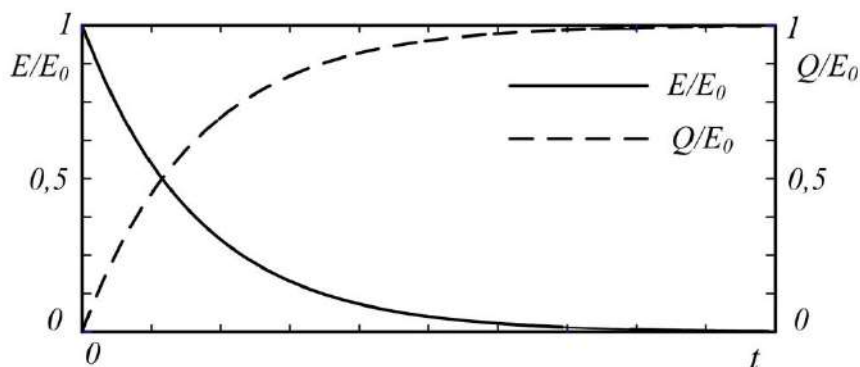


Рис. 1.18. Изменение механической энергии при затухающих колебаниях

Основные результаты и выводы

1. Уравнение затухающих колебаний физического маятника, имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где α_0 – начальное значение угла отклонения физического маятника от положения равновесия. Величину коэффициента затухания для физического маятника можно рассчитать по формуле (1.57), циклическую частоту колебаний – по формуле (1.58), период – по формуле (1.59). Условие невозможности возникновения затухающих колебаний определено формулой (1.66).

2. Уравнение затухающих колебаний математического маятника аналогично уравнению затухающих колебаний физического маятника. Величину коэффициента затухания для математического маятника можно рассчитать по

формуле (1.60), циклическую частоту колебаний – по формуле (1.61), период – по формуле (1.62). Условие невозможности возникновения затухающих колебаний математического маятника определено формулой (1.67).

3. Уравнение затухающих колебаний пружинного маятника имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Величину коэффициента затухания для пружинного маятника можно рассчитать по формуле (1.63), циклическую частоту колебаний – по формуле (1.64), период – по формуле (1.65). Условие невозможности возникновения затухающих колебаний определено формулой (1.68).

4. Механическая энергия затухающих колебаний убывает по закону

$$E(t) = E_0 e^{-2\beta t},$$

где E_0 – механическая энергия колебаний в начальный момент времени.

Контрольные вопросы

1. Какое из уравнений будет дифференциальным уравнением затухающих колебаний физического маятника?

$$1) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rR^2}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{Rmg}{I} \alpha = 0; \quad 2) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rR^2}{I} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{Rmg}{I} \alpha = \frac{F_0}{m} \cos \omega t;$$

$$3) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{rmg}{I} \alpha = 0; \quad 4) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{Rmg}{I} \alpha = \frac{F_0}{m} \cos \omega t;$$

2. Как найти период колебаний и время релаксации для затухающих колебаний физического маятника?

3. Какое из уравнений будет дифференциальным уравнением затухающих колебаний пружинного маятника?

$$1) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0; \quad 2) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t;$$

$$3) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0; \quad 4) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

4. Какому условию должно соответствовать предельное значение коэффициента вязкого трения, чтобы колебания системы стали апериодическими.

5. Запишите закон изменения полной энергии в процессе затухающих колебаний пружинного (физического) маятника. Куда «исчезает» энергия?

1.17. Количественные характеристики процесса затухающих колебаний

Для количественного описания процесса затухания колебаний и для сравнения свойств различных колебательных систем используются специальные физические величины, характеризующие процесс затухающих колебаний [1, 2]. Первой и важнейшей из этих величин является коэффициент затухания β . Физический смысл коэффициента затухания ясен – чем больше величина коэффициента затухания, тем быстрее убывает амплитуда затухающих колебаний. О том, от чего зависит величина этого коэффициента и как его рассчитать, исходя из свойств колебательной системы, уже было сказано достаточно. Остановимся на том, как можно определить величину коэффициента затухания, используя график затухающих колебаний. Такой график можно получить экспериментально, используя один из вариантов механического осциллографа или какое-либо электронное устройство, преобразующее механические колебания в электрические сигналы в сочетании с электронным осциллографом.

Уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Отсюда следует, что закон убывания амплитуды колебаний можно записать, как

$$A(t + \Delta t) = A(t)e^{-\beta \Delta t}.$$

Если нам известно, как изменяется с течением времени амплитуда затухающих колебаний, то мы можем определить величину коэффициента затухания:

$$\beta = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{A(t)}{A(t + \Delta t)}. \quad (1.70)$$

В этой формуле Δt – время, которое прошло от момента измерения амплитуды $A(t)$ до момента измерения амплитуды $A(t + \Delta t)$. На рис. 1.19 показаны график затухающих колебаний, график изменения амплитуды колебаний, а также величины амплитуды в различные моменты времени. Определенный таким образом коэффициент затухания можно использовать для определения некоторых характеристик системы. Например, зная массу маятника, и другие его характеристики можно определить величину силы трения, действующей на маятник и величину коэффициента вязкого трения.

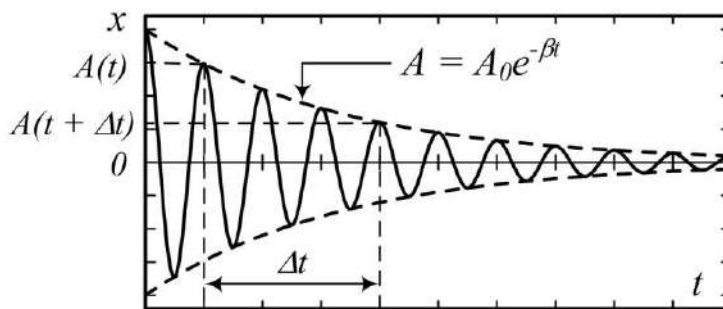


Рис. 1.19. К определению коэффициента затухания

Другой величиной, характеризующей процесс затухающих колебаний, является декремент затухания [1, 2, 9]. Декремент затухания показывает, во сколько раз уменьшается амплитуда затухающих колебаний за время T , равное одному периоду колебаний. Величина декремента затухания γ определяется следующим образом:

$$\gamma = \frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta T}. \quad (1.71)$$

Величину декремента затухания также можно найти с помощью рис. 1.19. Для этого нужно определить два значения амплитуды колебаний, наблюдаемых через время, равное одному полному периоду колебаний.

Величина

$$\delta = \ln \gamma = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} \quad (1.72)$$

равна натуральному логарифму отношения амплитуд колебаний, измеренных через один полный период, и называется логарифмическим декрементом зату-

хания [1, 2, 9]. Можно установить связь логарифмического декремента затухания с коэффициентом затухания:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (1.73)$$

Учитывая формулу (1.73), закон убывания амплитуды колебания можно записать так:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = e^{-\frac{\delta}{T} t}.$$

Время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз (e – основание натурального логарифма), называют временем релаксации колебаний.

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e.$$

Чем больше время релаксации колебаний, тем медленнее затухают колебания.

Выразим время релаксации колебаний через другие характеристики затухающих колебаний [1, 2, 9]. Согласно закону убывания амплитуды затухающих колебаний, амплитуда через время $t = \tau$ будет равна $A(\tau) = A_0 e^{-\beta \tau}$. С другой стороны, согласно определению времени релаксации эта же амплитуда равна $A(\tau) = \frac{A_0}{e} = A_0 e^{-1}$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} A_0 e^{-\beta \tau} &= A_0 e^{-1}, \\ \beta \tau &= 1. \end{aligned}$$

А с учетом формулы (1.73)

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{T}{\delta}. \quad (1.74)$$

Определим число колебаний N_e , которое система успеет совершить за время релаксации τ [1, 2, 9]. Период колебаний равен времени одного полного колебания, поэтому число колебаний, которое будет совершено за время τ , равно $N_e = \frac{\tau}{T}$. Подставим в эту формулу величину τ из (1.74) и получим

$$N_e = \frac{1}{\delta}.$$

Чем меньше логарифмический декремент затухания, тем больше колебаний успеет совершить система за то время, пока амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Величина Q , пропорциональная числу колебаний, которое совершит система за время убывания амплитуды колебаний в e раз, называется добротностью колебательной системы [1, 2, 9]:

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T}. \quad (1.75)$$

Чем выше добротность колебательной системы, тем большее число колебаний она сможет совершить за то время, пока амплитуда колебаний уменьшится в e раз. Колебательные системы с большой добротностью называются высокодобротными, системы с малой добротностью – низкодобротными. Высокодобротные колебательные системы обладают малым затуханием, и наоборот, низкодобротные характеризуются высоким затуханием.

Применение такого параметра, как добротность позволяет сравнивать колебательные системы различной природы по их свойствам, связанным с затуханием колебаний. Если добротность системы высока, то амплитуда ее затухающих колебаний убывает медленно, следовательно, энергия колебаний, которая определяется по формуле (1.69), также уменьшается медленно. Напротив, в низкодобротной системе быстрее возрастают потери энергии, связанные с ее диссипацией. Таким образом, добротность характеризует способность колебательной системы сохранять энергию колебаний.

Основные результаты и выводы

Применение таких параметров затухающих колебаний, как декремент затухания, логарифмический декремент затухания, время релаксации колебаний, добротность колебательной системы, позволяет сравнивать свойства самых разных колебательных систем и используется при построении общей теории колебаний. Определения этих величин и формулы для их расчета приведены в данном разделе нашего пособия.

Контрольные вопросы

1. Поясните, что такое декремент затухания и логарифмический декремент затухания?
2. Дайте определение времени релаксации колебаний.
3. Какую информацию о колебательной системе можно получить, зная величину добротности этой колебательной системы?

1.18. Вынужденные механические колебания.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Вынужденными называются колебания, которые происходят под воздействием внешней периодической вынуждающей силы [1, 2]. Такие колебательные процессы встречаются в природе и технике очень часто. Вынужденными являются колебания качелей, которые раскачивают дети, играя в парке. Также вынужденными являются колебания строительных конструкций под воздействием установленных на них механизмов или проезжающих по ним поездов и автомобилей. Вынужденными являются колебания поршня в двигателе внутреннего сгорания и многие другие процессы.

Рассмотрим процесс вынужденных механических колебаний на примере колебаний пружинного маятника, происходящих под действием внешней периодической вынуждающей силы (рис.1.20). Груз массой m соединен при помощи пружины с коэффициентом упругости k с неподвижной стенкой. Трение между горизонтальной поверхностью и скользящим грузом отсутствует, но присутствует вязкое трение груза о воздух. На рис. 1.20 сила трения обозначена как $\vec{F}_{тр}$, а сила упругости \vec{F}_y . Кроме того, на груз действует внешняя вынуждающая сила $\vec{F}_{вн}$, величина которой изменяется по гармоническому закону.

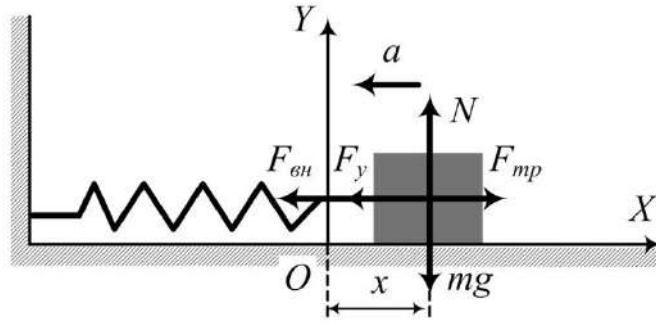


Рис. 1.20. Вынужденные колебания пружинного маятника с трением

Запишем второй закон Ньютона [1, 2, 3] применительно к движению такого маятника:

$$m\vec{a} = \vec{F}_y + \vec{F}_{мп} + \vec{F}_{вн} + \vec{N} + m\vec{g}.$$

Так как трение скольжения отсутствует, вертикально направленные сила реакции \vec{N} и сила тяжести $m\vec{g}$ не оказывают влияния на движение груза. Величина проекции силы упругости на ось OX , согласно закону Гука, $F_x^y = -kx$. Величина проекции силы трения $F_x^{мп} = -rv_x$, где r – коэффициент вязкого трения, а v_x – проекция скорости груза на горизонтальную ось. Внешняя вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону с циклической частотой колебаний Ω . В проекциях на горизонтальную ось OX второй закон Ньютона можно записать так:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_0 \cos(\Omega t).$$

Учитывая, что $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, получаем

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t).$$

Разделим правую и левую части этого уравнения на m , и перенесем некоторые слагаемые из правой части в левую:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

Теперь вспомним обозначения, которые мы использовали ранее: $2\beta = \frac{r}{m}$,

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, β – коэффициент затухания, ω_0 – циклическая частота незатухающих

гармонических колебаний, а также введем новое обозначение $f_0 = \frac{F_0}{m}$ - вынуждающая сила, действующая на единицу массы груза или удельная вынуждающая сила. С этими обозначениями мы получим уравнение, которое называется дифференциальным уравнением вынужденных колебаний [1, 2]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t). \quad (1.76)$$

Основные результаты и выводы

Движение пружинного маятника под воздействием внешней периодической вынуждающей силы описывается дифференциальным уравнением вынужденных колебаний (1.76). В этом уравнении β – коэффициент затухания, ω_0 – циклическая частота незатухающих гармонических колебаний, f_0 – величина амплитуды удельной вынуждающей силы.

Контрольные вопросы

1. Влияние каких сил на движение пружинного маятника необходимо учитывать при выводе дифференциального уравнения его вынужденных колебаний?

2. Чему равны величины силы упругости, силы вязкого трения, как должна зависеть от времени внешняя вынуждающая сила?

3. Запишите второй закон Ньютона применительно к процессу вынужденных колебаний пружинного маятника.

4. Дифференциальным уравнением вынужденных колебаний пружинного маятника является уравнение ...

1) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0;$

2) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t;$

3) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0;$

4) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$

5. Как определить удельную вынуждающую силу?

1.19. Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Мы рассматриваем решение дифференциального уравнения вида (1.76)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t).$$

С точки зрения математики – это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения [4, 5, 6] есть сумма общего решения линейного однородного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

и частного решения исходного линейного неоднородного уравнения.

Сначала найдем решение линейного однородного уравнения. Как легко заметить, это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Мы подробно рассматривали решение этого уравнения в разделе 1.15. В зависимости от соотношения величин параметров β и ω_0 возможны два класса решений – решения, соответствующие колебательному процессу, или решения, описывающие процесс монотонного движения маятника к положению равновесия. В случае, когда $\beta < \omega_0$, решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$x_1(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

В противном случае, при $\omega_0 < \beta$, решение имеет вид

$$x_2(t) = C_1 e^{-|k_1|t} + C_2 e^{-|k_2|t},$$

где k_1 и k_2 – действительные числа.

Теперь займемся нахождением частного решения дифференциального уравнения (1.76). Частное решение дифференциального уравнения – это одна из возможных функций, которая обращает дифференциальное уравнение в тожде-

ство [4, 5, 6]. Частное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний будем искать в виде

$$x_p = B \cos(\Omega t + \gamma). \quad (1.77)$$

Приведем некоторые физические соображения в пользу выбора такой формы решения. Ω – циклическая частота колебаний внешней вынуждающей силы. Решения уравнения вынужденных колебаний, которые были приведены выше, описывают экспоненциально затухающие процессы. Поэтому можно предположить, что после полного затухания этих процессов система будет совершать колебания только под действием внешней вынуждающей силы и с частотой этой внешней вынуждающей силы.

Выясним, при каких условиях функция (1.77) будет решением уравнения вынужденных колебаний. Для этого найдем первую и вторую производные по времени от функции (1.77) и подставим их в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= -\Omega B \sin(\Omega t + \gamma), \\ \frac{d^2 x_p}{dt^2} &= -\Omega^2 B \cos(\Omega t + \gamma). \end{aligned}$$

$$-\Omega^2 B \cos(\Omega t + \gamma) - 2\beta\Omega B \sin(\Omega t + \gamma) + \omega_0^2 B \cos(\Omega t + \gamma) = f_0 B \cos(\Omega t).$$

Теперь нам нужно выяснить, при каких значениях B и γ последнее уравнение обращается в тождество при любых значениях t . Для этого выполним ряд преобразований:

$$B[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t + \gamma) - 2\beta\Omega \sin(\Omega t + \gamma)] = f_0 B \cos(\Omega t).$$

Для выражения в квадратных скобках применим известные формулы из тригонометрии [7] для косинуса и синуса суммы двух аргументов:

$$\begin{aligned} \cos(\Omega t + \gamma) &= \cos\Omega t \cdot \cos\gamma - \sin\Omega t \cdot \sin\gamma, \\ \sin(\Omega t + \gamma) &= \sin\Omega t \cdot \cos\gamma + \cos\Omega t \cdot \sin\gamma. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в правую часть последнего уравнения, и проводя группировку слагаемых, мы получим:

$$\begin{aligned} &\cos\Omega t [B(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\gamma - 2B\beta\sin\gamma - f_0] + \\ &+ \sin\Omega t [-B(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\gamma - 2B\beta\cos\gamma] = 0. \end{aligned}$$

Выражения в квадратных скобках не зависят от времени. Для краткости введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= B(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\gamma - 2B\beta\sin\gamma - f_0, \\ b &= -B(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\gamma - 2B\beta\Omega\cos\gamma. \end{aligned}$$

Теперь уравнение приобретает вид

$$a\cos\Omega t + b\sin\Omega t = 0. \quad (1.78)$$

Для того чтобы выбранная нами функция была решением дифференциального уравнения, условие (1.78) должно выполняться при любых t . Это возможно, если одновременно равны нулю множители a и b :

$$\begin{cases} B(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\gamma - 2B\beta\sin\gamma - f_0 = 0, \\ -B(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\gamma - 2B\beta\Omega\cos\gamma = 0. \end{cases} \quad (1.79)$$

Решая систему уравнений (1.79), мы найдем те значения параметров B и γ , при которых функция (1.77) будет частным решением дифференциального уравнения вынужденных колебаний. Из второго уравнения системы (1.79) следует, что

$$tg\gamma = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.80)$$

Теперь умножим первое уравнение системы (1.79) на $\sin\gamma$, а второе – на $\cos\gamma$ и сложим оба уравнения. В результате получим

$$\begin{aligned} -2B\beta\Omega(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) &= f_0\sin\gamma, \\ \sin\gamma &= -\frac{2B\beta\Omega}{f_0}. \end{aligned}$$

Найдем $tg\gamma$ и подставим это выражение в левую часть формулы (1.80).

$$\begin{aligned} tg\gamma &= \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1 - \sin^2\gamma}} = \frac{-2B\beta\Omega}{f_0 \sqrt{1 - \frac{4B^2\beta^2\Omega^2}{f_0^2}}} = -\frac{2B\beta\Omega}{\sqrt{f_0^2 - 4B^2\beta^2\Omega^2}}, \\ &= \frac{2B\beta\Omega}{\sqrt{f_0^2 - 4B^2\beta^2\Omega^2}} = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

Полученное уравнение нужно решить относительно величины B . В результате имеем

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (1.81)$$

Таким образом, мы получили частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.76). Это решение имеет вид

$$x_p = B \cos(\Omega t + \gamma),$$

где амплитуда колебаний B определяется по формуле (1.81), а начальная фаза колебаний γ – по формуле

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (1.82)$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения линейного однородного уравнения и частного решения линейного неоднородного уравнения [4 – 6]. Это решение можно записать двумя способами. Для случая очень сильного затухания, когда $\omega_0 < \beta$, решение имеет вид

$$x_2(t) = C_1 e^{-|k_1|t} + C_2 e^{-|k_2|t} + B \cos(\Omega t + \gamma), \quad (1.83)$$

где k_1 и k_2 – действительные числа, а B и γ определяются по формулам (1.81) и (1.82) соответственно. Два первых слагаемых в (1.83) очень быстро затухают и на протекание процесса вынужденных колебаний существенного влияния не окажут. Процесс вынужденных колебаний определяется третьим слагаемым в (1.83).

В случае умеренного или слабого затухания, когда $\beta < \omega_0$, решение будет иметь вид

$$x_1(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \gamma), \quad (1.84)$$

где величины B и γ также определяются по формулам (1.81) и (1.82). В этом случае влияние затухающих колебаний, описываемых первым слагаемым, будет проявляться значительно дольше, особенно в случае слабого затухания, когда $\beta \ll \omega_0$. Но в результате, когда амплитуда затухающих колебаний существенно уменьшится, как и в первом случае, останутся только вынужденные колебания, описываемые вторым слагаемым уравнения (1.84) и происходящие с частотой внешней вынуждающей силы.

Основные результаты и выводы

1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет решение, состоящее из двух слагаемых. Первая часть решения (формулы (1.83), (1.84)) описывает затухающие колебания либо другое движение системы, которое происходило бы в системе в отсутствие внешней вынуждающей силы. Вторая часть решения описывает колебания, вызванные вынуждающей силой и происходящие с той частотой, с которой изменяется внешняя сила.

2. В течение некоторого времени в системе происходит очень сложное движение, определяемое как влиянием внешней силы, так и собственными колебаниями системы. Это время называют временем установления колебаний.

3. Параметры колебаний системы после установления колебаний (формулы (1.81) и (1.82)) зависят как от свойств системы, так и от параметров внешней силы.

Контрольные вопросы

1. Частное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x_p = B \cos(\Omega t + \gamma)$. Чему равна циклическая частота установившихся колебаний?

2. Запишите формулу для начальной фазы γ вынужденных колебаний, и поясните ее физический смысл.

3. Найдите амплитуду B вынужденных колебаний $x_p = B \cos(\Omega t + \gamma)$.

1.20. Вынужденные колебания. Резонанс

Рассмотрим подробнее, как именно происходят вынужденные колебания на примере колебаний пружинного маятника с учетом вязкого трения под воздействием внешней периодической вынуждающей силы. Рассмотрим тот случай, когда затухание в системе есть, но оно недостаточно сильное, чтобы собственные затухающие колебания системы вообще не возникли. Математически такие колебания описываются решением дифференциального уравнения вынуж-

жденных колебаний для случая умеренного затухания (1.84). Это решение имеет вид [6]

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \gamma).$$

Здесь x – смещение груза из положения равновесия, A – начальная величина амплитуды собственных затухающих колебаний маятника, φ – начальная фаза собственных колебаний маятника, ω – циклическая частота собственных затухающих колебаний маятника, β – коэффициент затухания собственных колебаний маятника, B – амплитуда установившихся колебаний, Ω – циклическая частота колебаний внешней вынуждающей силы, γ – начальная фаза установившихся колебаний. При этом амплитуда и начальная фаза установившихся колебаний определяются по формулам (1.81) и (1.82).

Первое слагаемое в формуле (1.84), которое описывает собственные затухающие колебания маятника, с течением времени убывает по экспоненциальному закону. Скорость убывания амплитуды собственных колебаний зависит от величины коэффициента затухания: чем больше этот коэффициент, тем быстрее уменьшается амплитуда собственных колебаний. Напротив, колебания, вызванные внешней периодической силой, не прекращаются пока действует эта сила, и происходят с некоторой постоянной амплитудой B . В результате, в течение некоторого времени, называемого временем установления колебаний, маятник участвует сразу в двух колебаниях, происходящих с разными частотами. Картина колебания, которое является суммой двух колебаний, происходящими с различными частотами, достаточно сложна, тем более, что никаких существенных ограничений на частоты этих колебаний нет. Амплитуда и частота такого колебания может меняться в больших пределах. Поведение системы в процессе установления колебаний в известной степени непредсказуемо. Картина установления вынужденных колебаний для случая умеренного затухания показана на рис. 1.21. Временем установления колебаний на этом рисунке можно считать время τ , по прошествии которого амплитуда собственных колебаний становится пренебрежимо малой.

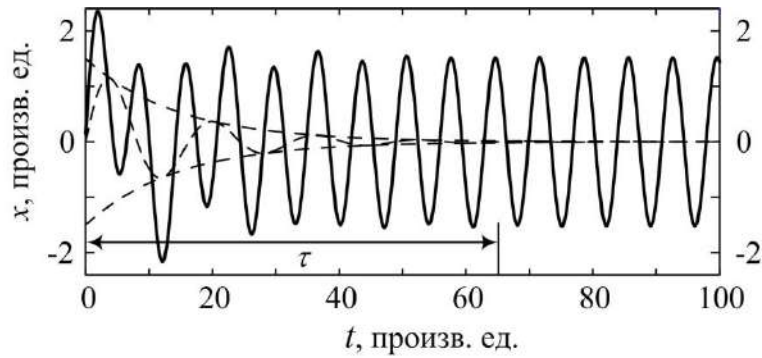


Рис. 1.21. Установление вынужденных колебаний

Установившиеся вынужденные колебания происходят с частотой внешней вынуждающей силы и с амплитудой B , величина которой определяется формулой:

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

где ω_0 – частота собственных незатухающих гармонических колебаний маятника, а f_0 – величина удельной внешней силы. В знаменателе этой формулы содержится слагаемое $(\omega_0^2 - \Omega^2)^2$, которое при совпадении частоты внешней вынуждающей силы Ω с частотой собственных незатухающих колебаний системы ω_0 обращается в нуль. Следовательно, в таком случае величина амплитуды установившихся колебаний достигает максимального значения. Это максимальное значение может быть очень большим, так как обычно величина коэффициента затухания β невелика, что заметно уменьшает величину второго слагаемого в подкоренном выражении знаменателя. В предельном случае полного отсутствия затухания при совпадении частоты колебаний внешней силы с собственной частотой колебаний амплитуда установившихся колебаний должна стремиться к бесконечности. На рис. 1.22 показана зависимость величины амплитуды B от отношения Ω/ω_0 для трех различных значений коэффициента затухания.

Главный вывод, который мы должны сделать, состоит в том, что при совпадении частоты внешней вынуждающей силы с частотой собственных незатухающих колебаний системы амплитуда вынужденных колебаний может существ-

венно возрастать. Бесконечному возрастанию амплитуды колебаний препятствует наличие трения в системе. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты внешней вынуждающей силы и частоты собственных колебаний системы называется резонансом [1 – 3, 9 – 11].

Амплитуда колебаний системы при резонансе ограничена не только процессами затухания колебаний. Как было показано в разд. 1.10, механическая энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды [1, 2]. Энергия вынужденных колебаний должна быть равна

$$E = \frac{kB^2}{2}.$$

Но в случае неограниченного или просто очень существенного роста амплитуды колебаний эта энергия также должна очень сильно вырасти. Энергия на поддержание вынужденных колебаний поступает в колебательную систему от внешних тел в результате воздействия внешней вынуждающей силы. И хотя скорость передачи энергии при резонансе значительно возрастает, величина передаваемой энергии вследствие действия закона сохранения энергии всегда ограничена. Амплитуду вынужденных колебаний ограничивает величина энергии, которая поступает в единицу времени от внешних тел.

Графики, приведенные на рис. 1.22, соответствуют тому случаю, когда от внешних тел в систему может поступать достаточное количество энергии за малое время. Если же мощность, подводимая в систему, ограничена, то амплитуда

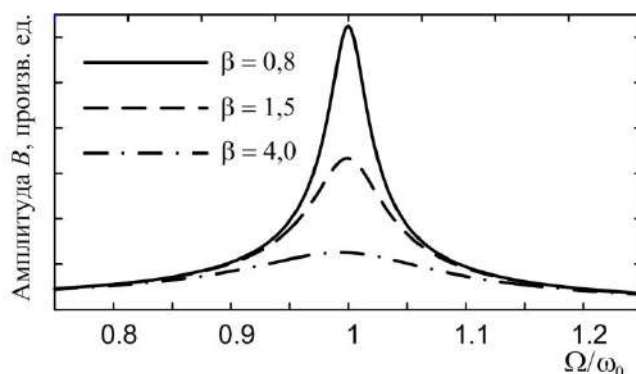


Рис. 1.22. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы

вынужденных колебаний хотя и может значительно возрасти, но не достигнет своего максимального значения.

Явление резонанса широко используется для увеличения эффективности передачи энергии от одной части механизма к другой, но в то же время может привести к неконтролируемому росту амплитуды вынужденных колебаний, что иногда приводило даже к разрушению различных машин, механизмов и даже строительных конструкций.

Основные результаты и выводы

1. Процесс вынужденных механических колебаний можно описать уравнением (1.84). В начальной стадии этого процесса происходит установление колебаний, в ходе которого колебания имеют сложный характер. Время установления колебаний определяется величиной коэффициента затухания собственных колебаний системы.

2. Установившиеся колебания происходят с частотой внешней вынуждающей силы. Величина амплитуды установившихся колебаний зависит от частоты вынуждающей силы, собственной частоты колебаний системы, а также величины коэффициента затухания.

3. При совпадении собственной частоты колебаний системы с частотой внешней вынуждающей силы наблюдается явление резонанса, т.е. резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний. Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе ограничена возможной скоростью передачи энергии от внешних тел через воздействие вынуждающей силы, а также величиной коэффициента затухания.

Контрольные вопросы

1. Какие условия должны выполняться для вынуждающей силы, чтобы амплитуда вынужденных колебания была максимальной?

2. Как связана резонансная частота с собственной частотой незатухающих колебаний?

3. Сравните частоту затухающих колебаний с резонансной частотой вынужденных колебаний. В каком случае эти частоты при описании процесса колебаний можно считать равными собственной частоте свободных незатухающих колебаний?

4. Как влияет величина коэффициента затухания на значение резонансной амплитуды?

5. Чему равна резонансная частота вынужденных колебаний пружинного маятника?

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Процессы, в которых происходят колебания электрических величин, например, силы тока, напряжения, напряженности электрического или магнитного поля, называют электромагнитными колебаниями. Электромагнитные колебания являются основой понимания многих природных явлений, например, оптических. Они также широко используются в технических и технологических приложениях, таких как электроника, радиотехника, энергетика. В этой части пособия мы рассмотрим самые простые системы, в которых возникают электромагнитные колебания, и на примере таких систем изучим методы их описания.

2.1. Физические процессы, происходящие в колебательном контуре

Простейшим устройством, в котором возникают электромагнитные колебания, является колебательный контур. Колебательным контуром называется устройство, состоящее из двух элементов – конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L , соединенные так, как это показано на рис. 2.1 [9, 10, 11]. Рассмотрим подробнее, какие физические процессы происходят в таком контуре, если конденсатору сообщить некоторый заряд Q (рис.2.1, *a*).

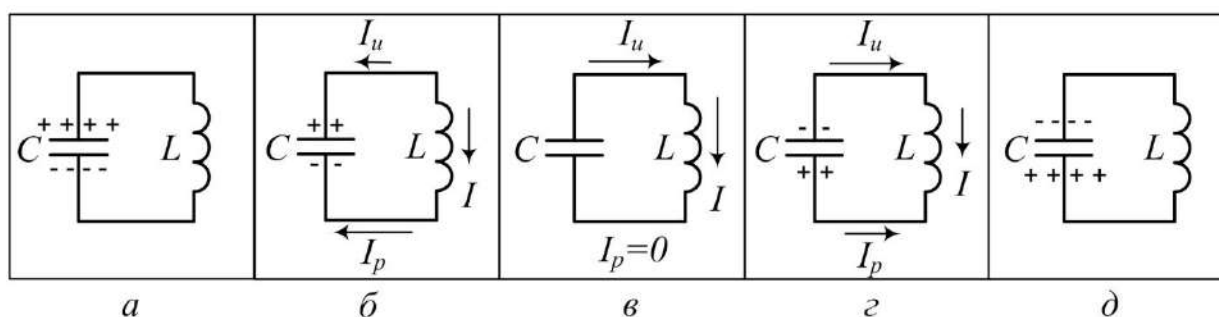


Рис. 2.1. Процессы, протекающие в колебательном контуре

При наличии заряда на конденсаторе между его обкладками установится напряжение $U = \frac{Q^2}{2C}$ [9, 10, 11]. Обкладки конденсатора соединены проводником,

следовательно, от положительно заряженной обкладки к отрицательно заряженной потечет электрический ток. Назовем этот ток током разрядки конденсатора и обозначим I_p . На рис. 2.1, б этот ток течет в направлении «по часовой стрелке». При этом заряд на обкладках конденсатора уменьшается. Одновременно происходит и другой процесс. Вначале в катушке отсутствовал ток, затем он появился. С появлением тока связано появление магнитного поля и магнитного потока, пронизывающего катушку [9, 10, 11]. Этот магнитный поток увеличивается с нарастанием тока разрядки. Если катушку пронизывает переменный магнитный поток, то в ней возникает ЭДС самоиндукции и индукционный ток [9 – 11]. Согласно правилу Ленца направление индукционного тока таково, что создаваемое этим током дополнительное магнитное поле стремится скомпенсировать то изменение магнитного потока, которое привело к возникновению данного индукционного тока. В нашем случае это означает, что индукционный ток I_u на рис. 2.1, б течет в направлении, противоположном току разрядки конденсатора, т.е. «против часовой стрелки». Сила индукционного тока прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока [9, 10, 11], поэтому чем быстрее изменяется сила тока разрядки, тем больше сила индукционного. Сила тока в контуре будет равна алгебраической сумме силы тока разрядки и силы индукционного тока, $I = I_p - I_u$. На первой стадии колебательного процесса в контуре наличие индукционного тока уменьшает силу тока в контуре и замедляет процесс разрядки конденсатора.

Тем не менее конденсатор разряжается, и заряд на его обкладках становится равен нулю (рис. 2.1, в). Ток также уменьшается. Но уменьшение тока, как и его увеличение, приводит к возникновению индукционного тока, который в этот раз будет направлен так, чтобы поддержать угасающий в катушке магнитный поток. Направление индукционного тока изменится, и он теперь потечет «по часовой стрелке». Это приведет к тому, что на обкладках конденсатора станут накапливаться заряды, но теперь знак этих зарядов будет противоположен первоначальному (рис. 2.1, г). В конце концов, благодаря индукционному току, заряд конденсатора достигнет максимального значения, но знаки зарядов об-

кладок изменятся на противоположные. Процесс перезарядки конденсатора будет замедляться вновь возникающим током разрядки. После того как заряд конденсатора достигнет максимального по модулю значения, снова станет преобладать процесс разрядки и все повторится сначала, только токи будут течь в противоположных направлениях (рис. 2.1, д).

Так будут происходить колебания величины заряда на конденсаторе, сопровождаемые колебаниями напряжения на конденсаторе и силы тока в цепи. Решающую роль в возникновении этих колебаний играют процессы разрядки и зарядки конденсатора и явление самоиндукции [9, 10, 11], благодаря которому возникает индукционный ток. Теперь дополним эти качественные соображения аналитическими выкладками и получим дифференциальное уравнение незатухающих электромагнитных колебаний.

Основные результаты и выводы

Колебания заряда конденсатора, напряжения на конденсаторе и силы тока в цепи колебательного контура возникают благодаря повторяющимся процессам разрядки и зарядки конденсатора, а также благодаря возникновению индукционных токов в самоиндукции в катушке.

Контрольные вопросы

1. Из каких элементов состоит идеальный колебательный контур? Нужно ли учитывать в этой модели сопротивление подводящих проводов?
2. В колебательном контуре в начальный момент времени заряд на конденсаторе максимален. Опишите, как происходит процесс перезарядки конденсатора в течение одного периода колебаний. Как связаны величина и направление силы тока в контуре с процессами перезарядки на обкладках конденсатора?
3. В чем заключается сходство и различие между механическими и электрическими колебаниями?

2.2. Дифференциальное уравнение незатухающих колебаний в колебательном контуре

Процессы, происходящие в колебательном контуре, связаны с протеканием электрического тока. Протекание электрического тока в проводнике можно описать с помощью закона Ома [9, 10, 11]. Как мы уже отметили, при изменении силы тока в контуре в катушке возникает ЭДС самоиндукции [9, 10, 11]. Поэтому для описания процессов в контуре следует использовать закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС [9]. Согласно этому закону мы можем записать, что напряжение между обкладками конденсатора равно

$$U + \varepsilon_c = IR,$$

где I – сила тока в контуре, R – сопротивление контура, ε_c – ЭДС самоиндукции.

Напряжение на конденсаторе [9]

$$U = \frac{q}{C},$$

q – заряд конденсатора, C – емкость конденсатора. ЭДС самоиндукции [9] равен

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность катушки. Учтем, что протекание тока связано с убылью заряда конденсатора, по цепи пробегает тот заряд, который ушел из конденсатора, а буквой q обозначен заряд конденсатора, поэтому

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (2.1)$$

Подставим эти выражения в закон Ома и получим

$$\begin{aligned} \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} &= -R \frac{dq}{dt}, \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Мы получили дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения электрического заряда конденсатора колебательного контура. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными

коэффициентами [4, 5, 6]. При выводе этого уравнения мы считали, что подводящие провода колебательного контура и катушка индуктивности обладают некоторым сопротивлением R . При протекании электрического тока через сопротивление, согласно закону Джоуля – Ленца [9, 10, 11], будет выделяться тепло. Выделение тепла приведет к рассеиванию энергии колебаний и в конце концов к полному их затуханию. Если мы хотим получить уравнение незатухающих колебаний, то наличием сопротивления следует пренебречь. Это можно сделать, если величина сопротивления настолько мала, что в течение некоторого достаточно продолжительного времени потерями энергии на выделение джоулева тепла можно пренебречь. Тогда в течение этого времени колебания можно будет считать незатухающими.

В приближении незатухающих колебаний, когда можно считать, что сопротивление R равно нулю, уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (2.3)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0,$$

мы заметим, что эти уравнения идентичны.

Основные результаты и выводы

1. На основании закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, с учетом определения силы тока и формулы для ЭДС самоиндукции получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение заряда конденсатора колебательного контура.

2. В случае, когда сопротивлением элементов колебательного контура можно пренебречь, уравнение, описывающее изменение заряда конденсатора колебательного контура, является дифференциальным уравнением незатухающих гармонических колебаний.

Контрольные вопросы

1. Запишите закон Ома для идеального колебательного контура и получите из него дифференциальное уравнение.
2. Почему не учитывается рассеяние энергии в идеальном колебательном контуре?

2.3. Незатухающие гармонические колебания в колебательном контуре

Методику решения уравнения гармонических колебаний вида (2.3) и само решение [6] мы подробно обсуждали в разд. 1.3, 1.4, 1.5 и 1.6 нашего пособия. Сейчас лишь воспользуемся результатами решения этого уравнения. Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний и φ_0 – начальная фаза колебаний являются произвольными постоянными, которые можно определить из начальных условий. В рассматриваемом нами случае электромагнитных колебаний в контуре закон изменения заряда конденсатора с течением времени будет таким:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.4)$$

Это означает, что величина заряда конденсатора в контуре совершает незатухающие гармонические колебания. В формуле (2.4) q_0 – максимальная величина заряда конденсатора, φ_0 – начальная фаза колебаний. Эти величины также определяются из начальных условий задачи. Циклическую частоту колебаний определим из того условия, что квадрат этой частоты равен коэффициенту в дифференциальном уравнении в слагаемом, не содержащем производных:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Таким образом, циклическая частота колебаний заряда в колебательном контуре без затухания равна

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.5)$$

Период незатухающих колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2.6)$$

Величину напряжения U на конденсаторе можно определить, используя известную из электростатики [9 – 11] формулу для заряда конденсатора $q = CU$. Так как заряд изменяется по гармоническому закону, напряжение также будет изменяться по гармоническому закону:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.7)$$

где U_0 – амплитудное значение напряжения, $U_0 = \frac{q_0}{C}$. Колебания напряжения на конденсаторе и заряда совпадают по фазе.

Величина силы тока в цепи колебательного контура связана с величиной заряда конденсатора соотношением (2.1). Пользуясь этим соотношением, найдем закон изменения силы тока в контуре.

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}(q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)) = \omega q_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) I_0 – амплитудное значение силы тока в контуре:

$$I_0 = \omega q_0. \quad (2.9)$$

На рис. 2.2 показаны графики изменения заряда конденсатора (сплошная линия), напряжения на конденсаторе (пунктирная линия) и силы тока (штрих-

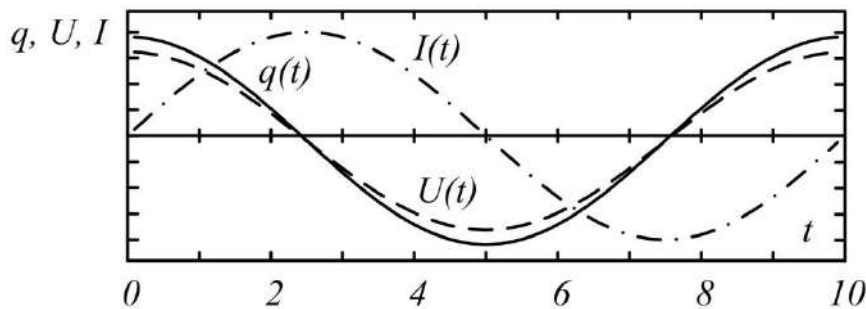


Рис. 2.2. Колебания заряда, напряжения и тока в колебательном контуре

пунктирная линия) в колебательном контуре в процессе гармонических колебаний. Графики построены для случая, когда начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$. Такое значение начальной фазы колебаний соответствует ситуации, когда колебания начинаются с сообщения конденсатору некоторого начального заряда q_0 .

Из рис. 2.2 мы видим, что колебания заряда и напряжения совпадают по фазе, или, как говорят, происходят симфазно, а колебания силы тока отличаются по фазе на $\pi/2$ от колебаний заряда и напряжения.

Основные результаты и выводы

1. Если сопротивление колебательного контура пренебрежимо мало, то в контуре возникают незатухающие гармонические колебания заряда конденсатора, напряжения на конденсаторе и силы тока. Циклическая частота и период этих колебаний определяются по формулам (2.5) и (2.6).

2. Колебания заряда конденсатора и напряжения на конденсаторе происходят симфазно, законы изменения заряда и напряжения задаются уравнениями (2.4) и (2.7).

3. Колебания силы тока отличаются по фазе от колебаний напряжения и заряда на $\pi/2$. Закон изменения силы тока в контуре задан уравнением (2.8). Амплитудное значение силы тока можно вычислить по формуле (2.9).

Контрольные вопросы

1. Решите дифференциальное уравнение для идеального колебательного контура и получите зависимость от времени заряда (напряжения) на обкладках конденсатора.

2. Как зависит от времени ток, протекающий через катушку индуктивности в идеальном колебательном контуре? Как различаются фазы колебаний напряжения и тока?

3. Как связаны между собой амплитуды колебаний заряда, тока и напряжения в идеальном колебательном контуре?

6. Получите формулу для частоты (периода) колебаний в идеальном колебательном контуре.

2.4. Определение начальной фазы гармонических колебаний в колебательном контуре

Как уже было отмечено выше, значение начальной фазы гармонических незатухающих колебаний φ_0 определяется из начальных условий для каждого конкретного колебательного процесса. Рассмотрим два примера использования начальных условий для определения начальной фазы гармонических колебаний.

Пример 1. Для возбуждения гармонических электромагнитных колебаний конденсатору колебательного контура, имеющему емкость 1 мкФ, был сообщен заряд 1 мкКл. Необходимо определить начальную фазу колебаний заряда, напряжения и тока, а также амплитудные значения напряжения и силы тока. Индуктивность катушки равна 1 мкГн.

После зарядки конденсатора в колебательном контуре начнутся гармонические колебания и заряд конденсатора будет изменяться по закону

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Отсчет времени колебаний начнем с момента сообщения конденсатору заряда. Согласно этому условию в момент времени $t = 0$ заряд $q = q_0$. Получаем уравнение для определения начальной фазы колебаний:

$$q_0 = q_0 \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0).$$

Отсюда

$$\cos \varphi_0 = 1,$$

$$\varphi_0 = 0.$$

Теперь уравнение гармонических колебаний заряда следует записать так:

$$q(t) = q_0 \cos \omega t.$$

Напряжение на конденсаторе в процессе гармонических колебаний

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

С учетом того, что $\varphi_0 = 0$, получаем

$$U(t) = U_0 \cos \omega t.$$

Максимальную величину напряжения на конденсаторе находим по известной формуле [9 – 11]

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ (В)}.$$

Сила тока в контуре изменяется по закону

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Значение начальной фазы колебаний мы уже определили, $\varphi_0 = 0$, поэтому

$$I(t) = I_0 \sin \omega t.$$

Максимальную величину силы тока найдем по формуле (2.9)

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 1 \text{ (А)}.$$

Пример 2. С помощью индуктора [9] в катушке колебательного контура был возбужден ток силой I_0 . Определить начальную фазу электромагнитных колебаний и записать уравнения колебаний для тока, напряжения на конденсаторе и заряда конденсатора.

Ток в контуре возбуждают с помощью переменного магнитного поля в катушке индуктора [9], поэтому в начальный момент времени $t = 0$ сила тока $I = I_0$. В общем случае сила тока изменяется согласно уравнению (2.8). Подставим в (2.9) значение времени $t = 0$ и значение силы тока $I = I_0$:

$$I_0 = I_0 \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0),$$

$$\sin \varphi_0 = 1,$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь перепишем уравнение колебаний силы тока:

$$I(t) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I(t) = I_0 \cos \omega t.$$

Уравнение для колебаний напряжения на конденсаторе

$$U(t) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -U_0 \sin \omega t.$$

И, наконец, уравнение колебаний заряда конденсатора

$$q(t) = q_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -q_0 \sin\omega t.$$

Основные результаты и выводы

Для того чтобы определить величину начальной фазы колебаний в формулах (2.4), (2.7) и (2.8), нужно составить и решить уравнение (или уравнения), отражающие тот факт, что в начальный момент времени $t = 0$, величины заряда, силы тока или напряжения принимают определенные значения в соответствии с условиями рассматриваемой задачи. Решая эти уравнения, нужно найти величину начальной фазы колебаний φ_0 .

Контрольный вопрос

Уравнение гармонических колебаний заряда на конденсаторе имеет вид $q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Какую начальную фазу надо выбрать для заряда на конденсаторе, если колебания в контуре возбуждаются в момент, когда ток в контуре максимален? Какую начальную фазу надо выбрать для тока?

2.5. Колебания энергии электрического и магнитного полей в процессе затухающих электромагнитных колебаний

Если рассматривать электромагнитные колебания в колебательном контуре с позиций сохранения энергии и перехода энергии из одних форм в другие, то качественно картина выглядит следующим образом [9 – 11]. Сначала необходимо каким-либо способом возбудить колебания в контуре. Для этого можно сообщить некоторый заряд конденсатору или возбудить в катушке ток с помощью индуктора. Любое из этих действий потребует совершения определенной работы сторонними силами. Далее энергия, равная работе сторонних сил, совершенной при возбуждении колебаний, может существовать либо в виде энергии электрического поля конденсатора, либо в виде энергии магнитного поля катушки. С ростом заряда конденсатора или напряжения на нем растет величина

энергии электрического поля, а с ростом силы тока растет энергия магнитного поля катушки. Так как мы считаем, что сопротивление контура равно нулю, при протекании тока энергия не переходит в тепло, как это должно было бы происходить в реальном контуре [9 – 11]. Отсюда следует, что можно ожидать, что сумма энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки будет оставаться постоянной, а в некоторые моменты времени будет наблюдаться максимальное значение энергии электрического поля или, наоборот, максимальное значение энергии магнитного поля. Ситуация должна быть похожей на ту, что наблюдается при гармонических механических колебаниях пружинного маятника в отсутствии трения. Проверим, следует ли такой вывод из анализа уравнений гармонических электромагнитных колебаний.

Как известно из электродинамики, энергия электрического поля заряженного конденсатора равна [9 – 11]

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \quad (2.10)$$

где C – емкость конденсатора, U – напряжение на конденсаторе, q – заряд конденсатора. Энергию магнитного поля катушки можно определить по формуле [9 – 11]

$$W_м = \frac{LI^2}{2}, \quad (2.11)$$

где L – индуктивность катушки, I – сила тока в катушке. Мы знаем, что заряд конденсатора, напряжение на нем и ток в контуре изменяются по гармоническим законам. Посмотрим, как будет изменяться с течением времени энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля катушки.

Напряжение на конденсаторе изменяется согласно формуле (2.7) как

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{q_0}{C} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Тогда энергия электрического поля конденсатора равна

$$W_э(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Как и в случае вычисления энергии механических колебаний, воспользуемся известной формулой из тригонометрии [7]:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Теперь

$$W_3(t) = \frac{q_0^2}{4C}(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)) = \frac{q_0^2}{4C} + \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega t + 2\varphi_0). \quad (2.12)$$

Из выражения (2.12) мы видим, что в сравнении с колебаниями напряжения и заряда колебательного контура, колебания энергии электрического поля происходят с вдвое большей частотой. Кроме того, энергия электрического поля никогда не бывает отрицательной и изменяется в пределах от нуля до максимального значения, равного

$$W_{30} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (2.13)$$

Сила тока в колебательном контуре в процессе гармонических колебаний изменяется по закону (2.8)

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Тогда в соответствии с формулой (2.11) энергия магнитного поля катушки будет равна

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

На этот раз воспользуемся другой формулой из тригонометрии [7],

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

и получим

$$W_M = \frac{LI_0^2}{4} - \frac{LI_0^2}{4} \cos(2\omega t + 2\varphi_0). \quad (2.14)$$

Как и в случае изменения энергии электрического поля, колебания энергии магнитного поля происходят с частотой, которая в два раза больше частоты колебаний силы тока в колебательном контуре. Энергия магнитного поля, как и электрического поля, никогда не бывает отрицательной и изменяется в пределах от нуля до максимального значения, равного

$$W_{\text{м0}} = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (2.15)$$

Графики зависимостей энергии электрического и магнитного полей от времени при гармонических колебаниях в колебательном контуре, в сравнении с колебаниями заряда контура и силы тока, показаны на рис. 2.3.

Важно также отметить, что колебания энергии магнитного поля и колебания энергии электрического поля происходят с разностью фаз, равной π .

Это означает, что в тот момент, когда энергия электрического поля максимальна, энергия магнитного поля равна нулю. И, наоборот, в тот момент, когда энергия магнитного поля максимальна, энергия электрического равна нулю. Покажем также, что максимальные значения энергий электрического и магнитного полей, вычисляемые по формулам (2.13) и (2.15), равны. Для этого воспользуемся формулой (2.9), согласно которой максимальное значение силы тока $I_0 = \omega q_0$, и формулой (2.5) для циклической частоты колебаний ω .

$$W_{\text{м0}} = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\omega^2 q_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2}{2LC} = \frac{q_0^2}{2C} = W_{\text{э0}}.$$

Теперь докажем, что сумма энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки остается постоянной на протяжении всего процесса гармонических электромагнитных колебаний в колебательном контуре.

$$W_{\text{эм}} = W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{LI_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

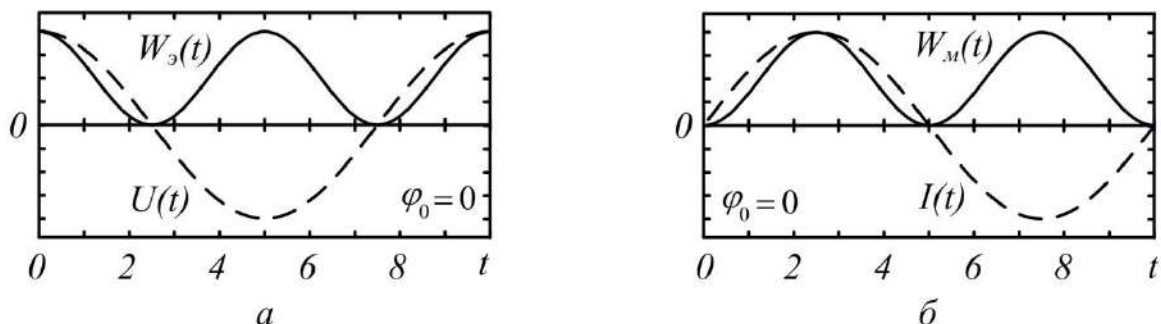


Рис. 2.3. Колебания энергии электрического поля в сравнении с колебаниями напряжения (а) и колебания энергии магнитного поля в сравнении с колебаниями тока в колебательном контуре (б)

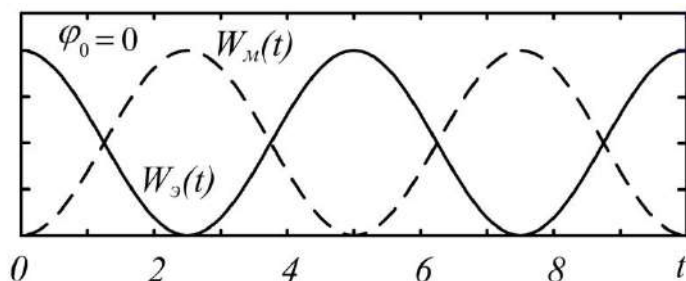


Рис. 2.4. Колебания энергии электрического поля (сплошная линия) и магнитного поля (пунктир) в колебательном контуре

Максимальные значения энергии электрического поля и энергии магнитного поля равны

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C'}$$

поэтому можно преобразовать последнюю формулу:

$$W_{эм} = \frac{q_0^2}{2C} (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)) = W_{э0} = W_{м0}.$$

Таким образом, подтвердилось высказанное в начале настоящего раздела предположение о том, что на протяжении всего процесса незатухающих электромагнитных колебаний в колебательном контуре сумма энергии электрического поля конденсатор и энергии магнитного поля катушки остается неизменной. На рис. 2.4 показаны графики изменения энергии электрического поля и энергии магнитного поля в процессе гармонических электромагнитных колебаний в колебательном контуре. Рисунок хорошо иллюстрирует сделанный выше вывод.

Основные результаты и выводы

1. В процессе незатухающих электромагнитных колебаний в колебательном контуре колебания энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки происходят с частотой, которая в два раза больше, чем частота колебаний заряда, напряжения и силы тока.

2. Сумма энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки в процессе гармонических колебаний в колебательном контуре

в любой момент времени остается постоянной и равной либо максимальной энергии магнитного поля, либо максимальной энергии электрического поля.

3. Полученные выводы относительно колебаний энергии в колебательном контуре совпадают с аналогичными выводами для потенциальной и кинетической энергии в процессе незатухающих колебаний маятников.

Контрольные вопросы

1. Какие виды энергий включаются в понятие: полная энергия идеального колебательного контура?

2. В идеальном электрическом колебательном контуре ёмкость конденсатора 2 мкФ , а индуктивность катушки $0,5 \text{ Гн}$. В таком контуре период колебаний энергии электрического поля конденсатора равен

1) $\pi/4 \text{ мс}$; 2) $\pi/2 \text{ мс}$; 3) $4\pi \text{ мс}$; 4) $2\pi \text{ мс}$; 5) $\pi \text{ мс}$.

3. В идеальном электрическом колебательном контуре ёмкость конденсатора 2 мкФ , а индуктивность катушки $0,5 \text{ Гн}$. Найти период колебаний энергии магнитного поля в контуре.

1) $\pi/4 \text{ мс}$; 2) $\pi/2 \text{ мс}$; 3) $4\pi \text{ мс}$; 4) $2\pi \text{ мс}$; 5) $\pi \text{ мс}$.

4. Что можно сказать о поведении полной энергии в идеальном электрическом колебательном контуре?

5. Поясните, используя график, как различаются в зависимости от времени тока и энергии магнитного поля (напряжения и энергии электрического поля) в колебательном контуре?

2.6. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в колебательном контуре

Мы получили дифференциальное уравнение незатухающих колебаний, описывая процесс протекания тока в колебательном контуре без учета рассеяния энергии на сопротивлении. Для описания процесса затухающих колебаний мы также применим закон Ома [9, 10, 11], но при этом учтем, что и подводимые

провода и катушка индуктивности в реальном контуре обладают конечным электрическим сопротивлением. Схема такого колебательного контура изображена на рис. 2.5. Сопротивление контура на схеме показано в виде резистора с сопротивлением R , емкость конденсатора контура C , индуктивность катушки L . Если I – сила тока в контуре, U – напряжение на конденсаторе, а ε_c – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке, то закон Ома для контура можно записать так:

$$U + \varepsilon_c = IR.$$

Напряжение на конденсаторе [9] можно выразить через заряд конденсатора q как $U = \frac{q}{C}$, а ЭДС самоиндукции [9] равна $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$. Учтем также, что, как и в случае незатухающих колебаний, по цепи пробегает тот заряд, который ушел из конденсатора, а буквой q обозначен заряд конденсатора, и поэтому сила тока в цепи будет равна $I = -\frac{dq}{dt}$.

Подставим выражения для напряжения на конденсаторе, ЭДС самоиндукции и для силы тока в закон Ома и получим

$$\begin{aligned} \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} &= -R \frac{dq}{dt}, \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Это дифференциальное уравнение описывает процесс изменения электрического заряда конденсатора колебательного контура. С точки зрения теории дифференциальных уравнений [4, 5, 6] это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение таких уравнений подробно было рассмотрено в разд. 1.3 нашего пособия. Возможные виды решения, в зависимости от значений параметров уравнения, из книги [6], приведены в табл. 1.1.

Уравнение (2.16) имеет структуру, аналогичную уравнениям (1.47), (1.49) и (1.50), которые описывают затухающие колебания различных маятников. С

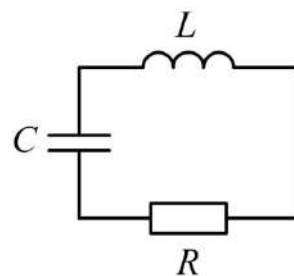


Рис. 2.5. Схема колебательного контура

точностью до коэффициентов уравнение (2.16) совпадает с обобщенным уравнением, описывающим затухающие механические колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.17)$$

Основные результаты и выводы

1. Для колебательного контура с ненулевым электрическим сопротивлением закон изменения заряда колебательного контура

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

имеет вид дифференциального уравнения затухающих колебаний (1.48).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

2. Параметр β в этом уравнении, как и в случае механических колебаний, имеет смысл коэффициента затухания, а параметр ω_0 имеет смысл циклической частоты гармонических незатухающих колебаний в колебательном контуре.

Контрольные вопросы

1. Объясните причину затухания колебаний в реальном электрическом колебательном контуре.

2. Получите дифференциальное уравнение для реального электрического колебательного контура (контура, содержащего сопротивление).

2.7. Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний в колебательном контуре. Условие возникновения колебаний

Решение уравнения (2.17) для затухающих электромагнитных колебаний аналогично решению уравнения (1.48) для механических колебаний [6], которое подробно рассмотрено в разд. 1.15 настоящего пособия. Для случая, когда $\beta < \omega_0$, это решение можно представить в виде

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь β – коэффициент затухания, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний, ω_0 – циклическая частота незатухающих колебаний. Решение уравнения затухающих электромагнитных колебаний для случая, когда $\beta < \omega_0$, можно записать так:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.18)$$

Учитывая, что напряжение на конденсаторе связано с величиной заряда конденсатора формулой $U = \frac{q}{C}$ [9 – 11], в процессе колебаний напряжение будет изменяться по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.19)$$

Для того чтобы уточнить значения параметров дифференциального уравнения затухающих электромагнитных колебаний, из сравнения уравнений (2.16) и (2.17) найдем выражение для коэффициента затухания. Коэффициенты перед слагаемыми, содержащими первую производную, должны быть равны, $2\beta = \frac{R}{L}$, поэтому

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (2.20)$$

Циклическая частота незатухающих электромагнитных колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Циклическая частота затухающих электромагнитных колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2.21)$$

Итак, колебательное решение дифференциального уравнения затухающих электромагнитных колебаний имеет вид (2.18) или (2.19), где величина коэффициента затухания может быть определена по формуле (2.20), а циклическая частота колебаний определяется по формуле (2.21).

В случае, когда $\beta > \omega_0$, решение уравнения затухающих колебаний имеет вид монотонно убывающей функции [6]:

$$q(t) = C_1 e^{-|k_1|t} + C_2 e^{-|k_2|t},$$

где $k_1 = -\beta + \sqrt{(\beta^2 - \omega_0^2)}$, $k_2 = -\beta - \sqrt{(\beta^2 - \omega_0^2)}$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. В этом случае происходит апериодическая разрядка конденсатора и не возникает никаких колебаний.

Такая ситуация может реализоваться, если выполняется условие

$$\beta^2 > \omega_0^2.$$

Подставим в это условие выражения для коэффициента затухания β и для циклической частоты незатухающих колебаний ω_0 :

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}.$$

Отсюда найдем интервал значений электрического сопротивления контура, при которых в контуре не могут возникнуть колебания:

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.22)$$

При величине электрического сопротивления, меньше чем в условии (2.22) колебания в контуре возникают. Чем меньше сопротивление, тем медленнее эти колебания затухают.

Основные результаты и выводы

1. Если электрическое сопротивление в колебательном контуре меньше величины, определяемой формулой (2.22), то в контуре возникают затухающие электромагнитные колебания.

2. Затухающие колебания заряда конденсатора и напряжения на конденсаторе, которые возникают в этом случае, происходят в соответствии с уравнениями (2.18) и (2.19). Величина циклической частоты колебаний вычисляется по формуле (2.21), а величина коэффициента затухания – по формуле (2.20).

3. Если суммарное электрическое сопротивление контура больше величины, определяемой формулой (2.22), то колебания в контуре не возникнут. Произойдет апериодическая разрядка конденсатора.

Контрольные вопросы

1. Получите решение дифференциального уравнения для реального электрического колебательного контура.
2. Как зависит от времени амплитуда заряда (напряжения) на обкладках конденсатора.
3. Как влияет на значение амплитуды коэффициент затухания?
4. Как получить величину времени релаксации реального электрического колебательного контура, зная коэффициент затухания?
5. Как зависит циклическая частота колебаний реального электрического колебательного контура от коэффициента затухания?
6. Найдите критическое значение электрического сопротивления контура, когда колебания в контуре станут аperiodическими.

2.8. Затухающие электромагнитные колебания

При наличии электрического сопротивления в колебательном контуре амплитуда возникающих в нем электромагнитных колебаний убывает по экспоненциальному закону. Частота затухающих колебаний несколько меньше частоты незатухающих гармонических колебаний, которые могли бы возникнуть в том же контуре. Такая же картина наблюдается и при рассмотрении механических колебаний с учетом сил вязкого трения. Очень часто в технических приложениях возникает ситуация, когда колебания, хотя и затухают, но на протяжении достаточно длительного времени амплитуда убывает незначительно, а частота колебаний мало отличается от частоты незатухающих колебаний. В таких случаях для описания процессов в колебательном контуре, как и в случае механических колебаний, используется приближение слабого затухания.

В приближении слабого затухания в уравнении затухающих колебаний (1.48) коэффициент затухания β мал и выполняется соотношение

$$\beta^2 \ll \omega_0^2.$$

Для колебательного контура это соотношение принимает вид

$$\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

или

$$R \ll 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.23)$$

В этом случае циклическая частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т.е. можно считать, что частота затухающих колебаний равна частоте незатухающих гармонических колебаний.

Колебания заряда конденсатора происходят по закону

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

В приближении слабого затухания можно считать, что на протяжении достаточно длительного времени величина $q_0 e^{-\beta t}$ изменяется незначительно.

Сила тока в контуре определяется уравнением

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \right).$$

При вычислении производной величину $q_0 e^{-\beta t}$, которая на самом деле, конечно, зависит от времени, можно приближенно считать постоянной. Тогда приближенно можно считать, что

$$I = \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.24)$$

В этом приближении, как и в случае незатухающих гармонических колебаний, изменение тока отличается от изменения заряда на конденсаторе и напряжения на $\frac{\pi}{2}$. Если при вычислении силы тока учитывать убывание амплитуды колебаний заряда, то получится более сложная зависимость, которую можно свести к появлению дополнительного слагаемого в аргументе синуса, т.е. к дополнительному изменению фазы колебаний.

Энергия затухающих колебаний убывает, рассеиваясь на сопротивлении [9 – 11]. В любой момент времени можно записать соотношение

$$W_{э0} + W_{м0} = W_э(t) + W_м(t) + Q(t),$$

где в левой части уравнения – значения энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки в начале процесса, а в правой – значения энергии электрического и магнитного полей, а также количество теплоты, выделившейся на резисторе к моменту времени t .

Мгновенное значение энергии электрического поля конденсатора можно определить по известной формуле [9 – 11]:

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} e^{-2\beta t} \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (2.25)$$

а мгновенное значение энергии магнитного поля катушки [9 – 11] как

$$W_м = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} e^{-2\beta t} \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (2.26)$$

В обоих случаях скорость убывания энергии определяется множителем $e^{-2\beta t}$, где β – коэффициент затухания.

На рис. 2.6 показано, как убывает амплитуда затухающих электромагнитных колебаний на примере изменения напряжения на конденсаторе и заряда конденсатора. На рис. 2.7. показано убывание энергии электромагнитных колебаний. Здесь $E = W_э + W_м$ – энергия электрического и магнитного поля, Q – энергия, выделившаяся в виде тепла на сопротивлении R , β – коэффициент затухания.

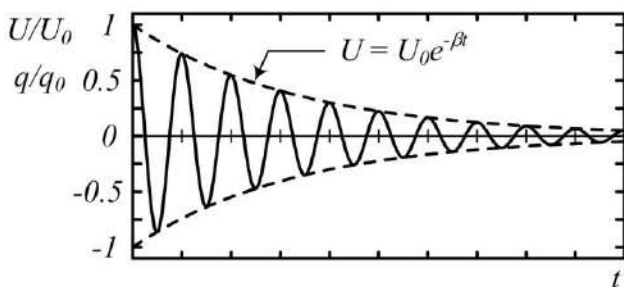


Рис. 2.6. Затухающие колебания

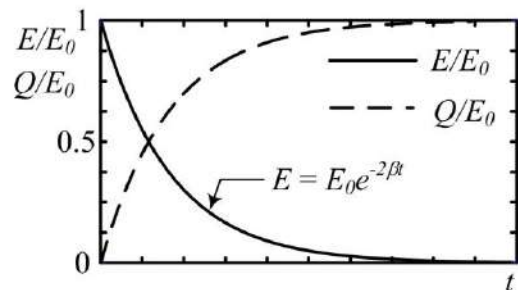


Рис. 2.7. Изменение энергии затухающих колебаний

Как и в случае затухающих механических колебаний, для количественного описания процесса затухания электромагнитных колебаний используются такие физические величины, как коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент затухания, время релаксации колебаний и добротность колебательной системы. Вспомним физический смысл этих величин и выведем формулы для их вычисления в случае электромагнитных колебаний.

Коэффициент затухания показывает, как быстро затухают колебания. Определить величину коэффициента затухания можно по формуле (2.20)

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

R – величина электрического сопротивления колебательного контура, L – величина индуктивности. С ростом сопротивления коэффициент затухания растет, а рост индуктивности, напротив, уменьшает коэффициент затухания.

Величину коэффициента затухания можно также определить, наблюдая за процессом затухающих колебаний. Это легко сделать с помощью электронного осциллографа. Так, напряжение на конденсаторе колебательного контура при затухающих колебаниях изменяется по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Нужно измерить два значения напряжения, соответствующих одинаковым фазам колебаний, например, произвести измерения напряжения в моменты, когда величина напряжения достигает локального максимума (рис. 2.6). В такие моменты времени величина функции $\cos(\omega t + \varphi)$ достигает своего максимального значения, равного единице. Тогда напряжения в эти два момента времени

$$U(t_1) = U_0 e^{-\beta t_1},$$

$$U(t_2) = U_0 e^{-\beta t_2}.$$

Найдем отношение

$$\frac{U(t_1)}{U(t_2)} = \frac{e^{-\beta t_1}}{e^{-\beta t_2}} = e^{\beta(t_2 - t_1)}.$$

Прологарифмируем последнее выражение и найдем формулу для вычисления коэффициента затухания β .

$$\ln \frac{U(t_1)}{U(t_2)} = \beta(t_2 - t_1),$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{U(t_1)}{U(t_2)}.$$

В последней формуле $\Delta t = t_2 - t_1$ – промежуток времени, прошедший между двумя измерениями напряжения. Эту величину легко можно определить с помощью электронного осциллографа. Найдя таким образом коэффициент затухания, можно не только количественно охарактеризовать процесс затухания колебаний, но и определить некоторые электрические параметры контура с помощью формулы (2.20).

Существуют и другие величины, которые характеризуют процесс затухания колебаний. Это декремент затухания и логарифмический декремент затухания [1, 2, 9]. Декремент затухания показывает, во сколько раз уменьшается амплитуда затухающих колебаний за время одного периода колебаний. Величину декремента затухания γ для электромагнитных колебаний можно найти так:

$$\gamma = \frac{U(t)}{U(t + T)} = e^{\beta T}. \quad (2.27)$$

Для этого удобно, как и в случае нахождения коэффициента затухания, использовать значения напряжения, соответствующие локальным максимумам (рис. 2.6).

Логарифмический декремент затухания δ равен натуральному логарифму обычного декремента затухания [1, 2, 9]. Для затухающих электромагнитных колебаний его можно определить так:

$$\delta = \ln \gamma = \ln \frac{U(t)}{U(t + T)}. \quad (2.28)$$

Как и в случае механических колебаний, можно выразить логарифмический декремент затухания через коэффициент затухания:

$$\delta = \ln \frac{U(t)}{U(t + T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз (e – основание натурального логарифма), называют временем релаксации колебаний [1, 2, 9]. Это время можно найти из условия

$$\frac{U(t)}{U(t + \tau)} = e.$$

Чем больше время релаксации колебаний, тем медленнее затухают колебания.

Время релаксации колебаний связано с коэффициентом затухания и логарифмическим декрементом затухания [1, 2, 9]. В процессе затухающих колебаний напряжение на конденсаторе колебательного контура уменьшается и через время $t = \tau$ будет равно $U(\tau) = U_0 e^{-\beta\tau}$. Измерять напряжение в этом случае нужно в такие моменты времени, когда фазы колебаний совпадают. И в этом случае измерения удобно делать тогда, когда напряжение достигает локальных максимумов или минимумов (рис. 2.6). С другой стороны, согласно определению времени релаксации, это же напряжение равно $U(\tau) = \frac{U_0}{e} = U_0 e^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} U_0 e^{-\beta\tau} &= U_0 e^{-1}, \\ \beta\tau &= 1, \\ \tau &= \frac{1}{\beta} = \frac{T}{\delta}. \end{aligned}$$

Важной характеристикой колебательной системы, в которой происходят затухающие колебания, является ее добротность. Добротность Q равна числу колебаний N_e , которое совершит система за время убывания амплитуды колебаний в e раз, умноженному на число π [1, 2, 9]:

$$Q = \pi N_e.$$

Определим число колебаний, которое система успеет совершить за время релаксации τ . Число колебаний, которое будет совершено за время τ равно $N_e = \frac{\tau}{T}$.

Как было показано выше, $\tau = \frac{T}{\delta}$, поэтому

$$N_e = \frac{1}{\delta}.$$

$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T}.$$

T – период затухающих колебаний, определяемый по формуле (2.21), в приближении слабого затухания можно использовать формулу Томсона для периода незатухающих гармонических колебаний [9 – 11], β – коэффициент затухания, δ – логарифмический декремент затухания. Чем выше добротность колебательной системы, тем большее число колебаний она сможет совершить за время релаксации. Колебательные контуры с большой добротностью называются высокодобротными, контуры с малой добротностью – низкодобротными. Высокодобротные колебательные контуры обладают малым затуханием, и наоборот, низкодобротные характеризуются высоким затуханием.

Основные результаты и выводы

1. Затухающие колебания напряжения на конденсаторе колебательного контура происходят по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Величина коэффициента затухания β определяется по формуле (2.20), а величина циклической частоты колебаний – по формуле (2.21).

2. В приближении слабого затухания, когда выполняется условие

$$R \ll 2 \sqrt{\frac{L}{C}},$$

можно считать, что частота затухающих колебания приблизительно равна частоте незатухающих гармонических колебаний, происходящих в контуре с такими же величинами емкости C и индуктивности L . В этом приближении также можно считать, что затухающие колебания тока в контуре отличаются от затухающих колебаний напряжения по фазе на $\frac{\pi}{2}$ и происходят по закону

$$I = I_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

3. Величина энергии, рассеянной на сопротивлении контура, равна убыли суммарной энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки.

4. Для колебательного контура с отличным от нуля сопротивлением для описания процесса затухания колебаний используют коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, время релаксации колебаний и добротность. Методы вычисления и измерения этих параметров были рассмотрены в настоящем разделе.

Контрольные вопросы

1. Вывести формулу периода колебаний заряда конденсатора в колебательном контуре с ненулевым сопротивлением.

2. Что называется декрементом затухания, логарифмическим декрементом затухания?

3. Как значение активного сопротивления реального электрического колебательного контура влияет на частоту колебаний? Определить значение сопротивления реального электрического колебательного контура, при котором колебания не возникнут.

4. Как период колебаний магнитной энергии в электрическом колебательном контуре соотносится с периодом колебаний тока в контуре?

5. Как зависит от времени полная энергия колебаний в реальном колебательном контуре?

6. Что называется добротностью колебательного контура? Чему равна добротность идеального колебательного контура? Поясните физический смысл добротности.

2.9. Вынужденные электромагнитные колебания

Рассматривая механические колебания в разд. 1.20 настоящего пособия, мы показали, что при воздействии на колебательную систему внешней перио-

дической вынуждающей силы в системе возникают вынужденные колебания [1,2]. Сначала в колебательной системе возбуждаются два вида колебаний – собственные затухающие колебания и колебания с частотой внешней вынуждающей силы. В течение времени установления колебаний движение системы имеет сложный характер. Но после затухания собственных колебаний система переходит в режим колебаний с частотой внешней вынуждающей силы. При совпадении частоты собственных колебаний системы и частоты внешней вынуждающей силы возникает резонанс, т.е. резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний [1, 2]. Похожая картина наблюдается и в случае вынужденных электромагнитных колебаний в колебательном контуре.

Начнем с вывода дифференциального уравнения вынужденных электромагнитных колебаний. В качестве источника внешних гармонических колебаний будем рассматривать источник, создающий переменное напряжение. Пусть напряжение, создаваемое внешним источником, изменяется по гармоническому закону $U = U_0 \cos(\Omega t)$. Ω – циклическая частота напряжения, создаваемого внешним источником. Схема подключения колебательного контура к источнику показана на рис. 2.8. Как и в случае затухающих электромагнитных колебаний, запишем закон Ома [9 – 11]:

$$U + \varepsilon_c = IR + U_0 \cos(\Omega t).$$

Как и при рассмотрении затухающих колебаний, выразим напряжение на конденсаторе через его заряд [9 – 11], а ЭДС индукции – через силу тока и заряд конденсатора [9 – 11]. После подстановки этих выражений в закон Ома получим

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = -R \frac{dq}{dt} + U_0 \cos(\Omega t).$$

Приведем полученное уравнение к стандартному виду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos(\Omega t). \quad (2.29)$$

Это и будет дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний. Введем параметры, которые мы использовали при решении

уравнения затухающих колебаний – коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$ и циклическую частоту незатухающих гармонических колебаний $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Величину $\frac{U_0}{L}$ обозначим как f_0 . С такими обозначениями уравнение (2.29) примет вид, аналогичный уравнению вынужденных механических колебаний, решение которого подробно рассматривалось в разд. 1.19:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = f_0 \cos(\Omega t). \quad (2.30)$$

Полученное уравнение является обыкновенным линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Методика решения таких уравнений описана во многих учебниках по дифференциальным уравнениям, например в [4 – 6]. Мы воспользуемся решением, полученным в разд. 1.19 настоящего пособия для аналогичного уравнения вынужденных механических колебаний. Мы не будем рассматривать случай, когда из-за очень большого значения коэффициента затухания собственные колебания в контуре не возникнут. В этом случае, очевидно, в контуре сразу установятся колебания с частотой внешней вынуждающей силы. В остальных случаях решение уравнения (2.30) будет иметь вид суммы общего решения линейного однородного уравнения (уравнения затухающих колебаний) и частного решения линейного неоднородного уравнения [4 – 6]:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \gamma), \quad (2.31)$$

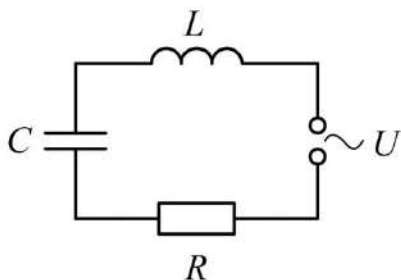


Рис. 2.8. Подключение колебательного контура к источнику

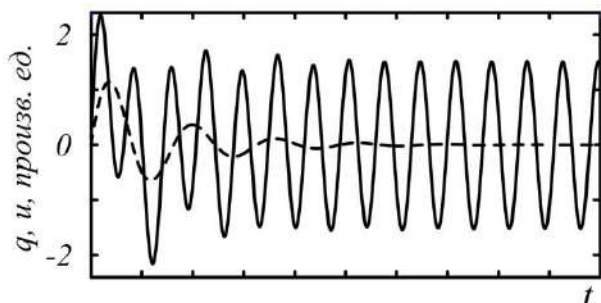


Рис. 2.9. Вынужденные колебания заряда и напряжения. Пунктиром показан вклад затухающих колебаний

где

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (2.32)$$

$$\gamma = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (2.33)$$

Напряжение на конденсаторе колебательного контура будет изменяться по формуле, аналогичной решению, см.(2.31):

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \gamma). \quad (2.34)$$

Как и в случае вынужденных механических колебаний, на протяжении времени, когда убывающее первое слагаемое в решениях (2.31) и (2.34) будет давать заметный вклад в результирующее колебание, колебания напряжения или заряда будут иметь сложный характер. Этот период называется временем установления колебаний. После установления колебания будут происходить с частотой внешней вынуждающей силы и их можно будет описать только вторым слагаемым в решении (рис.2.9).

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний B определяется по формуле (2.32). Подкоренное выражение в знаменателе этой формулы принимает минимальное значение, когда частота собственных незатухающих колебаний в контуре совпадает с частотой внешней вынуждающей силы. В этом случае амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. Напомним, что резкое возрастание амплитуды колебаний, происходящее при совпадении частоты внешней вынуждающей силы с частотой собственных колебаний системы, называется резонансом [1, 2, 9 – 11].

Условие возникновения резонанса в колебательном контуре состоит в следующем:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \Omega^2. \quad (2.35)$$

В контуре с затуханием величина амплитуды резонансных колебаний ограничивается вторым слагаемым в подкоренном выражении формулы (2.32). Величина этого слагаемого пропорциональна квадрату коэффициента затуха-

ния. Чем больше коэффициент затухания, тем меньше возможная максимальная амплитуда колебаний при резонансе.

При наступлении резонанса мощность, передаваемая от внешнего источника напряжения колебательному контуру, резко возрастает. Но эта мощность не может быть безграничной. Ее величина ограничена мощностью источника внешних колебаний. Поэтому вторым, и, возможно, главным фактором ограничения амплитуды вынужденных колебаний является закон сохранения энергии. Невозможно создать источник, который развивал бы бесконечно большую мощность.

Основные результаты и выводы

1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (2.29) является следствием применения закона Ома к описанию движения зарядов в колебательном контуре под воздействием внешнего периодического напряжения.

2. Решение дифференциального уравнения вынужденных электромагнитных колебаний (2.31), как и решение дифференциального уравнения вынужденных механических колебаний содержит два слагаемых, одно из которых описывает собственные затухающие электромагнитные колебания в контуре, а второе – колебания, происходящие с частотой напряжения внешнего источника. После установления колебания остаются только колебания с частотой внешнего источника.

3. При совпадении частоты изменения напряжения внешнего источника с частотой собственных незатухающих колебаний контура происходит резонанс, т.е. резкое возрастание амплитуды колебаний. Амплитуда колебаний при резонансе ограничивается невозможностью передачи очень большой мощности от внешнего источника и наличием затухания в колебательном контуре.

Контрольные вопросы

1. Что называют вынужденными электромагнитными колебаниями?
2. Назовите условия появления резонансных колебаний в цепи.

2.10. Принципы радиосвязи. Применение явления резонанса

В 1865 г. выдающийся шотландский физик Дж. К. Максвелл предсказал возможность существования электромагнитных волн, распространяющихся в пространстве согласованных колебаний напряженностей электрического и магнитного полей [8]. Согласно теории Максвелла, электромагнитные волны распространяются со скоростью света, равной примерно $3 \cdot 10^8$ м/с. В 1887 г. немецкий физик Г. Р. Герц экспериментально обнаружил электромагнитные волны. В 1895 г. русский ученый А. С. Попов продемонстрировал на заседании Русского физико-химического общества передачу и прием сигналов с помощью электромагнитных волн [8, 9]. Итальянский инженер Г. Маркони в 1897 г. запатентовал принцип радиотелеграфии и в 1901 г. провел первый сеанс радиосвязи через Атлантический океан. Интересно, что в 1890-х гг. работами по передаче и приему радиосигналов занимался в Мельбурнском университете (Австралия) будущий дважды нобелевский лауреат Э. Резерфорд [8]. В результате работ этих, а также огромного числа других ученых и инженеров радиотехника не только стала распространенной областью современных технологий, но и глубоко вошла в наш быт.

Главная идея радиосвязи состоит в том, что на передающей станции с помощью колебательного контура, настроенного на определенную частоту, излу-

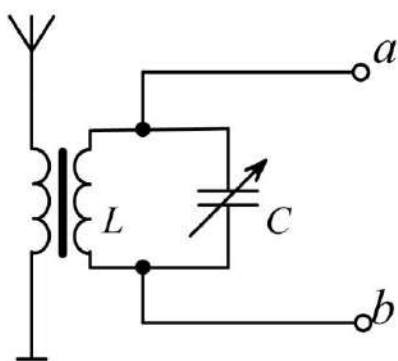


Рис. 2.10. Схема приемного контура радиоприемника

чаются электромагнитные волны. Эти волны распространяются в пространстве и в точке, где находится приемник электромагнитных волн, возбуждают в этом приемнике переменный электрический ток. Этот ток усиливается и в результате воспроизводится сигнал, посланный с передающей станции.

Электрическая схема, иллюстрирующая принцип работы простейшего радиоприемни-

ка, показана на рис. 2.10. Электромагнитные волны, т.е. колебания напряженности электрического и магнитного поля возбуждают в приемной антенне слабые колебания электрического тока. Вследствие электромагнитной индукции в катушке переменного колебательного контура возникают переменные ЭДС соответствующих частот и вынужденные колебания силы тока и напряжения этих же частот. Антенна выполняет роль генератора внешних вынуждающих колебаний. В контуре возникают вынужденные колебания.

Радиоволны от различных передающих станций возбуждают в антенне радиоприемника переменные токи различных частот, так как каждая передающая радиостанция работает на своей частоте. Амплитуды возбуждаемых в контуре токов малы. Но если частота собственных колебаний контура совпадет с частотой колебаний, принимаемых антенной, то наступит резонанс и амплитуда вынужденных колебаний, возникающих в приемном контуре, резко возрастет. Усиленный таким образом сигнал можно зафиксировать. Изменять частоту собственных колебаний колебательного контура можно с помощью конденсатора переменной емкости, которую можно регулировать. Изменяя емкость конденсатора, мы меняем собственную частоту колебаний в приемном контуре и сможем подобрать такую частоту, которая совпадет с частотой колебаний принимаемых электромагнитных волн. Из колебаний всех частот, возбужденных в антенне, контур выделяет только те колебания, частота которых равна его собственной частоте. Главную роль в этом процессе играет явление резонанса при возникновении вынужденных электромагнитных колебаний.

Основные результаты и выводы

1. Прием радиоволн основан на возбуждении в антенне и приемном колебательном контуре вынужденных электромагнитных колебаний с частотой, равной частоте колебаний электромагнитной волны.
2. Выделение и усиление колебаний определенной частоты производится благодаря явлению резонанса, когда подбирают такую собственную частоту ко-

лебаний приемного колебательного контура, которая равна частоте колебаний принимаемой электромагнитной волны.

Контрольные вопросы

1. Контур радиоприемника настроен на радиостанцию, частота которой 9 МГц. Сопротивлением контура пренебречь. Как изменить емкость конденсатора колебательного контура, чтобы настроить его на резонансную частоту 3 МГц?

- 1) уменьшить в 3 раза; 2) увеличить в 3 раза; 3) уменьшить в 9 раз;
- 4) увеличить в 9 раз; 5) увеличить в $\sqrt{3}$ раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии мы рассмотрели основные физические модели, применяемые для описания колебаний – гармонические колебания, затухающие колебания и вынужденные колебания, а также некоторые физические явления и процессы, которые могут быть описаны с помощью этих моделей. Математические методы, применяемые для описания различных по своей природе колебательных процессов, оказались очень похожи. Это дает надежду на то, что и другие колебательные процессы могут быть описаны с применением тех же методов и похожих моделей.

В тоже время реальные процессы, происходящие в природе и в различных технических устройствах, бывают очень сложными и требуют применения специальных методов, которые рассматриваются в процессе изучения многих инженерных дисциплин. Мы надеемся, что наше пособие поможет вам создать надежную основу для изучения специальных дисциплин и в конечном счете поможет стать квалифицированными специалистами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрелков, С. П.* Механика [Текст]: учебник для вузов/ С. П. Стрелков. – 7-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2025. – 560 с.
2. *Хайкин, С.Э.* Физические основы механики [Текст]: учебное пособие для вузов/ С. Э. Хайкин. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2025. – 756с.
3. *Савельев, И. В.* Курс общей физики [Текст]: учебник для вузов в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. — 18-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 384 с.
4. *Понтрягин, Л. С.* Знакомство с высшей математикой: дифференциальные уравнения и их приложения [Текст]: учебное пособие / Л. С. Понтрягин. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. — 208 с.
5. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Регулярная и хаотическая динамика [Текст]: учебное пособие / Л. С. Понтрягин. — 6-е изд. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019. — 396 с.
6. *Демидович, Б. П.* Дифференциальные уравнения [Текст]: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 280с.
7. *Бронштейн, И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов [Текст]: учебное пособие для вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2025. — 608с.
8. *Кудрявцев, П. С.* Курс истории физики [Текст]: учебное пособие для студентов педагогических институтов по физическим специальностям / П. С. Кудрявцев. – 2-е изд. перераб. и доп. – Москва: Просвещение, 1982. – 447 с.
9. *Калашиников, С. Г.* Электричество [Текст]: учебное пособие/ С. Г. Калашиников. – 6-е изд. – Москва. Физматлит, 2008. – 624 с.

10. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики [Текст]: учебное пособие в 5 т. Т.3. Электричество/ Д. В. Сивухин. – 5-е изд., стер. – Москва: Физматлит, 2009. – 655 с.
11. *Савельев, И. В.* Курс общей физики [Текст]: учебное пособие для вузов в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И. В. Савельев. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 500 с.

Учебное издание

КОЛПАЧЕВ Алексей Борисович
КОЛПАЧЕВА Ольга Валериевна

КОЛЕБАНИЯ

Учебное пособие

Редактор: З.И. Надточий

Корректор: З.И. Надточий

Компьютерная верстка: ...

Подписано в печать ...

Бумага офсетная 60×84 $\frac{1}{16}$. Усл. печ.л.8.05

Уч. изд.л.8 Тираж 30 экз. Заказ №

Издательство Южного Федерального университета

Отпечатано в отделе полиграфической,
корпоративной и сувенирной продукции

Издательско-полиграфического комплекса

КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ

344000, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки 200/1 Тел. 8(863)243-41-66.