

А.С.Уколов

**ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ**

Часть IV

**СТАЦИОНАРНОЕ
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

А.С. Уколов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Часть IV

**СТАЦИОНАРНОЕ
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

Учебное пособие

УДК 53(075.8)+538.12(075.8)

Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч.IV. Стационарное магнитное поле. Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000, 97 с.

Предметом данной части учебного пособия является описание природы магнитостатического поля, его силового действия на материальные объекты, свойств и характеристик этого поля в вакууме и веществе. Рассматриваются также природа и свойства основных типов магнетиков. Пособие соответствует рабочей программе курса общей физики для студентов технических специальностей ТРТУ, обучающихся по системе РИТМ.

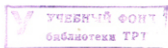
Печатается по решению редакционно-издательского совета Таганрогского государственного радиотехнического университета. Ил.44.

Рецензенты:

Кафедра прикладной электродинамики и компьютерного моделирования Ростовского-на-Дону государственного университета.
Ю.М. Вернигоров, д-р.техн.наук, профессор кафедры физики Донского государственного технического университета.

© Таганрогский государственный радиотехнический университет, 2000

© Уколов А.С., 2000



1. Магнитостатическое поле в вакууме

1.1. Магнитное поле и его физическая природа

Существование магнитных явлений известно человечеству уже достаточно давно: ориентация стрелки компаса, взаимодействие постоянных магнитов с земным магнитным полем и т.д. Наличие магнитного поля можно обнаружить таким же образом, как и любого другого силового поля: по его силовому действию. Хорошо известны классические опыты Г.Х. Эрстеда, связанные с воздействием проводника с током на магнитную стрелку, помещенную под проводник; с действием постоянного магнита на проводник с током; с взаимодействием проводников с током между собой. Тот факт, что указанные взаимодействия имеют неэлектростатическую природу, легко устанавливается в результате анализа опыта Эрстеда по взаимодействию двух параллельных проводников с одинаковыми по величине токами противоположного направления (рис.1.1).

В этом случае между проводниками возникают силы отталкивания. Эти силы не являются электростатическими, так как проводники остаются в опыте электрически нейтральными. Кроме того, взаимодействие исчезает, если разорвать цепь ($I=0$). Следовательно, силовое поле, обуславливающее взаимодействие проводников с токами, появляется в пространстве имен-

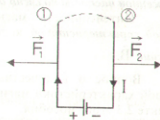


Рис.1.1

но из-за наличия в этом пространстве электрических токов – упорядоченного движения заряженных частиц. Это силовое поле называется **магнитным**. Проводя рассуждения и опираясь при этом на уже известные факты, можно сказать, что магнитное поле возникает там, где есть движущиеся заряженные частицы.

Отметим здесь две важнейшие особенности магнитного поля движущейся частицы.

1. **Магнитное поле имеет относительный (релятивистский) характер.** Убедиться в этом можно, рассматривая в некоторой инерциальной системе отсчета равномерно и прямолинейно движущуюся заряженную частицу. Такое движение эквивалентно некоторому прямому току, который в окружающем пространстве

создает магнитное поле. Если перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с заряженной частицей, то в этой системе отсчета частица покоится, а значит, переноса заряда (тока) нет, поэтому будет отсутствовать и магнитное поле. Следовательно, наличие или отсутствие магнитного поля, создаваемого заряженной частицей зависит от выбора системы отсчета. В этом и проявляется релятивистский характер магнитного поля.

2. Другая особенность магнитного поля движущейся заряженной частицы связана с нарушением *изотропии* пространства. Появление в некоторой точке первоначально пустого пространства покоящейся заряженной частицы оставляет это пространство изотропным, так как электростатическое поле такой частицы сферически симметрично, а значит, все направления соответственно равноправны. При движении заряженной частицы появляется *физически* выделенное направление, связанное с ее скоростью \vec{v} . Пространство становится *анизотропным*. Отметим, что все направления, перпендикулярные скорости частицы, остаются равноправными.

Сказанное означает, что *магнитное поле движущейся заряженной частицы должно обладать осевой симметрией*.

“Интенсивность” магнитного поля принято описывать его *силовой характеристикой*, которая называется *вектором магнитной индукции* \vec{B} .

Вопрос о количественном определении вектора \vec{B} как силовой характеристики магнитного поля будет обсуждаться ниже в пункте 2.3 этого пособия.

Магнитное поле, созданное системой движущихся зарядов (токов), так же как и электростатическое, подчиняется принципу суперпозиции.

Магнитное поле \vec{B} системы движущихся зарядов (токов) равно векторной сумме магнитных полей \vec{B}_i , созданных в данной точке поля, каждым из зарядов (токов) системы в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (1.1)$$

При непрерывном распределении токов в проводящей сфере векторное суммирование в (1.1) следует заменить интегрированием.

Справедливость (1.1) непосредственно обусловлена тем, что \vec{B} является *силовой* характеристикой поля.

Выводы. Магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами), имеет релятивистский характер и подчиняется принципу суперпозиции. Силовой характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции.

Контрольные вопросы

- 1.1. Охарактеризуйте физическую природу магнитного поля.
- 1.2. Укажите основные особенности магнитного поля. В чем проявляется относительный характер этого силового поля?
- 1.3. Сформулируйте принцип суперпозиции для магнитного поля.

1.2. Магнитное поле движущегося заряда.

Закон Био - Савара - Лапласа

Обобщение большого количества опытных данных позволяет установить основное соотношение между индукцией магнитного поля \vec{B} в точке наблюдения, величиной точечного заряда q , создающего это поле, и его скоростью \vec{v} в выбранной системе отсчета в виде

$$\vec{B} = k \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}, \quad (1.2)$$

где $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – радиус-вектор, проведенный от движущегося заряда к точке наблюдения; k – коэффициент пропорциональности, величина и форма записи которого зависят от выбора системы единиц. В системе единиц СИ, где индукция \vec{B} измеряется в *тесла* (Тл), коэффициент k записывают в форме

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн/м}. \quad (1.3)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная. Выбор коэффициента k в форме (1.3) диктуется соображениями, подобными тем, которыми руководствуются при выборе формы записи коэффициента пропорциональности в законе Кулона. Обсуждение этих соображений выходит за рамки данного пособия.

Учитывая (1.3), равенство (1.2) в системе единиц СИ запишем в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q[\vec{v}\vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (1.4)$$

Отметим, что в данной системе отсчета конец радиус-вектора, связанный с точкой наблюдения, неподвижен, а его начало движется вместе с частицей со скоростью \vec{v} . Поэтому вектор \vec{B} в этой системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения относительно частицы, но и от времени, т.е. $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}(t))$.

Формула (1.4) справедлива до тех пор, пока скорость заряженной частицы остается *нерелятивистской* ($v \ll c$). Из (1.4) видно, что вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости, в которой лежат

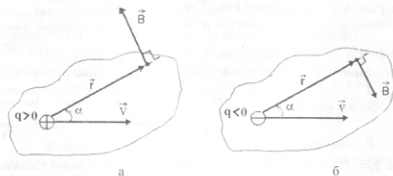


Рис.1.2

векторы \vec{v} и \vec{r} в данный момент времени (рис.1.2): $\vec{B} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{r}$.

Направление \vec{B} совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \vec{v} к \vec{r} по кратчайшему направлению для положительной частицы (рис.1.2,а) и противоположно поступательному движению винта для отрицательной частицы (рис.1.2,б).

Магнитное поле графически можно изображать с помощью линий индукции, правила построения которых аналогичны правилам для линий напряженности электростатического поля.

Как уже указывалось в п.1.1, магнитное поле должно обладать осевой симметрией. Это совместно с (1.4) означает, что линии индукции магнитного поля движущейся заряженной частицы представляют собой окружности, центры которых лежат на

прямой, вдоль которой частица движется в данный момент времени (рис.1.3).

Равенство (1.4) позволяет определить вектор магнитной индукции, создаваемой проводниками с током. Рассмотрим общую постановку вопроса: как определить вектор

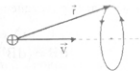


Рис.1.3

поля \vec{B} , создаваемого в данной точке проводником с током I (рис.1.4)? Поскольку разные участки проводника находятся от точки наблюдения на разных расстояниях, то предварительно необходимо уметь вычислять магнитную индукцию $d\vec{B}$, создаваемую в данной точке малым участком $d\ell$ проводника с током, после чего, очевидно, воспользовавшись принципом суперпозиции (1.1) в интегральной форме, можно определить результирующий вектор \vec{B} .

Итак, задача сводится к нахождению вектора $d\vec{B}$ от элемента $d\ell$ проводника с током I (рис.1.5). Проводник будем считать тонким, в этом случае размерами его поперечного сечения ($\sqrt{S} \ll r$) можно пренебречь по сравнению с расстоянием r до точки наблюдения. Каждый носитель тока q_0 создает в точке наблюдения магнитное поле с индукцией (1.4)

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 q_0[(\vec{v} + \vec{u})\vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (1.5)$$

где \vec{v} — скорость теплового, \vec{u} — скорость упорядоченного движения отдельного носителя заряда.

Носители заряда, находящиеся в элементе проводника создают в точке А (рис.1.5) поле

$$d\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i,$$

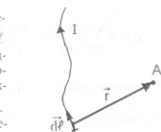


Рис.1.4

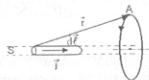


Рис.1.5

которое из-за хаотичности теплового движения носителей заряда очень быстро изменяется с течением времени. В действительности, мы имеем дело с усредненным значением индукции:

$$d\vec{B} = \langle d\vec{B}' \rangle = \left\langle \sum_i \vec{B}_i \right\rangle = \sum_i \langle \vec{B}_i \rangle. \quad (1.6)$$

Заметим, что поле $d\vec{B}'$ является *микроскопическим*, а $d\vec{B}$ - *макроскопическим*. Кроме того, согласно *эргодической гипотезе*, усреднение по времени может быть заменено усреднением по носителю. Таким образом, подставляя (1.5) в (1.6), получим

$$d\vec{B} = \sum_i \left\langle \frac{\mu_0 q_0 [(\vec{v} + \vec{u})\vec{r}]}{4\pi r^3} \right\rangle = \sum_i \frac{\mu_0 q_0 \langle |\vec{v} + \vec{u}| \rangle \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad (1.7)$$

где учтено, что $\langle \vec{v} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle$, так как $\langle \vec{v} \rangle = 0$.

Сумму средних значений $\langle \vec{B}_i \rangle = \frac{\mu_0 q_0 \langle |\vec{v} + \vec{u}| \rangle \vec{r}}{4\pi r^3}$ в правой части

(1.7) можно заменить произведением среднего $\langle \vec{B}_i \rangle$ на полное число носителей заряда, содержащихся в объеме элемента проводника: $dN = nSd\ell$, после чего вместо (1.7) получим

$$d\vec{B} = dN \langle \vec{B}_i \rangle = \frac{\mu_0 q_0 \langle |\vec{u} + \vec{v}| \rangle}{4\pi r^3} nSd\ell.$$

Введем *вектор элемента проводника с током* с помощью равенства $\vec{j}d\vec{\ell} = \vec{j}d\vec{\ell}$. С учетом известных формул: $\vec{j} = q_0 n \langle \vec{u} \rangle$ и $I = \int S$ окончательно будем иметь

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{\ell}\vec{r}]}{r^3}. \quad (1.8)$$

Формулу (1.8) можно записать в другом виде:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}d\vec{\ell}\vec{r}]}{r^3} dV, \quad (1.9)$$

которую удобно применять в случае, когда ток распределен неравномерно либо по сечению проводника, либо в объеме какой-то проводящей среды. Формулы (1.8) и (1.9) являются дифференциальной формой записи *закона Био - Савара - Лапласа*. Исторически этот закон был открыт раньше чем (1.4). Исследования структуры магнитных полей проводников с током различной формы в результате опытов, проведенных Био и Саваром, были обобщены и представлены в виде физического закона (1.8) Лапласом.

Используя теперь (1.9) или (1.8) и принцип суперпозиции, результирующее поле любого проводника с током можно определить интегрированием по всему объему проводника:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV \quad (1.10)$$

или по всем его элементам

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{I [d\vec{\ell}\vec{r}]}{r^3}. \quad (1.11)$$

Формулы (1.10) и (1.11) являются *интегральными* выражениями закона Био - Савара - Лапласа.

В заключение этого пункта отметим, что формулы (1.8) - (1.11) справедливы в нерелятивистских случаях, когда скорости носителей заряда или проводников с током значительно меньше скорости света в вакууме.

Выводы. Расчет вектора индукции магнитного поля для потоков заряженных частиц может быть произведен на основании формулы (1.4) и принципа суперпозиции. В случае проводников с током этот расчет можно проводить с использованием закона Био - Савара - Лапласа и принципа суперпозиции.

Контрольные вопросы

1.4. Опишите структуру магнитного поля движущейся заряженной частицы на основании формулы (1.2). Является ли это поле стационарным и почему?

1.5. Попробуйте пояснить, почему формула (1.2) является нерелятивистской?

1.0. Полюсно, почему при отсутствии тока в проводнике тепловое движение частиц не создает макроскопического магнитного поля в окружающем пространстве?

1.7. Проведите сравнение величин B и E для движущейся со скоростью $v \ll c$ заряженной частицы в точке, лежащей на перпендикуляре к скорости частицы. О чем свидетельствует полученный результат? Почему, несмотря на этот результат, во многих случаях необходимо учитывать макроскопические магнитные поля проводников с током?

1.3. Магнитные поля прямого и кругового проводников с током

Непосредственный расчет индукции магнитного поля проводников с током произвольной формы по формулам (1.10), (1.11) представляет собой достаточно сложную математическую задачу. В случаях, когда форма проводников обладает определенной симметрией, эта задача значительно упрощается. Рассмотрим два простейших примера вычисления индукции магнитного поля.

а) *Магнитное поле прямолинейного бесконечно тонкого отрезка проводника с током.*

Решение этой задачи имеет самостоятельное значение, поскольку во многих случаях какие-либо участки проводников имеют подобную форму. Рассмотрим бесконечно тонкий прямолинейный отрезок проводника с током I (рис.1.6). Легко видеть, что каждый бесконечно малый элемент $d\vec{\ell}$ этого проводника создает в точке наблюдения A индукцию магнитного поля $d\vec{B}$ одного и того же направления перпендикулярно плоскости рисунка. Поэтому векторное интегрирование в (1.11) можно заменить интегрированием модулей $d\vec{B}$, причем

$$B = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell \sin \alpha}{r^2} \quad (1.12)$$

Рис.1.6

Из рис.1.6 видно, что $d\vec{\ell} \cos \beta = d\ell \cos \beta$ и $r = \frac{b}{\cos \beta}$, где b – расстояние от оси проводника до точки наблюдения A . Следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha d\beta}{b}$$

Переходя в подинтегральном выражении последнего равенства к интегрированию по α ($\beta + \frac{\pi}{2} = \alpha$, $d\beta = d\alpha$), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (1.13)$$

где α_1 и α_2 – углы, которые составляют первый и последний элементы $d\vec{\ell}$ отрезка проводника с радиус-векторами, проведенными из концов отрезка проводника в точку наблюдения.

Из формулы (1.13) можно легко получить равенство для индукции магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводником. В этом случае в пределе при $\alpha_1 \rightarrow 0$ и $\alpha_2 \rightarrow \pi$ формула (1.13) принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b} \quad (1.14)$$

Последней формулой можно приближенно пользоваться и в случае отрезка проводника, если точка наблюдения лежит *вблизи середины отрезка проводника*, с той точностью, с которой выполняется условие $b \ll L$ (L – длина проводника).

б) *Магнитное поле на оси кругового тока*
На рис.1.7 показан

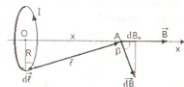


Рис.1.7

элемент кругового проводника $d\vec{\ell}$ находится у нижнего конца вертикального диаметра. Вектор $d\vec{\ell}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка за чертой. В точке A на оси кругового тока изображен вектор $d\vec{B}$ от элемента $d\vec{\ell}$. Из соображений симметрии, ясно, что результирующее поле \vec{B} направлено в точке A вдоль оси OX. Модуль вектора \vec{B} равен алгебраической сумме проекций dB_x векторов $d\vec{B}$ от каждого элемента $d\vec{\ell}$ кругового тока:

$$B = \int_l dB_x = \int_l dB \cos\beta,$$

где с учетом (1.8) $dB = \frac{\mu_0 I d\ell \sin\alpha}{4\pi r^2}$. Учтя, что угол α между $d\vec{\ell}$ и \vec{r} при любом расположении точки A на оси равен $\pi/2$ ($\sin\alpha = 1$), для модуля B получим

$$B = \int_l \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} \cos\beta = \frac{\mu_0 I \cos\beta}{4\pi r^2} 2\pi R.$$

Из рис.1.7 видно, что $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, а $\cos\beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, поэтому окончательно имеем

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (1.15)$$

В частности, в центре кругового тока ($x = 0$) значение индукции равно

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}, \quad (1.16)$$

а на больших расстояниях от центра ($x \gg R$)

$$B_{x \gg R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{x^3}. \quad (1.17)$$

Формуле (1.16) можно придать другой вид, введя вектор

$$p_m = ISn = p_m n, \quad (1.18)$$

где \vec{n} — единичный вектор положительной нормали к плоскости контура. Направление вектора \vec{p}_m (а значит, и вектора \vec{p}_m) и направление тока в контуре образуют правовинтовую систему.

Вектор \vec{p}_m , введенный с помощью (1.18), называется **магнитным моментом контура с током**. Важность этой характеристики контура с током обусловлена тем, что магнитный момент однозначно определяет величину вектора индукции магнитного поля, создаваемого контуром в данной точке наблюдения, а также поведение самого контура во внешнем по отношению к нему магнитном поле. Поэтому магнитный момент контура с током играет в теории магнетизма такую же роль, что и дипольный момент в теории электрических полей.

Магнитный момент плоского контура с током вычисляется по формуле

$$\vec{p}_m = I \int_S d\vec{S}, \quad (1.19)$$

где интеграл берется по любой поверхности S, натянутой на данный контур, так как значение этого интеграла зависит только от формы контура.

Используя (1.18), запишем (1.15) в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (1.20)$$

Отметим, что общая картина линий магнитной индукции плоского контура с током весьма похожа на картину линий напряженности электростатического диполя.

Выводы. *Вычисление индукции магнитного поля произвольных проводников с током достаточно сложная задача, решение которой основано на применении закона Био - Савара - Лапласа и принципа суперпозиции.*

Контрольные вопросы

1.8. Опишите и качественно изобразите характер линий индукции прямолинейного отрезка проводника с током.

1.9. Каков характер линий \vec{B} для кругового контура с током?

1.10. Сравните формулы (1.20) и (2.41) из части II для величины радиальной составляющей вектора \vec{E} на оси диполя.

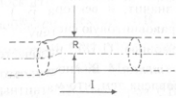


Рис.1.8

1.11. По полю цилиндрическому бесконечному проводнику радиуса R течет равномерно распределенный по поверхности ток I (рис.1.8). Определить индукцию магнитного поля B на поверхности проводника. Стенки проводника считать бесконечно тонкими.

2. Силовое действие магнитного поля в вакууме

2.1. Сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле. Сила Лоренца

Соображения, высказанные в п.1.1 данного пособия позволяют сделать вывод о том, что магнитное поле должно оказывать силовое воздействие на движущуюся заряженную частицу. Легко понять, что величина силы в этом случае зависит от заряда частицы q , ее скорости v и индукции магнитного поля B в той точке поля, где находится частица в данный момент времени. Обобщение большего числа экспериментальных данных по магнитному взаимодействию приводит к следующей формуле для определения магнитной силы \vec{F}_m :

$$\vec{F}_m = kq[\vec{v}\vec{B}], \quad (2.1)$$

где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В системе СИ $k = 1$, поэтому формула (2.1) принимает вид

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (2.2)$$

Модуль магнитной силы (2.2) равен

$$F_m = qvB \sin \alpha, \quad (2.3)$$

где α - угол между векторами \vec{v} и \vec{B} в той точке поля, где находится заряженная частица в данный момент времени.

Направление магнитной силы \vec{F}_m проиллюстрировано на рис.2.1. *Особенностью* магнитной силы является то, что она *всегда перпендикулярна* как вектору \vec{v} , так и вектору \vec{B} , т.е. перпендикулярна плоскости, в которой лежат

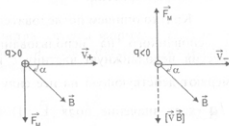


Рис.2.1

векторы \vec{v} и \vec{B} . Это в свою очередь означает, что сила \vec{F}_m при движении частицы в постоянном магнитном поле не изменяет величины ее скорости и кинетической энергии.

Здесь следует отметить, что электростатическое поле \vec{E} и магнитостатическое поле \vec{B} в "чистом" виде наблюдаются в весьма специальных ситуациях. В общем случае электрическое поле \vec{E} и магнитное поле \vec{B} являются компонентами *единого электромагнитного поля*, действие которого на движущуюся в нем заряженную частицу описывается опытным законом

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (2.4)$$

Сила \vec{F} в данной системе отсчета, определяемая выражением (2.4), называется *силой Лоренца* и имеет в данной системе две естественные составляющие: электрическую $\vec{F}_e = q\vec{E}$ и магнитную $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$.

Выражение (2.4) является фундаментальным физическим законом в теории электромагнетизма. Оно справедливо как для стационарных, так и для переменных электрических и магнитных полей при любых скоростях заряженной частицы. Фундаментальность этого закона заключается в том, что он, с одной стороны, позволяет обнаруживать наличие электрических и магнитных

полей, а с другой – дает способ измерения полей \vec{E} и \vec{B} в качестве силовых характеристик.

Кратко опишем последовательность измерения полей \vec{E} и \vec{B} , основанного на использовании формулы (2.4). Вначале, поместив неподвижную частицу с известным зарядом q в поле, измеряют действующую на нее силу \vec{F}_e (при $\vec{v} = 0$). Отношение \vec{F}_e/q дает значение поля \vec{E} . После чего следует при тех же условиях измерить силу \vec{F} , действующую на ту же частицу при ее движении со скоростью \vec{v} . Разность $\vec{F} - \vec{F}_e$ определяет ту “часть” магнитной силы $q[\vec{v}\vec{B}]$, которая обусловлена составляющей поля

\vec{B} , перпендикулярной скорости частицы \vec{v} : $B_{\perp} = \frac{|\vec{F} - \vec{F}_e|}{qv}$. Повторя измерения еще один раз для скорости частицы $\vec{v}_{\parallel} \perp \vec{v}$, аналогичным образом находят составляющую B_{\parallel} , параллельную скорости частицы \vec{v} .

Для выяснения еще одной из особенностей силы Лоренца полезно на конкретном примере провести сравнение величин электрической и магнитной сил, как составляющих силы Лоренца в данной системе отсчета. Рассмотрим две одноименно заряженные частицы q_1 и q_2 , движущиеся параллельно друг другу с одинаковыми скоростями v ($v \ll c$). На рис.2.2 изображены только составляющие \vec{F}_e и \vec{F}_m силы Лоренца, действующей на q_2 со стороны q_1 . В нерелятивистском случае имеем

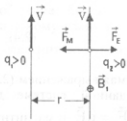


Рис.2.2

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

$$F_m = q_2 v B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v^2}{r^2}.$$

При записи последнего равенства учтены формулы (2.2) и (1.4). Отношение величин магнитной и электрической составляющих силы Лоренца в этом случае равно

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.5)$$

Интересно отметить, что отношение (2.5) оказывается справедливым и в релятивистском случае. В нерелятивистском случае магнитное взаимодействие является очень слабым по сравнению с электрическим (порядка $\sim v^2/c^2$). Отношение (2.5) еще раз свидетельствует о релятивистском характере магнитного поля.

Выводы. На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует магнитная сила, зависящая от заряда частицы, ее скорости и индукции магнитного поля в месте нахождения частицы. Действие электромагнитного поля на заряженную частицу определяется силой Лоренца, выражение которой является фундаментальным физическим законом.

Контрольные вопросы

- 1.1. Опишите особенности магнитной составляющей силы Лоренца.
- 2.2. Почему выражение (2.4) для силы Лоренца является фундаментальным физическим законом?

2.2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера

Рассмотрим некоторый проводник с током, находящийся в магнитном поле. На каждый свободный носитель заряда действует магнитная сила (2.2). Из-за “столкновений” носителя с кристаллической решеткой действие этой силы передается проводнику, что приводит к воздействию магнитного поля на сам проводник с

током. В этом случае магнитная сила, действующая на отдельный носитель q_0 , равна

$$\vec{F}_m = q_0[(\vec{v} + \vec{u})\vec{B}], \quad (2.6)$$

где \vec{v} и \vec{u} – скорости теплового и упорядоченного движений носителя заряда.

Усредняя (2.6) по носителям, как это делалось в пункте 1.2 данной части пособия, получим

$$\langle \vec{F}_m \rangle = q_0[\langle \vec{u} \rangle \vec{B}].$$

Умножим полученную среднюю силу на полное число носителей, содержащихся в элементе проводника $d\ell$ ($dN = nSd\ell$):

$$d\vec{F} = dN \langle \vec{F}_m \rangle = q_0 n[\langle \vec{u} \rangle \vec{B}] S d\ell. \quad (2.7)$$

Используя равенства $\vec{j} = q_0 n \langle \vec{u} \rangle$, $j d\ell = \vec{j} d\ell$ и $I = jS$, формуле (2.7) можно придать вид

$$d\vec{F} = [\vec{j} \vec{B}] dV, \quad (2.8)$$

где $dV = Sd\ell$ – элемент объема проводника, или

$$d\vec{F} = I[d\vec{\ell} \vec{B}]. \quad (2.9)$$

Отметим, что формулы (2.8) и (2.9) выражают *закон Ампера*. Равенством (2.8) необходимо пользоваться для вычисления результирующей силы, действующей на проводник с током со стороны магнитного поля, когда ток распределен неравномерно по сечению проводника или само сечение проводника изменяется:

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V [\vec{j} \vec{B}] dV, \quad (2.10)$$

где интеграл берется по объему проводника.

Если проводник тонкий, то результирующую силу удобнее вычислять, используя (2.9):

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = I \int_L [d\vec{\ell} \vec{B}]. \quad (2.11)$$

В качестве примера рассмотрим магнитное взаимодействие двух тонких бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга (рис.2.3). Поскольку во всех точках проводника 2 индукция магнитного поля, создаваемого проводником 1, имеет одно и то же направление ($\vec{B}_1 \perp \vec{j}_2$) и значение (1.14):

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d},$$

то на основании (2.11) имеем, что величина силы, действующей на участок проводника 2 длиной ℓ_2 со стороны проводника 1, равна

$$F_{21} = I_2 B_1 \ell_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} \ell_2. \quad (2.12)$$

Из последнего равенства видно, что на каждую единицу длины проводника 2 со стороны проводника 1 действует сила

$$f_{21} = \frac{F_{21}}{\ell_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d}. \quad (2.13)$$

Легко показать, что такая же по величине сила действует и на проводник 1 со стороны проводника 2, т.е.

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}.$$

В случае токов *одинакового направления магнитное взаимодействие имеет характер притяжения, при противоположном направлении токов – отталкивания.*

Следует отметить здесь, что формула (2.13) принимается за основу определения единицы силы тока – *ампера*, как одной из основных единиц системы СИ.

Ампер – это сила такого постоянного тока, который, протекая по двум параллельным тонким бесконечно длинным прямым проводникам, находящимся на расстоянии одного метра друг от друга в вакууме, вызывает силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины проводников.

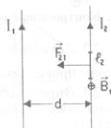


Рис.2.3

Выводы. На элемент проводника с током, находящийся в магнитном поле, действует сила Ампера, являющаяся результатом действия магнитных сил на носители заряда в проводнике. Магнитное взаимодействие проводников с током используется для экспериментального определения единицы силы тока ампера, как основной единицы в системе СИ.

Контрольные вопросы

2.3. Докажите, что на единицу длины проводника l (рис.2.3) со стороны проводника 2 действует сила $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

2.4. Определите давление p , которое оказывает собственное магнитное поле проводника, на его поверхность (см. контрольный вопрос 1.11).

2.3. Контур с током во внешнем однородном магнитном поле

Рассмотренное в предыдущем пункте силовое действие магнитного поля на находящийся в нем элемент проводника с током позволяет перейти к обсуждению более реальных физических случаев. Необходимость этого очевидна. Действительно, уединенный элемент проводника с током I в нем является физической абстракцией, как и бесконечный прямолинейный проводник. Реальным является замкнутый проводник (контур) с током в нем. Поэтому, используя закон Ампера, исследуем силовое действие внешнего магнитного поля на контур с током, помещенный в это поле. Рассмотрим вначале произвольный контур с током I в однородном магнитном поле ($\vec{B} = \text{const}$). На каждый элемент $d\vec{l}$ этого контура действует сила Ампера (2.9). Результирующая этих сил может быть вычислена с помощью (2.11):

$$\vec{F} = \oint_L d\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l} \times \vec{B}] = I \left[\left(\oint_L d\vec{l} \right) \times \vec{B} \right] = 0, \quad (2.14)$$

где использовано условие $\vec{B} = \text{const}$. Поскольку контур замкнут, то интеграл $\oint_L d\vec{l}$ равен нулю. Следовательно, $\vec{F} = 0$.

Таким образом, результирующая сила, действующая со стороны однородного магнитного поля на произвольный контур с током, равна нулю.

Для иллюстрации на рис.2.4 изображены два частных случая ориентации кругового контура в магнитном поле. Когда магнитный момент контура (1.18) $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$, контур испытывает

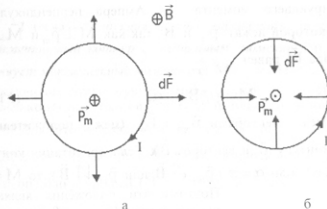


Рис.2.4

растягивающее действие магнитного поля (рис.2.4.a). В случае $\vec{p}_m \downarrow \uparrow \vec{B}$, магнитное поле стремится равномерно сжать контур (рис.2.4.б).

Если контур неплоский и ориентирован в однородном магнитном поле произвольным образом, то нетрудно видеть, что, хотя результирующая сила равна нулю, элементарные силы $d\vec{F}$, действующие на различные элементы контура $d\vec{l}$, не лежат в одной плоскости. В этом случае они создают суммарный момент сил, не зависящий от выбора точки, относительно которой определяют моменты сил $d\vec{F}$. Поэтому результирующий момент сил Ампера можно записать в виде

$$\vec{M} = \oint_L [r d\vec{F}], \quad (2.15)$$

где $d\vec{F}$ определяется формулой (2.9). Расчет результирующего момента сил по формуле (2.15) достаточно громоздок и приводит к равенству

$$\vec{M} = [r_m \vec{B}]. \quad (2.16)$$

Формула (2.16) может применяться в случае неоднородного магнитного поля. В этом случае необходимо, чтобы контур имел малые размеры по сравнению с характерным размером неоднородности магнитного поля. Такой контур называется **элементарным**.

Обсудим кратко результаты, вытекающие из (2.16). Вектор \vec{M} результирующего момента сил Ампера перпендикулярен плоскости, в которой лежат \vec{r}_m и \vec{B} , так как $\vec{M} \perp \vec{r}_m$ и $\vec{M} \perp \vec{B}$.

Модуль вектора \vec{M} равен

$$M = r_m B \sin \alpha, \quad (2.17)$$

где α – угол между векторами \vec{r}_m и \vec{B} (между положительной нормалью к контуру \vec{n} и вектором \vec{B}). Если ориентация контура такова, что $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ ($\vec{r}_m \uparrow \vec{B}$ или $\vec{r}_m \downarrow \vec{B}$), то $\vec{M} = 0$.

Поэтому эти положения являются равновесными. При $\alpha = 0$ равновесие устойчиво, а при $\alpha = \pi$ – неустойчиво. В произвольном положении контура момент сил \vec{M} стремится ориентировать контур в состояние устойчивого равновесия (рис.2.5). Максимальный момент сил достигается, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

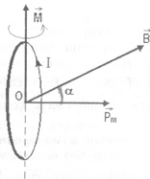


Рис.2.5

$$M_{\max} = r_m B. \quad (2.18)$$

Отметим, что последнее равенство используется для определения индукции магнитного поля как силовой его характеристики. Для этого элементарный контур

помещают в магнитное поле, ориентируя его так, чтобы $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тогда из (2.18) следует, что

$$B = \frac{M_{\max}}{r_m}. \quad (2.19)$$

В этом случае элементарный контур играет роль *пробного тела*, с помощью которого можно обнаружить наличие магнитного поля по возникновению вращательного момента сил. На основе равенства (2.19) вводят единицу измерения величины B – тесла (Тл).

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ А} \cdot \text{м}^2}.$$

1 тесла – индукция такого магнитного поля, в котором на элементарный контур с магнитным моментом $r_m = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ действует максимальный момент сил $M_{\max} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

В заключение этого пункта докажем справедливость (2.16) для плоского контура с током в однородном магнитном поле.

Для этого разложим вектор \vec{B} на две составляющие (рис.2.6), одна из которых \vec{B}_{\parallel} лежит в плоскости контура, другая \vec{B}_{\perp} – перпендикулярна ей ($\vec{B}_{\parallel} \uparrow \vec{n}$ или $\vec{B}_{\parallel} \uparrow \vec{n}$)

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel}. \quad (2.20)$$

Запишем равенство (2.15), используя (2.9) и (2.20), в виде

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \oint_L [\vec{r} d\vec{F}] = I \oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}]] = \\ &= I \oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}_{\perp}]] + I \oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}_{\parallel}]]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поскольку, как указывалось выше в этом пункте, результирующий момент сил \vec{M} не зависит от расположения точки O , относительно которой этот момент определяется, то выберем ее в плоскости контура (рис.2.6). Покажем, что интеграл $\oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}_{\parallel}]]$ в правой части цепочки равенств (2.21) равен нулю. Действительно, представив двойное векторное произведение в виде (“бай” минус “цаб”), получим

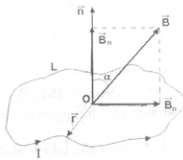


Рис.2.6

$$\oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}_n]] = \oint_L (\vec{r} \vec{B}_n) d\ell - \vec{B}_n \oint_L (\vec{r} d\ell) = 0.$$

Здесь первый интеграл $\oint_L (\vec{r} \vec{B}_n) d\ell = 0$, так как $\vec{r} \perp \vec{B}_n$. Второй

интеграл $\oint_L (\vec{r} d\ell) = \oint_L \frac{1}{2} d(r^2) = 0$, так как интеграл от полного дифференциала функции r^2 на замкнутом пути равен нулю.

Итак, для момента сил \vec{M} имеем

$$\vec{M} = I \oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}]] = I \oint_L [\vec{r} [d\vec{\ell} \vec{B}_n]]. \quad (2.22)$$

Из (2.22) видно, что *резльтирующий момент сил, действующий на плоский контур в однородном магнитном поле, обусловлен только составляющей магнитного поля \vec{B}_n , лежащей в плоскости контура.*

Поэтому достаточно рассмотреть только этот случай. Для этого разобьем контур на узкие полоски шириной dy , параллельные вектору \vec{B}_n (рис.2.7.а). На находящиеся на концах полоски элементы контура $d\vec{\ell}_1$ и $d\vec{\ell}_2$, действуют противоположно направленные силы $d\vec{F}_1$ и $d\vec{F}_2$, модули которых равны между собой. Из рис.2.7.б видно, что $dF_1 = Idl_1 B_n \sin \alpha_1 = IB_n dy$, а $dF_2 = Idl_2 B_n \sin \alpha_2 = IB_n dy$, т.е. $dl_1 = dF_2$. Эти силы представляют собой пару, величина момента которой равна

$$dM = dFx = IB_n x dy = IB_n dS,$$

где x – длина полоски, а dS – ее площадь. Для каждой полоски (рис.2.7.б) векторы $d\vec{M} \perp \vec{B}_n$ и лежат в плоскости контура, поэтому модуль результирующего момента сил равен

$$M = \int dM = IB_n \int dS = IB_n S = IB S \sin \alpha = p_m B \sin \alpha, \quad (2.23)$$

где S – площадь контура, $B_n = B \sin \alpha$ (рис.2.6), и кроме того, использовано уравнение (1.18). Полученное выражение совпадает с (2.17), а из рис.2.7 видно, что направление \vec{M} совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{p}_m \vec{B}]$. Таким образом приходим к формуле (2.16)

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}].$$

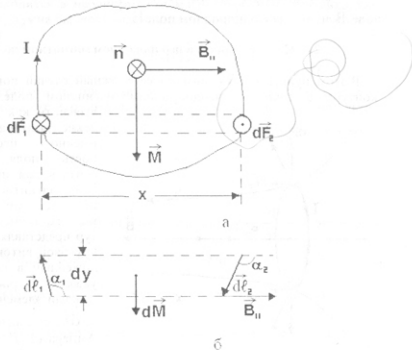


Рис.2.7

Выводы. На контур с током, находящийся в однородном магнитном поле, действуют магнитные силы, результирующая которых равна нулю. Результирующий момент этих сил определяется магнитным моментом контура и составляющей магнитного поля, параллельной плоскости контура.

Однородное магнитное поле оказывает деформирующее и ориентирующее действие на контур.

Контрольные вопросы

2.5. Докажите, что равновесное состояние контура с током в однородном магнитном поле при условии $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ устойчиво, а при условии $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$ – неустойчиво.

2.6. Сравните поведение контура с током в однородном поле \vec{B} и диполя в однородном поле \vec{E} .

2.4. Контур с током в неоднородном магнитном поле

В этом пункте рассмотрим более сложный случай поведения контура с током в неоднородном магнитном поле. Чтобы

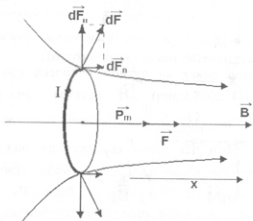


Рис.2.8

выяснить, как на поведение контура влияет именно неоднородность поля, будем считать для простоты, что магнитное поле имеет осевую симметрию. Примем, что контур представляет собой круговой виток, расположенный в поле, как указано на рис.2.8. На каждый элемент контура $d\vec{\ell}$, согласно закону Ампера (2.9), со стороны поля \vec{B} действует сила $d\vec{F}$, перпендикулярная как $d\vec{\ell}$, так и \vec{B} . Однако результирующая сила из-за неоднородности поля \vec{B} не равна нулю. Из рис.2.8 видно, что составляющие $d\vec{F}_{||}$, параллельные плоскости витка, стремятся при $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$ растянуть виток, а при $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$ сжать его (см. также

рис.2.4). Составляющие $d\vec{F}_n$, перпендикулярные плоскости витка, при их сложении дают результирующую силу $\vec{F}_n = \oint_L d\vec{F}_n$, которая стремится переместить виток в магнитном поле. Легко видеть, что в случае, когда $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$, виток будет втягиваться в область более сильного магнитного поля, в противном случае ($\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$) – втягиваться в область более слабого поля.

В общем случае, когда произвольный тонкий контур с током находится в неоднородном магнитном поле, результирующая сила должна вычисляться на основе закона Ампера с помощью формулы

$$\vec{F} = I \oint_L [d\vec{\ell} \times \vec{B}],$$

где интегрирование проводится по контуру L с током I . Если контур мал, что его можно считать элементарным, то результат довольно сложных вычислений для силы \vec{F} можно представить в виде

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}, \quad (2.24)$$

где p_m – модуль магнитного момента контура, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$ – производная

вектора \vec{B} по направлению нормали \vec{n} или по направлению \vec{p}_m . В однородном поле $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = 0$ и формула (2.24), как и должно быть,

даст $\vec{F} = 0$. В неоднородном поле в общем случае вектор \vec{F} не совпадает по направлению ни с вектором \vec{p}_m , ни с вектором \vec{B} .

Направление \vec{F} определяется направлением элементарного приращения вектора \vec{B} , взятого вдоль \vec{n} в том месте, где расположен элементарный контур.

Проекция силы \vec{F} на некоторое направление (например, OX) согласно (2.24) имеет вид

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

В частности, для случая, изображенного на рис.2.8, имеем

$$F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x} > 0,$$

так как в направлении $\vec{n}(\vec{p}_m)$ приращение проекции $\Delta B_x > 0$.

Выводы. В общем случае неоднородное магнитное поле оказывает на контур с током следующие виды воздействий:

- стремится деформировать контур (сжать или растянуть);
- оказывает на контур ориентирующее действие;
- стремится поступательно переместить контур.

Контрольные вопросы

2.7. Определите направление результирующей силы, действующей на элементарный контур с током, находящийся в магнитном поле прямого тока I_0 . На рис.2.9,а,б,в указаны направления магнитного момента контура.

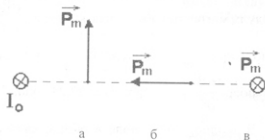


Рис.2.9

2.5. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

В предыдущих пунктах 2.2-2.4 было показано, что магнитное поле оказывает силовое действие на проводник или контур с током, помещенные в это поле. Если при этом проводник или контур имеют возможность перемещаться, то магнитные силы

(силы Ампера) будут совершать механическую работу по их перемещению. Рассмотрим произвольный контур с постоянным током в нем, находящийся в постоянном неоднородном магнитном поле \vec{B} . В результате деформации контура, изменения его ориентации или поступательного движения каждый его малый элемент $d\vec{\ell}_1$ под действием силы Ампера $d\vec{F}_1 = I[d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}]$ (\vec{B} – индукция в том месте, где находится элемент $d\vec{\ell}_1$) за элементарно малый промежуток времени dt получит элементарное перемещение $d\vec{r}_1$ (рис.2.10). При этом сила Ампера совершает при перемещении элемента $d\vec{\ell}_1$ работу, равную

$$\delta A_1 = (d\vec{F}_1 d\vec{r}_1) = I([d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}] d\vec{r}_1).$$

Произведем в смешанном произведении правой части этого равенства циклическую перестановку множителей:

$$\delta A_1 = I([d\vec{r}_1 d\vec{\ell}_1] \vec{B}). \quad (2.25)$$

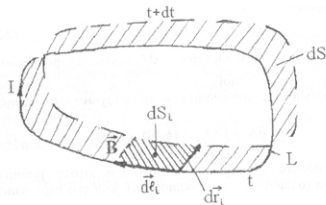


Рис.2.10

Легко видеть, что модуль векторного произведения $[d\vec{r}_1 d\vec{\ell}_1]$ равен площади dS_1 , описываемой элементом $d\vec{\ell}_1$ при его перемещении

$d\vec{r}_i$. Само же векторное произведение перпендикулярно площадке dS_i . Поэтому его можно представить в виде

$$[d\vec{r}_i d\vec{\ell}_i] = dS_i \vec{n}_i = d\vec{S}_i,$$

где \vec{n}_i – единичный вектор нормали к площадке dS_i . Произведя в (2.25) соответствующую замену, получим для элементарной работы над элементом $d\vec{\ell}_i$ равенство

$$\delta A_i = I(\vec{B} d\vec{S}_i). \quad (2.26)$$

Заметим, что скалярное произведение $(\vec{B} d\vec{S}_i)$ есть элементарный магнитный поток $d\Phi_i$ (поток индукции магнитного поля) через площадку dS_i , которую охватил элемент $d\vec{\ell}_i$ при своем перемещении $d\vec{r}_i$, т.е.

$$d\Phi_i = (\vec{B} d\vec{S}_i).$$

Следовательно,

$$\delta A_i = I d\Phi_i. \quad (2.27)$$

Суммируя (2.27) по всем элементам $d\vec{\ell}_i$ контура (проводника), для вычисления элементарной работы δA при произвольном бесконечно малом перемещении контура получим выражение

$$\delta A = \oint_L \delta A_i = I \oint_L d\Phi_i = I d\Phi, \quad (2.28)$$

где $d\Phi$ – полное приращение магнитного потока, пронизывающего контур (охваченного проводником), при его перемещении за время dt .

Проинтегрировав выражение (2.28), в случае произвольного конечного перемещения контура из положения 1 в положение 2 будем иметь

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = I \int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (2.29)$$

Из приведенных рассуждений и полученного результата (2.29) следует, что *работа по перемещению контура (проводника) с постоянным током в постоянном магнитном поле не зависит от формы перемещения контура, а определяется только его начальными и конечными состояниями (Φ_1 и Φ_2) в магнитном поле.*

Эта особенность механической работы позволяет говорить о потенциальной энергии контура с током в постоянном поле \vec{B} , убыль которой и определяет в данном случае величину механической работы (см. п.3.5, часть I, Механика, данного пособия)

$$\delta A = -dW \quad \text{или} \quad A_{12} = W_1 - W_2.$$

Сравнивая эти равенства соответственно с (2.28) и (2.29), для потенциальной энергии контура с током в постоянном магнитном поле можно записать выражение

$$W = -I\Phi + \text{const} \quad (2.30)$$

или

$$W = -I \int_S (\vec{B} d\vec{S}) + \text{const}, \quad (2.31)$$

где интеграл $\int_S (\vec{B} d\vec{S})$ вычисляется по любой поверхности S , ограниченной контуром с током. Величина потенциальной энергии, как и должно быть, определена с точностью до произвольной постоянной (const в (2.30) и (2.31)).

Формула (2.31) в частном случае плоского контура, находящегося в однородном поле \vec{B} , принимает вид

$$\begin{aligned} W &= -I(\vec{B}\vec{S}) + \text{const} = -(p_m \vec{B}) + \text{const} = \\ &= -p_m B \cos \alpha + \text{const}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где учтено определение (1.18). Можно положить $\text{const} = 0$, тогда формула (2.32) принимает вид

$$W = -p_m B \cos \alpha = -(p_m \vec{B}). \quad (2.33)$$

Положение контура с параллельной ориентацией $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$ ($\alpha = 0$) соответствует минимуму его потенциальной энергии, т.е. состоянию устойчивого равновесия (см. текст, следующий за формулой (2.17)).

У внимательного читателя при изучении данного раздела может сложиться впечатление, что в изложении вопросов о силовом действии магнитного поля имеется "противоречие".

Как известно, магнитная составляющая силы Лоренца работы над движущимся зарядом не совершает. Поэтому сила Ампера, которая является макроскопическим проявлением этой магнитной составляющей, тоже не должна совершать работу при перемещении проводника. Может возникнуть вопрос: за счет каких же источников энергии совершается работа по перемещению проводника с током в магнитном поле? Для ответа на этот вопрос рассмотрим простой пример. Пусть проводник АВ с током I (рис.2.11), который создан источником \mathcal{E} , находится в

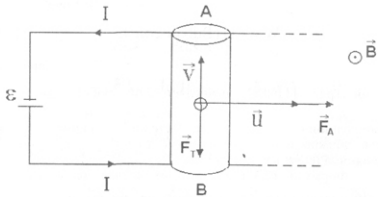


Рис.2.11

магнитном поле \vec{B} . На свободные носители, которые движутся в проводнике направленно со скоростью \vec{v} , со стороны поля \vec{B} действуют силы $\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}]$. Эти силы и являются причиной возникновения силы Ампера \vec{F}_A , под действием которой проводник начинает двигаться вправо (см.рис.2.11) со скоростью \vec{u} . Вместе с проводником вправо движутся и свободные носители. В

результате этого дополнительного движения свободных носителей на каждый из них действует дополнительная магнитная сила $\vec{F}_1 = q[\vec{u}\vec{B}] \uparrow \downarrow \vec{v}$, тормозящая движение носителей вдоль проводника АВ, что приводит к необходимости *совершения работы источником \mathcal{E} по поддержанию постоянства тока I в контуре.*

Здесь не следует забывать, что кроме этой работы источника, совершаемой против магнитных сил, источник должен компенсировать потери энергии за счет выделения джоулева тепла.

Выводы. *При перемещении контура с постоянным током в постоянном магнитном поле за счет энергии источника, поддерживающего ток в контуре постоянным, совершается механическая работа. Величина работы при этом от характера перемещения контура не зависит, а определяется только током контура и вращением магнитного потока, произывающего контур при его перемещении.*

Контрольные вопросы

2.8. Определите, на сколько изменится кинетическая энергия перемычки АВ (рис.2.11) при ее перемещении вдоль полюсьев на $\Delta g = 0,5\text{м}$. Трением пренебречь. Принять $\ell_{AB} = 1\text{м}$; $B = 0,1\text{Тл}$, $I = 1\text{А}$.

2.9. Как изменится потенциальная энергия плоского контура с постоянным током в однородном поле \vec{B} , если его повернуть из состояния устойчивого равновесия в состояние неустойчивого равновесия?

3. Основные теоремы для магнитостатического поля в вакууме

3.1. Магнитный поток. Теорема Гаусса для поля \vec{B} в вакууме

Мы уже использовали понятие *потока вектора индукции \vec{B} магнитного поля (магнитного потока)* при описании работы по перемещению контура с током во внешнем магнитном поле

(см.л.2.5). Более подробное рассмотрение этого понятия необходимо потому, что, как уже указывалось в электростатике, с помощью понятия потока векторного поля устанавливается одно из важнейших его свойств: имеются у этого поля источники или нет?

Поток вектора \vec{B} через некоторую поверхность S определяется по общим правилам:

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_S B dS \cos \alpha, \quad (3.1)$$

где $d\vec{S} = dS \vec{n}$, $\angle \alpha = (\vec{B}, \vec{n})$, \vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS . Напомним, что для элемента dS поверхности S , находящейся в магнитном поле, выбор направления вектора \vec{n} произволен.

Часто приходится встречаться с ситуациями, когда необходимо вычислять поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную замкнутым проводником с током в нем (контуром с током). В этом случае в качестве нормали к поверхности выбирают положительную нормаль, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта. При графическом изображении поля \vec{B} линии индукции строятся по тем же правилам, что и линии любого векторного поля. В этом случае поток вектора \vec{B} численно равен количеству линий поля, пересекающих данную поверхность S в направлении нормали \vec{n} к этой поверхности. Из опытных данных известно, что линии магнитной индукции \vec{B} всегда замкнуты, т.е. не имеют ни начала, ни конца. Это является следствием того факта, что в природе не существуют магнитные заряды. Поэтому для произвольной замкнутой поверхности, расположенной в магнитном поле, поток вектора \vec{B} сквозь нее всегда равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (3.2)$$

Другими словами, количество линий вектора \vec{B} , входящих в объем, ограниченный замкнутой поверхностью S , и количество линий,

выходящих из этого объема, равны между собой. При вычислении потока (3.2) в качестве нормали \vec{n} к поверхности S обычно выбирают внешнюю нормаль.

Равенство (3.2) является математическим выражением теоремы Гаусса в интегральной форме: поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Дифференциальную форму записи теоремы Гаусса можно получить, преобразуя поверхностный интеграл (3.2) в объемный с помощью интегральной теоремы Остроградского – Гаусса

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV,$$

где V – объем, ограниченный замкнутой поверхностью S . Так как форма поверхности S произвольна, то для теоремы Гаусса в дифференциальной форме получим равенство

$$(\nabla \cdot \vec{B}) = 0. \quad (3.3)$$

В любой точке магнитного поля дивергенция вектора \vec{B} равна нулю.

Выводы. Магнитное поле не имеет источников (магнитных зарядов). В этом проявляется одно из основных отличий магнитного поля от электростатического.

Контрольные вопросы

3.1. Определите величину магнитного потока, пронизывающего площадку, ограниченную прямоугольным контуром (рис.3.1), находящимся в поле прямого тока. Ток и контур находятся в одной плоскости.

3.2. Сформулируйте и запишите теорему Гаусса для вектора \vec{B} в интегральной и дифференциальной формах. Какое свойство поля \vec{B} отражает эта теорема?

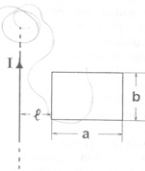


Рис.3.1

3.2. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля

В этом пункте сформулируем и докажем вторую основную теорему для вектора \vec{B} : теорему о циркуляции. Как уже указывалось в электростатике, теорема о циркуляции для любого векторного силового поля устанавливает одно из его основных свойств: потенциально это поле или нет.

Согласно определению, циркуляцией вектора \vec{B} по замкнутому контуру L называется интеграл вида

$$\Gamma_B = \oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell}, \quad (3.4)$$

где $d\vec{\ell}$ – векторный элемент контура L , направление которого определяется выбором направления обхода контура при вычислении интеграла (3.4). $B_\alpha = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на направление $d\vec{\ell}$, $\angle \alpha = (\vec{B}, d\vec{\ell})$.

Процедуру вычисления интеграла (3.4) в общем случае для произвольного контура с произвольным распределением тока в пространстве проведем в несколько этапов, постепенно обобщая результаты.

Рассмотрим вначале плоский контур L произвольной формы (рис.3.2). Пусть бесконечный прямой проводник с током I пересекает площадку, ограниченную контуром L , под прямым углом (рис.3.2). Ток направлен за чертеж. Направление положительного обхода контура выберем так, чтобы оно было связано с направлением тока правилом правого винта. Для любого элемента контура $d\vec{\ell}$ индукция магнитного поля \vec{B} направлена по касательной к окружности радиуса b , где b – расстояние от прямого проводника

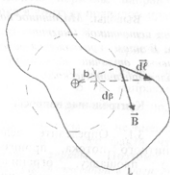


Рис.3.2

до элемента $d\vec{\ell}$. Модуль индукции \vec{B} в соответствии с (1.14) равен $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}$. Скалярное произведение под знаком интеграла (3.4) можно представить в виде

$$(\vec{B} d\vec{\ell}) = B d\ell_B, \quad (3.5)$$

где $d\ell_B = b d\beta$ – проекция векторного элемента $d\vec{\ell}$ на направление \vec{B} (на направление касательной к окружности радиуса b). $d\beta$ – угол поворота радиальной прямой b при перемещении по контуру на $d\vec{\ell}$. Теперь (3.5) с учетом выражения для B представим в виде

$$(\vec{B} d\vec{\ell}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} b d\beta.$$

Подставляя это равенство в (3.4), получим

$$\Gamma_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\beta. \quad (3.6)$$

Так как в рассматриваемом случае при обходе контура радиальная прямая, связанная с элементом контура, поворачивается в одном направлении, то интеграл $\oint_L d\beta = 2\pi$. Поэтому

$$\Gamma_B = \oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 I. \quad (3.7)$$

Если прямой ток пересекает плоскость контура за пределами площадки, ограниченной контуром, то, как легко видеть, циркуляция вектора \vec{B} равна нулю (рис.3.3). Действительно, в этом случае интеграл в (3.6) можно разбить на два интеграла:

$$\oint_L d\beta = \int_{A1B} d\beta + \int_{B2A} d\beta = \beta - \beta = 0.$$

Обобщая сказанное, можно сделать предварительное заключение о том, что циркуляция

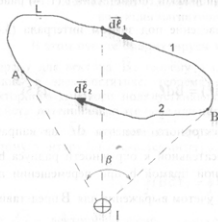


Рис. 3.3

вектора \vec{B} в случае плоского контура и прямого тока равна произведению магнитной постоянной μ_0 и тока I , охватываемого контуром. Если ток I не охватывается контуром, то циркуляция Γ_B равна нулю. Здесь следует отметить, что знак циркуляции зависит от выбора направления обхода контура. Циркуляция положительна, если направление обхода контура связано с

направлением охватываемого тока правилом правого винта (как в рассмотренном случае), и отрицательна при противоположном выборе направления обхода.

Можно показать, что результат (3.7) не зависит ни от формы контура, ни от формы проводника с током. Доказательство этого не представляет особого интереса, поскольку кроме более сложных математических выкладок не содержит новых физических результатов.

Интереснее обобщить результат на случай, когда воображаемый контур L находится в поле, созданном системой проводников с токами. Вычисление циркуляции можно произвести, используя принцип суперпозиции для поля \vec{B} (1.1):

$$\Gamma_B = \oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \oint_L \left(\sum_k \vec{B}_k \right) d\vec{\ell} = \sum_k \oint_L (\vec{B}_k d\vec{\ell}), \quad (3.8)$$

где \vec{B}_k — индукция поля, созданного в месте нахождения элемента контура $d\vec{\ell}$ током I_k .

Согласно (3.7), в правой части (3.8) отличны от нуля только те слагаемые, которые обусловлены токами I_k , охватываемыми контуром L . Таким образом,

$$\Gamma_B = \oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (3.9)$$

Если электрический ток непрерывно распределен в пространстве с плотностью \vec{j} , то (3.9) примет вид

$$\Gamma_B = \oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}), \quad (3.10)$$

где $\int_S (\vec{j} d\vec{S})$ — полный ток (поток вектора \vec{j}), пронизывающий площадку S , ограниченную контуром L .

Равенства (3.9) и (3.10) представляют собой математическую запись теоремы о циркуляции вектора \vec{B} в интегральной форме для дискретного и непрерывного распределения токов.

Сформулируем теперь окончательно эту теорему:

Циркуляция вектора индукции стационарного магнитного поля в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых данным контуром, умноженной на магнитную постоянную μ_0 .

Используя интегральную математическую теорему Стокса

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \int_S (\nabla \vec{B} d\vec{S}),$$

можно получить теорему о циркуляции вектора \vec{B} в дифференциальной форме. Произведя в (3.10) соответствующую замену, имеем

$$\int_S (\nabla \vec{B} d\vec{S}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}).$$

Объединим интегралы в последнем равенстве:

$$\int_S ((\nabla \vec{B}) - \mu_0 \vec{j}) d\vec{S} = 0. \quad (3.11)$$

Так как контур L выбран произвольной формы, то и поверхность, ограниченная им, тоже произвольна. Условие (3.11) может выполняться для любой поверхности, если в каждой ее точке подынтегральная функция равна нулю. Поэтому

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}. \quad (3.12)$$

Равенство (3.12) представляет собой *математическую запись теоремы о циркуляции вектора \vec{B} в дифференциальной форме*.

В заключение отметим, что, поскольку в общем случае циркуляция Γ_B не равна нулю, это означает, что *поле вектора \vec{B} не является потенциальным*.

Векторные поля, для которых циркуляция отлична от нуля, называются *вихревыми*.

Выводы. *Циркуляция вектора магнитной индукции стационарного магнитного поля определяется с точностью до постоянного множителя μ_0 распределением токов в пределах выбранного воображаемого контура.*

Магнитное поле не является потенциальным, оно относится к классу вихревых полей.

Контрольные вопросы

3.3. Сформулируйте и запишите теорему о циркуляции вектора \vec{B} в интегральной и дифференциальной формах. Какую роль в описании поля \vec{B} в вакууме играет эта теорема?

3.4. По длинному прямому проводу круглого сечения радиусом R течет постоянный ток. Индукция магнитного поля внутри провода изменяется по закону $B = \alpha r$, где r – расстояние, которое отсчитывается от оси провода ($0 \leq r \leq R$), $\alpha = \text{const}$. Определите плотность $j(r)$ и силу тока I в проводе, используя теорему о циркуляции вектора \vec{B} (3.7).

3.3. Применение основных теорем к расчету магнитных полей

3.3.1. Магнитное поле соленоида

Соленоидом (катушкой индуктивности) называется провод, навитый на цилиндрический каркас в виде витковой линии.

Примерный вид линий поля \vec{B} соленоида изображен на рис.3.4. На самом деле структура магнитного поля гораздо сложнее: она содержит, кроме указанных на рис.3.4, межвитковое поле, а также

поле, обусловленное продольной (вдоль соленоида) составляющей тока.

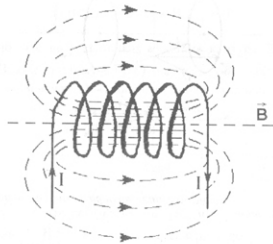


Рис.3.4

Мы рассмотрим поле идеализированного соленоида, который представляет собой *набор одинаковых тонких плотно прилегающих друг к другу кольцевых токов*, насаженных на цилиндрический каркас бесконечной длины. Рассмотрение такой модели соленоида важно потому, что магнитное поле (как будет показано) в этом случае *однородно и полностью сосредоточено в объеме соленоида*. В этом смысле эта модель играет роль, подобную бесконечному плоскому конденсатору, электрическое поле которого также однородно и заключено в пространстве между его пластинами.

Так как соленоид имеет бесконечную длину, то в любой плоскости, перпендикулярной его оси, в силу симметрии структура магнитного поля будет одинаковой. Исследуем эту структуру. Для этого симметрично какой-либо поперечной плоскости S (рис.3.5) выделим два кольцевых тока. Нетрудно видеть, что в любой точке плоскости S индукция магнитного поля, создаваемого каждой парой симметричных витков, а следовательно, и *резльтирующая индукция может быть только параллельна оси соленоида*. Причем внутри соленоида (точка а) и вне его (точка б) направления векторов \vec{B}_a и \vec{B}_b *противоположны*.

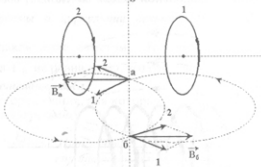


Рис.3.5

Покажем теперь, что поле внутри и вне соленоида может быть только однородным. Для доказательства этого утверждения воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{B} . Вначале выберем контур прямоугольной формы (12341), полностью расположенный внутри соленоида так, как показано на рис.3.6. Выберем направление обхода контура по часовой стрелке. Легко

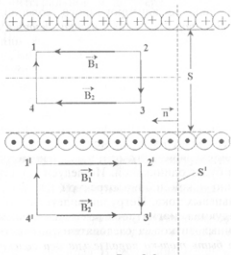


Рис. 3.6

видеть, что циркуляция \vec{B} по контуру 12341 равна нулю, так как

этот контур не охватывает никаких токов:

$$\oint_{12341} (\vec{B} d\vec{\ell}) = -B_1 \ell_{12} + B_2 \ell_{34} = 0, \quad (3.13)$$

где учтено, что во всех точках участков контура $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ вектор $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$, поэтому $(\vec{B} d\vec{\ell})$ на этих участках равно нулю. Поскольку контур 12341 выбран прямоугольной формы, то $\ell_{12} = \ell_{34}$. Теперь на основании (3.13) имеем

$$B_1 = B_2 = \text{const} = B, \quad (3.14)$$

что и означает с учетом параллельности \vec{B} оси однородность поля \vec{B} внутри соленоида. Проводя точно такие же рассуждения для контура $1'2'3'4'1'$, полностью расположенного вне соленоида (рис.3.6), получим равенство

$$B'_1 = B'_2 = \text{const}' = B', \quad (3.15)$$

т.е. за пределами соленоида магнитное поле может быть только однородным.

Используя полученные результаты (3.14) и (3.15) и теорему Гаусса для вектора \vec{B} , вычислим поток Φ_B через бесконечную плоскость, перпендикулярную оси соленоида (направление положительной нормали \vec{n} указано на рис.3.6):

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B} d\vec{S}) + \int_{S'} (\vec{B}' d\vec{S}')$$

Так как поля \vec{B} и \vec{B}' однородны и имеют противоположные направления, то

$$\Phi_B = BS - B' \int_{S'} dS', \quad (3.16)$$

где S — площадь поперечного сечения соленоида, а S' — внешняя часть плоскости. Из-за замкнутости линий индукции потоки через поперечное сечение S соленоида и внешнюю часть плоскости S' должны быть равны между собой, т.е.

$$BS = B' \int_{S'} dS'. \quad (3.17)$$

Так как левая часть равенства (3.17) конечна, а в правой части присутствует неограниченный множитель $\int_{S'} dS' \rightarrow \infty$, то равенство (3.17) может выполняться только при условии

$$B' = 0. \quad (3.18)$$

(В правой части (3.17) неопределенность типа $0 \cdot \infty$ равна конечной величине).

Результат (3.18) означает, что за пределами идеализированного соленоида магнитное поле отсутствует.

Остается выяснить последний вопрос: чему равна величина

индукции \vec{B} внутри соленоида? Для ответа на этот вопрос вычислим циркуляцию \vec{B} по прямоугольному контуру, указанному на рис.3.7:

$$\Gamma_B = \oint (\vec{B} d\vec{l}) = B\ell.$$

По теореме о циркуляции вектора \vec{B} (3.9), искомая циркуляция равна

$$\Gamma_B = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 NI = \mu_0 n\ell I,$$

где N – полное число витков, охватываемых выбранным контуром; I – ток в одном витке; $n = \frac{N}{\ell}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Сравнивая два последних равенства для Γ_B , получим окончательное выражение для индукции магнитного поля идеализированного бесконечного соленоида:

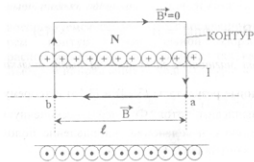


Рис. 3.7

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I. \quad (3.19)$$

Опуская выводы, приведем еще две формулы, которые могут быть использованы для расчета поля B в практически интересных случаях.

Для идеализированного соленоида конечной длины (рис.3.8.а) индукция в произвольной точке A , лежащей на оси соленоида, определяется формулой

$$B = \mu_0 \frac{nI}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (3.20)$$

где α_1 и α_2 – углы, под которыми из точки A видны концы соленоида ($\alpha_2 > \alpha_1$).

Для полубесконечного соленоида в точке, лежащей на оси его торца ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$), равенство (3.20) примет вид (рис.3.8.б)

$$B = \mu_0 \frac{nI}{2}. \quad (3.21)$$

Отметим, что (3.19) является частным случаем (3.20) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$, а (3.21) следует из (3.20) при $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = \pi$.

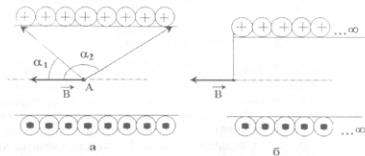


Рис. 3.8

В заключение этого пункта следует указать, что использовать формулы (3.19) – (3.21) для расчета поля на оси реального соленоида можно только при выполнении *следующих требований:*

- соленоид должен быть достаточно длинным, т.е. его длина ℓ должна значительно превышать его собственный диаметр D , $\ell \gg D$;*
- витки обмотки должны плотно прилегать друг к другу;*
- толщина обмотки соленоида должна быть значительно меньше диаметра соленоида.*

Точность расчета тем выше, чем лучше выполняются указанные требования.

Выводы. *Магнитное поле реального соленоида имеет сложную структуру и существует как внутри, так и вне его. Поле идеального бесконечного соленоида однородно и полностью сосредоточено внутри его объема. Направление индукции поля \vec{B} внутри соленоида связано с направлением тока в обмотке правилом правого винта.*

Контрольные вопросы

3.5. Изобразите схематично более детально структуру линий поля соленоида, изображенного на рис.3.4.

3.6. Запишите формулу для величины магнитного потока, пронизывающего поперечное сечение идеального соленоида.

3.7. Запишите формулу для величины полного магнитного потока Ψ , сцепленного с длинным соленоидом, содержащим N витков.

3.3.2. Магнитное поле тороида

Во многих практических случаях широко используются магнитные системы с замкнутым сердечником, на который намотана обмотка. Примером такой простейшей системы является *тороид - кольцевая катушка с обмоткой, намотанной на сердечник в виде тора* (рис.3.9). Если витки катушки плотно прилегают друг к другу, то, пренебрегая полем кольцевого тока I' , можно сказать, что *магнитное поле тороида целиком локализовано внутри его объема*. Докажем это утверждение. Для этого вначале выберем круговой контур l с центром в точке O и радиусом $r < r_0$. Циркуляция

вектора \vec{B} по этому контуру равна нулю, так как он не охватывает никаких токов. Поэтому во всех точках при $r < r_0$ $B=0$. Для контура 2 (рис.3.9) при $r > R$ циркуляция B также равна нулю, поскольку в этом случае алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром 2, равна нулю. Таким образом, за пределами объема тора магнитное поле отсутствует.

Найдем теперь индукцию магнитного поля внутри тороида. Вычислим циркуляцию \vec{B} по круговому контуру, радиус которого заключен в пределах $r_0 \leq r \leq R$, с центром в точке O (рис.3.9). Из соображений симметрии следует, что вектор \vec{B} может быть направлен только по касательной к выбранному круговому контуру и в каждой его точке имеет одно и то же значение модуля. Поэтому

$$\oint_l (\vec{B} d\vec{l}) = B 2\pi r = \mu_0 N I,$$

где N – число витков катушки тороида. Итак, для индукции B имеем формулу

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}, \text{ при } r_0 \leq r \leq R. \quad (3.22)$$

Легко видеть, что значение индукции внутри объема тороида заключено в пределах

$$B_{\min} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \leq B \leq \mu_0 \frac{NI}{2\pi r_0} = B_{\max}, \quad (3.23)$$

а ее значение на осевой линии определяется равенством

$$B_{\text{ос}} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r_{\text{ос}}} = \mu_0 n I, \quad (3.24)$$

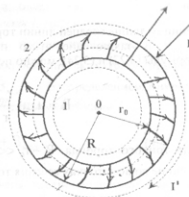


Рис. 3.9

где $r_{cp} = \frac{R + r_0}{2}$, n – число витков катушки, приходящихся на единицу длины средней линии тороида.

В заключение этого пункта отметим, что, объединяя формулы (3.22) и (3.24), можно получить еще одно равенство для B :

$$B = \mu_0 n I \frac{r_{cp}}{r} = B_{cp} \frac{r_{cp}}{r}. \quad (3.25)$$

Для тонкого тороида $R - r_0 \ll r_{cp}$, отношение r_{cp}/r близко к единице во всех точках сечения тороида, поэтому

$$\vec{B} \approx B_{cp} = \mu_0 n I, \quad (3.26)$$

т.е. в каждом сечении тороида поле практически *однородно* и определяется такой же формулой, как и в случае бесконечного соленоида. Следует помнить, что в различных сечениях направление \vec{B} различно, следовательно во всем объеме тороида поле *неоднородно*. Реальный тороид, кроме рассмотренного поля, имеет составляющую, подобную полю кругового тока I' (см. рис.3.9).

Выводы. *Магнитное поле тороида (в пренебрежении кольцевым током) полностью сосредоточено в его собственном объеме. Для тонкого тороида индукция может вычисляться по такой же формуле что и для бесконечного соленоида.*

4. Магнитное поле в веществе

4.1. Описание магнитного поля в веществе

До сих пор мы рассматривали свойства и способы описания магнитного поля в вакууме, считая, что поле создается токами, текущими по проводам. Такие токи в дальнейшем будем называть *макроскопическими* (или *макротоками*). Фактически макротоки – это токи проводимости.

При наличии вещества в пространстве, содержащем макротоки, ситуация существенным образом изменяется. Дело в том, что атомы и молекулы вещества состоят из заряженных

частиц, которым присущи специфические формы движения и эквивалентные этим движениям *микротоки*. Поэтому при наличии вещества *истинное (микроскопическое)* магнитное поле обусловлено двумя его составляющими, первая из которых ($\vec{B}_{пров}$) определяется распределением макроскопических токов проводимости (макротоков), а вторая ($\vec{B}_{мол}$) – распределением микротоков, которые часто называют *молекулярными* токами

$$\vec{B}_{микро} = \vec{B}_{пров} + \vec{B}_{мол}. \quad (4.1)$$

Истинное поле $\vec{B}_{микро}$ является очень быстропеременной функцией координат и времени, т.е. $\vec{B}_{микро} = \vec{B}(\vec{r}, t)$, из-за аналогичных свойств $\vec{B}_{мол}$. В реальных случаях мы имеем дело с усредненным по времени и физически малому объему магнитным полем:

$$\langle \vec{B}_{микро} \rangle = \langle \vec{B}_{пров} \rangle + \langle \vec{B}_{мол} \rangle. \quad (4.2)$$

Вводя обозначения $\vec{B} = \langle \vec{B}_{микро} \rangle$, $\vec{B}_0 = \langle \vec{B}_{пров} \rangle$ и $\vec{B}' = \langle \vec{B}_{мол} \rangle$, для усредненных полей получим равенство

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (4.3)$$

Поле \vec{B} называется *макроскопическим*, его составляющая \vec{B}_0 обусловлена макроскопическими токами и называется *внешним полем*, а составляющая \vec{B}' обусловлена усредненным распределением микротоков.

Поскольку ни поле \vec{B}_0 , ни поле \vec{B}' источников не имеют, для макроскопического поля \vec{B} остается справедливой теорема Гаусса в интегральной (3.2) и дифференциальной (3.3) формах:

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0; \quad (4.4)$$

$$(\nabla \cdot \vec{B}) = 0. \quad (4.5)$$

Сложности возникают при использовании теоремы о циркуляции вектора \vec{B} макроскопического поля. Из (4.3) имеем

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \oint_L (\vec{B}_0 d\vec{\ell}) + \oint_L (\vec{B}' d\vec{\ell}). \quad (4.6)$$

Первый из интегралов правой части этого равенства, согласно (3.10), равен

$$\oint_L (\vec{B}_0 d\vec{\ell}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}), \quad (4.7)$$

где \vec{j} — усредненная плотность макроскопических токов, второй интеграл равен

$$\oint_L (\vec{B}' d\vec{\ell}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}_{\text{микро}} d\vec{S}), \quad (4.8)$$

где $\vec{j}_{\text{микро}}$ — усредненная плотность микротоков.

Подставляя (4.7) и (4.8) в (4.6), получим

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 \int_S ((\vec{j} + \vec{j}_{\text{микро}}) d\vec{S}), \quad (4.9)$$

или в дифференциальной форме

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{микро}}). \quad (4.10)$$

Отметим здесь, что в отсутствие внешнего поля $\vec{B}_0 = 0$ ($\vec{j} = 0$) часто встречается абсолютно хаотическое распределение микротоков, когда $\vec{j}_{\text{микро}} = 0$, в этом случае $\vec{B}' = 0$, а значит, и макроскопическое поле $\vec{B} = 0$.

Если же внешнее поле $\vec{B}_0 \neq 0$, то первоначальное распределение микротоков изменяется: оно существенным образом зависит от величины и структуры поля \vec{B} , т.е. $\vec{j}_{\text{микро}} = f(\vec{B})$. Мы

снова имеем ситуацию, подобную той, с которой уже встречались при описании электростатического поля в веществе с помощью теоремы Гаусса.

Для вычисления циркуляции вектора \vec{B} макроскопического магнитного поля необходимо, кроме распределения макро-токов, знать усредненное распределение микротоков, которое само существенным образом зависит от \vec{B} .

Решать эту проблему будем способом, аналогичным тому, который использовался в электростатике: попытаемся найти такую вспомогательную макроскопическую векторную характеристику магнитного поля в веществе, циркуляция которой однозначно определяется распределением только макроскопических токов.

Выводы. *Макроскопическое магнитное поле \vec{B} в веществе является усредненным по физически малому объему и времени микромагнитным полем и обусловлено распределением макроскопических токов проводимости и усредненным распределением микротоков, которое само зависит от макроскопического поля \vec{B} .*

Контрольные вопросы

4.1. Каковы составляющие истинного микромагнитного поля в веществе и чем они обусловлены?

4.2. Что такое макроскопическое поле \vec{B} ? В чем заключается смысл этого поля? Каковы составляющие этого поля и чем они обусловлены?

4.3. Опишите сущность проблемы описания макроскопического поля \vec{B} в веществе.

4.2. Намагничивание вещества

Как уже указывалось в предыдущем пункте наличие поля \vec{B}_0 макроскопических токов проводимости существенно изменяет магнитное поле в веществе \vec{B} за счет изменения распределения микротоков. *Процесс, связанный с появлением дополнительного магнитного поля, обусловленного перераспределением микротоков, называется намагничиванием вещества.* Другими словами, при

намагничивании вещества приобретает избыточный магнитный момент.

Опыт показывает, что все вещества при определенных условиях способны намагничиваться. В этом смысле они объединяются общим названием – *магнетика*.

Вполне разумно количественно характеризовать намагниченность магнитным моментом единицы объема вещества:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}, \quad (4.11)$$

где ΔV – физически малый объем магнетика, окружающий точку A , в которой определяется намагниченность \vec{J} ; \vec{p}_m – магнитный момент частицы вещества (атома или молекулы).

В определении (4.11) *векторное суммирование* производится по всем частицам, находящимся в объеме ΔV . Легко видеть, что в системе СИ единицами измерения намагниченности J является *ампер на метр (А/м)*.

Напомним, что аналогично (4.11) определяется поляризованность диэлектрика.

Установим теперь связь намагниченности магнетика с распределением микротоков в нем. Для этого воспользуемся простейшей классической моделью, предложенной Ампером, которая объясняет существование магнитных моментов у атомов и молекул. Ампер предположил, что в атомах и молекулах любого вещества существуют элементарные круговые токи (*молекулярные токи*). Дальнейшее развитие физических представлений о структуре атомов подтвердило эту гипотезу (вспомните боровскую модель атома). Каждый круговой молекулярный ток обладает магнитным моментом. Когда внешнее магнитное поле отсутствует, магнитные моменты молекулярных токов в большинстве случаев ориентированы хаотически, поэтому $\sum \vec{p}_m = 0$, а значит, и

намагниченность \vec{J} также равна нулю. Внешнее поле \vec{B}_0 оказывает на магнитные моменты \vec{p}_m ориентирующее действие (см. п.2.3 данного пособия), в результате этого намагниченность становится отличной от нуля.

Выделим внутри магнетика некоторую поверхность S , ограниченную контуром L (рис.4.1), и подсчитаем алгебраическую

сумму молекулярных токов $I_{\text{мол}}$, охватываемых контуром L , т.е. поток вектора плотности микротоков, пронизывающего выделенную поверхность S

$$I_{\text{мол}} = \int_S (\vec{j}_{\text{микро}} d\vec{S}). \quad (4.12)$$

Ненулевой вклад в эту сумму будут вносить только те молекулярные токи, площади $S_{\text{мол}}$ которых пересекаются контуром L (на рис.4.1 это токи 1 и 3), другими словами, это токи, которые наизаны на контур L .

Токи $I_{\text{мол}}$, которые дважды пересекают поверхность S (ток 2 на рис.4.1) в противоположных направлениях вклада в искоемую сумму не вносят.

Чтобы не усложнять вычислений, будем считать, что все молекулярные токи совершенно одинаковы и имеют одну и ту же преимущественную ориентацию в магнетике.

Рассмотрим элемент $d\vec{\ell}$ контура L (на рис. 4.2 изображен в увеличенном виде). Легко видеть, что выделенный элемент $d\vec{\ell}$ пересекает площади $S_{\text{мол}}$ тех токов, центры которых находятся внутри косоугольного цилиндра, для которого элемент $d\vec{\ell}$ является осью, а основание, равное $S_{\text{мол}}$, ориентировано так же, как и плоскость молекулярного тока. Число молекулярных токов, пересекаемых

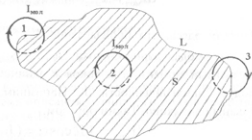


Рис. 4.1

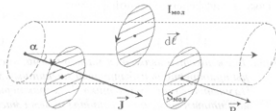


Рис. 4.2

элементом контура $d\ell$, равно

$$dN = n\Delta V,$$

где n – концентрация молекулярных токов; $\Delta V = S_{\text{мол}} d\ell \cos \alpha$ – объем косого цилиндра.

Суммарный молекулярный ток, который охватывается элементом $d\ell$ определяется выражением:

$$dI_{\text{мол}} = I_{\text{мол}} dN = I_{\text{мол}} n S_{\text{мол}} d\ell \cos \alpha.$$

Заметим здесь, что произведение $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} = p_m$ дает магнитный момент молекулярного тока, а $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n = p_m n$ – суммарный магнитный момент этих токов в единице объема магнетика, т.е. модуль намагниченности \vec{J} . Напомним, что все \vec{p}_m ориентированы одинаково. Таким образом,

$$dI_{\text{мол}} = J d\ell \cos \alpha = (\vec{J} d\vec{\ell}).$$

Интегрируя последнее равенство по всему замкнутому контуру L , получим

$$I_{\text{мол}} = \oint_L dI_{\text{мол}} = \oint_L (\vec{J} d\vec{\ell}). \quad (4.13)$$

Сравнивая (4.13) с (4.12), имеем искомую связь между намагниченностью \vec{J} и распределением микротоков в магнетике $\vec{j}_{\text{микро}}$ в интегральной форме:

$$\oint_S (\vec{j}_{\text{микро}} d\vec{S}) = \oint_L (\vec{J} d\vec{\ell}). \quad (4.14)$$

Применяя интегральную теорему Стокса к правой части (4.14), запишем эту связь в дифференциальной форме:

$$[\nabla \vec{J}] = \vec{j}_{\text{микро}}. \quad (4.15)$$

Выводы. Все вещества являются магнетиками, т.е. способны приобретать избыточный магнитный момент. Намагничивание магнетика характеризуется магнитным моментом единицы объема магнетика в окрестности данной его точки. Намагниченность магнетика определяется исключительно распределением микротоков в веществе.

Контрольные вопросы

4.4. Какой процесс называется намагничиванием? Какой физической величиной характеризуется этот процесс и в чем заключается сущность этой величины?

4.5. Охарактеризуйте суть гипотезы Ампера, объясняющей явление намагничивания вещества.

4.6. Запишите связь намагниченности вещества с распределением микротоков в интегральной и дифференциальной форме и поясните физическое содержание этой связи.

4.3. Напряженность магнитного поля

Теперь, когда найдена связь между распределением микротоков в веществе и его намагниченностью, мы вплотную приблизились к нахождению вспомогательной величины, с помощью которой решается проблема описания магнитного поля в веществе. Действительно, подставляя (4.14) в (4.9), а (4.15) в (4.10), получим для циркуляции и ротора вектора \vec{B} равенства

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}) + \mu_0 \oint_L (\vec{J} d\vec{\ell});$$

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 [\nabla \vec{J}],$$

которые легко преобразуются к виду

$$\oint_L \left(\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{\ell} \right) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}); \quad (4.16)$$

$$\left[\nabla \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \right] = \vec{j}. \quad (4.17)$$

Из (4.16) и (4.17) видно, что величина

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (4.18)$$

зависит только от распределения макроскопических токов \vec{j} в веществе и, следовательно, является *искомой вспомогательной величиной*, с помощью которой можно описывать магнитное поле в веществе. Величина \vec{H} называется *напряженностью магнитного*

поля. В этом смысле \vec{H} играет такую же роль в описании магнитного поля в веществе, как и вектор электрического смещения \vec{D} в описании электрического поля. В системе СИ напряженность \vec{H} измеряется в тех же единицах, что и \vec{J} , т.е. в *амперах на метр* (А/м).

Используя теперь (4.18), равенства (4.16) и (4.17) представим в виде

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}); \quad (4.19)$$

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j}, \quad (4.20)$$

которые выражают *теорему о циркуляции вектора \vec{H}* в интегральной и дифференциальной формах соответственно.

Заметим, что $\int_S (\vec{j} d\vec{S})$ в правой части (4.19) представляет собой алгебраическую сумму макроскопических токов, охватываемых контуром L . Это позволяет в случае, когда макроскопические токи текут по проводам, записать (4.19) в другой форме:

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{\ell}) = \sum_i I_i. \quad (4.21)$$

Итак, сформулируем теперь теорему о циркуляции вектора \vec{H} .

Циркуляция напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром.

Последнее утверждение свидетельствует о том, что поле вектора \vec{H} , как и поле \vec{B} , не является потенциальным.

Математические выражения теоремы о циркуляции вектора напряженности *стационарного* магнитного поля (4.19) и (4.21) имеют еще одно специальное название: *закон полного тока*.

Заметим, что в вакууме намагниченность $\vec{J} = 0$, поэтому связь (4.18) упрощается:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (4.22)$$

Здесь уместно подчеркнуть, что (4.22) свидетельствует о том, что \vec{H} описывает магнитное поле в вакууме в такой же мере, как и вектор

\vec{B} . Различие между ними обусловлено наличием только постоянного множителя μ_0 , появление которого связано с выбором системы единиц СИ (1.3). Другими словами, в вакууме никакого *физического* различия между \vec{B} и \vec{H} нет. Соответствующим выбором системы единиц измерения можно добиться равенства $\vec{B} = \vec{H}$ (для вакуума). В случае *изотропных магнетиков*, когда направления векторов \vec{B} , \vec{J} и \vec{H} совпадают, всегда можно записать связь между \vec{J} и \vec{H} в форме

$$\vec{J} = \chi(H)\vec{H}, \quad (4.23)$$

где $\chi = \chi(H)$ — безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от *величины* напряженности поля \vec{H} , который называется *магнитной восприимчивостью* магнетика. Магнитная восприимчивость χ — скаляр, ее величина определяется природой изотропного магнетика, а также его состоянием (температурой и т.д.).

Опыт показывает, что для многих веществ (так называемых *слабых магнетиков*) в слабых полях магнитная восприимчивость не зависит от напряженности \vec{H} и является характерной для данного магнетика константой, т.е. $\chi = \text{const}$. Как будет показано ниже, магнитная восприимчивость для различных слабых магнетиков является очень малой величиной, т.е. $|\chi| \ll 1$, однако в отличие от диэлектрической восприимчивости, которая всегда положительна, может быть как *положительно-й*, так и *отрицательно-й*.

Используя связь (4.23), определению (4.18) можно придать вид

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}. \quad (4.24)$$

Введем новую безразмерную величину

$$\mu = 1 + \chi, \quad (4.25)$$

которая называется *относительной магнитной проницаемостью магнетика*. Магнитная проницаемость существенно положительная величина, но может быть как больше, так и меньше единицы. В частности, в вакууме, так как $\chi = 0$, относительная магнитная

проницаемость $\mu = 1$. В слабых полях $\mu = \text{const}$, в сильных полях μ может быть функцией величины напряженности поля \vec{H} .

С учетом (4.25) формуле (4.24) можно придать вид

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (4.26)$$

Это выражение можно трактовать, как еще одно *материальное уравнение*, связывающее между собой в простейшей форме параметры *магнитного поля* (\vec{B} и \vec{H}) со свойствами *вещества* (μ), в котором это поле существует.

В анизотропных магнетиках (это ряд магнитных кристаллов) направления \vec{J} и \vec{H} , вообще говоря, не совпадают. Поэтому связь между \vec{J} и \vec{H} в простой форме (4.23) записать уже нельзя. В этом случае магнитные свойства вещества характеризуются *тензором магнитной восприимчивости* (см. соответствующие замечания о диэлектрической восприимчивости в части III данного учебного пособия).

Выводы. *Найден вид вспомогательной величины, описывающей магнитное поле в веществе (напряженность \vec{H}), циркуляция которой определяется только распределением макроскопических токов. Для изотропных магнетиков установлена связь между \vec{B} , \vec{H} и магнитными свойствами вещества.*

Контрольные вопросы

- 4.7. Запишите связь между \vec{H} , \vec{B} и \vec{J} .
- 4.8. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора \vec{H} и запишите ее формулы в интегральной и дифференциальной формах.
- 4.9. Для каких веществ и при каких условиях справедливы линейные зависимости $\vec{J}(\vec{H})$ и $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$?
- 4.10. Определите такие характеристики магнетика, как его магнитная восприимчивость и относительная магнитная проницаемость. Что они означают?

4.4. Поведение магнитного поля на границе

раздела двух магнетиков

На границе раздела двух магнетиков с различными магнитными проницаемостями линии индукции \vec{B} и напряженности \vec{H} изменяют свое направление, т.е. преломляются. Чтобы установить условия поведения линий магнитного поля при переходе через границу раздела, воспользуемся основными уравнениями (4.4) и (4.19), описывающими магнитное поле в веществе.

Для этого рассмотрим вначале воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными границе раздела, и основаниями с площадью ΔS каждое, расположенными симметрично границе на расстояниях Δh от нее (рис.4.3). Размеры



Рис. 4.3

поверхности ΔS и Δh подбираются такими малыми, чтобы в ее пределах поля \vec{B}_1 и \vec{B}_2 можно было считать однородными. Магнетики с проницаемостями μ_1 и μ_2 предполагаются изотропными и слабомагнитными. Запишем развернутое выражение для потока \vec{B} (4.4) через выбранную поверхность

$$\Phi_B = \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_{\Delta S_1} (\vec{B}_1 d\vec{S}) + \int_{\Delta S_2} (\vec{B}_2 d\vec{S}) + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (4.27)$$

Если в качестве положительной выбрать внешнюю нормаль и учесть высказанные выше условия, то получим равенства

$$\int_{\Delta S_1} (\vec{B}_1 d\vec{S}) = -B_{1n} \Delta S; \quad \int_{\Delta S_2} (\vec{B}_2 d\vec{S}) = B_{2n} \Delta S.$$

Поскольку нас интересует поведение индукции \vec{B} именно при переходе через границу раздела, то, устремив Δh к нулю, получим

$$\int_{S_{\text{ок}}} (\vec{B} d\vec{S}) \rightarrow 0 \text{ при } S_{\text{ок}} \rightarrow 0.$$

Полученные результаты позволяют записать выражение для потока Φ_B (4.27) в виде

$$\Phi_B = -B_{1n} \Delta S + B_{2n} \Delta S = 0,$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.28)$$

Используя уравнение (4.26) для соответствующих проекций вектора \vec{H} , получим равенство

$$\mu_1 \mu_0 H_{1n} = \mu_2 \mu_0 H_{2n},$$

или

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (4.29)$$

Из (4.28) и (4.29) следует, что *величина нормальной составляющей вектора \vec{B} при переходе через границу раздела двух магнетиков непрерывна, а нормальная составляющая поля \vec{H} терпит разрыв.*

Поведение тангенциальных составляющих поля \vec{H} и \vec{B} выясним, применяя теорему о циркуляции вектора \vec{H} (4.19). Для этого вблизи границы раздела выберем воображаемый малый контур прямоугольной формы 12341, как показано на рис. 4.4.

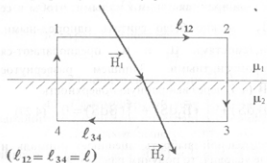


Рис. 4.4

Стороны контура ℓ_{12} и ℓ_{34} параллельны границе и расположены симметрично относительно нее. Представим циркуляцию вектора \vec{H} по контуру 12341 в виде четырех слагаемых:

$$\Gamma_{11} = \oint_L (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_1^2 (\vec{H}_1 d\vec{\ell}) + \int_2^3 (\vec{H} d\vec{\ell}) + \int_3^4 (\vec{H}_2 d\vec{\ell}) + \int_4^1 (H d\vec{\ell}).$$

Направление положительного обхода контура выберем по часовой стрелке и учтем, что $H_{1\tau} = H_{10}$, $H_{2\tau} = H_{20}$. В этом случае первое и третье слагаемые в выражении для Γ_{11} равны соответственно:

$$\int_1^2 (\vec{H}_1 d\vec{\ell}) = H_{1\tau} \ell, \quad \int_3^4 (\vec{H}_2 d\vec{\ell}) = -H_{2\tau} \ell. \quad (4.30)$$

При равномерном стягивании сторон ℓ_{12} и ℓ_{34} контура к границе раздела значения интегралов $\int_1^2 (\vec{H} d\vec{\ell})$ и $\int_3^4 (\vec{H} d\vec{\ell})$ стремятся к нулю из-за стремления к нулю интервалов интегрирования ($\ell_{23} \rightarrow 0$ и $\ell_{41} \rightarrow 0$). Поэтому циркуляция Γ_{11} станет равной

$$\Gamma_{11} = H_{1\tau} \ell - H_{2\tau} \ell. \quad (4.31)$$

С другой стороны, при стягивании контура к границе раздела он будет охватывать только те макроскопические токи, которые текут по поверхности раздела магнетиков. Подсчитать алгебраическую сумму этих токов можно, введя понятие *поверхностной плотности тока* на границе раздела как *силы тока, приходящейся на единицу*

длины границы раздела: $j_{\text{нов}} = \frac{dI}{d\ell}$.

Применяя теперь теорему о циркуляции для вектора \vec{H} , выражение (4.31) можно записать в виде

$$H_{1\tau} \ell - H_{2\tau} \ell = j_{\text{нов}} \ell$$

или

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{\text{нов}}. \quad (4.32)$$

В общем случае *скачок величины тангенциальной составляющей вектора \vec{H} на границе раздела двух магнетиков определяется поверхностной плотностью макроскопических токов.*

Однако в большинстве случаев поверхностные токи на границе отсутствуют, т.е. $j_{\text{нов}} = 0$. Поэтому условие (4.32) упрощается:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (4.33)$$

В этой ситуации величина тангенциальной составляющей вектора \vec{H} непрерывна.

Из (4.33) с учетом (4.26) получим

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0}$$

или

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.34)$$

Величины тангенциальных составляющих вектора \vec{B} терпят разрыв.

Равенства (4.28) и (4.32) (или (4.33)) выполняются для любых магнетиков и выражают собой граничные условия для магнитного поля.

Отметим здесь, что условия (4.28), (4.29), (4.32) – (4.34) аналогичны условиям для электрического поля на границе двух диэлектриков. Вектор \vec{B} ведет себя на границе аналогично вектору \vec{D} , а вектор \vec{H} – аналогично вектору \vec{E} .

Из формул (4.28) и (4.34) при соответствующих оговорках вытекает закон преломления линий индукции (рис.4.5):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau} / B_{1n}}{B_{2\tau} / B_{2n}} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.35)$$

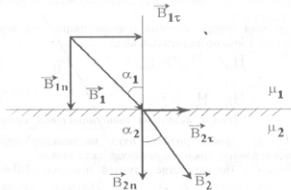


Рис. 4.5

Из (4.35) следует, что линии индукции, попадая в среду с большей магнитной проницаемостью, отклоняются от нормали, т.е. сгущаются.

В изотропных магнетиках подобным образом ведут себя и линии напряженности поля \vec{H} .

Интересно отметить, на наш взгляд, что равенства (4.28) и (4.34) позволяют достаточно просто пояснить смысл относительной магнитной проницаемости магнетика.

Пусть однородный изотропный магнетик находится в вакууме ($\mu = 1$). Форму образца магнетика выберем такой, чтобы линии индукции поля в вакууме ($\vec{B}_0 = \vec{B}_0$) нигде не пересекали его поверхность. В этом случае ($\vec{B}_1 = \vec{B}_{1\tau} = \vec{B}_0$, $\vec{B}_{1n} = 0$), согласно условиям (4.28) и (4.34), имеем для определения индукции поля $\vec{B} = \vec{B}_2$ в магнетике равенства

$$B_n = B_{2n} = B_{1n} = 0;$$

$$B = B_{\tau} = B_{2\tau} = \mu B_{1\tau} = \mu B_0,$$

где μ – относительная магнитная проницаемость магнетика.

Таким образом, если однородный изотропный магнетик занимает объем, ограниченный линиями индукции внешнего магнитного поля, то его относительная магнитная проницаемость показывает во сколько раз усиливается или ослабляется индукция магнитного поля в магнетике по сравнению с вакуумом:

$$B = \mu B_0. \quad (4.36)$$

Полученный результат может быть непосредственно применен к вычислению напряженности поля внутри бесконечного соленоида или тороида, если их объемы полностью заполнены однородным изотропным магнетиком.

Для соленоида, используя (3.19): $B_0 = \mu_0 n I$, имеем из (4.36)

$$B = \mu \mu_0 n I. \quad (4.37)$$

Сравнивая (4.37) с (4.26), получим

$$H = n I. \quad (4.38)$$

Аналогичное выражение справедливо для напряженности поля внутри сердечника тонкого тороида (см.(3.26)).

Важным примером практического применения результатов описания магнитного поля в веществе и граничных условий является расчет магнитного поля электромагнита. Электро-

магниты широко используются в различных отраслях промышленности, в средствах автоматики, в записывающей и воспроизводящей электронной аппаратуре и т.д., т.е. везде, где требуются сильные магнитные поля.

Простейший электромагнит представляет собой тороидальный сердечник с узким зазором, выполненный из ферромагнитного материала с очень большой магнитной проницаемостью, которая может достигать значений сотен тысяч. На сердечник наматывается одна или несколько обмоток провода с питающим током (рис.4.6).

Применим теорему о циркуляции вектора \vec{H} к контуру, совпадающему со средней линией сердечника:

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_{\ell_c} (\vec{H}_c d\vec{l}) + \int_{\ell_3} (\vec{H}_3 d\vec{l}) = IN,$$

где I — ток в обмотке, содержащей N витков провода. Используя сведения о структуре магнитного поля тороида (см.п.3.3.2 данного пособия) и равенство (4.26), для циркуляции \vec{H} получим выражение

$$\Gamma_H = \frac{B_c}{\mu_c \mu_0} \ell_c + \frac{B_3}{\mu_3 \mu_0} \ell_3 = IN.$$

Так как обычно зазор узкий ($\ell_3 \ll \ell_c$), то линии индукции пересекают границу между сердечником и зазором перпендикулярно поверхности раздела. Поэтому, согласно (4.28), $B_c = B_3 = B$, и для индукции имеем равенство

$$B = \mu_0 \frac{IN}{\frac{\ell_c}{\mu_c} + \frac{\ell_3}{\mu_3}}.$$

Часто подбирают параметры сердечника и зазора ($\mu_3 = 1$) таким

образом, чтобы выполнялось условие $\frac{\ell_c}{\mu_c} \ll \frac{\ell_3}{\mu_3}$ (для сильных

ферромагнетиков это легко сделать). В этом случае

$$B \approx \mu_0 \frac{IN}{\ell_3}.$$

В отсутствие ферромагнитного сердечника та же обмотка тороида создавала бы индукцию (3.36)

$$B' = \mu_0 \frac{IN}{\ell_c + \ell_3} \approx \mu_0 \frac{IN}{\ell_c}.$$

Из сравнения двух последних равенств для B и B' видно, что наличие ферромагнитного сердечника с зазором увеличивает в том месте, где находится зазор, индукцию магнитного поля во столько раз, во сколько длина сердечника больше длины зазора, т.е.

$$B = B' \frac{\ell_c}{\ell_3}. \quad (4.39)$$

Выводы. При пересечении границы раздела двух магнетиков линии магнитного поля преломляются. При этом нормальные составляющие вектора \vec{B} всегда непрерывны. Тангенциальные составляющие вектора \vec{H} непрерывны, если на границе отсутствуют поверхностные макроскопические токи. Другие составляющие векторов \vec{B} и \vec{H} терпят разрыв.

Контрольные вопросы

4.11. Подумайте и запишите **общий вид** граничных условий для магнитного поля. Дайте этому обоснование. Следствием каких общих свойств магнитного поля являются эти условия?

4.12. При каких ограничениях справедливо граничное условие (4.29) для H_n ? Граничное условие (4.34) для B_τ ?

4.13. Запишите в общем виде граничное условие для B_τ в случае изотропных магнетиков.

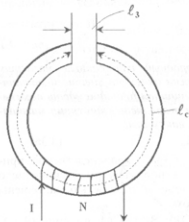


Рис. 4.6

5. Магнитные свойства вещества

5.1. Классификация магнетиков

В отличие от электрических свойств магнитные свойства вещества значительно более разнообразны. Как уже отмечалось, относительная диэлектрическая проницаемость ϵ всегда больше единицы, магнитная проницаемость μ вещества может быть как больше, так и меньше единицы. Величина $\chi(H)$ в формуле (4.23) определяет магнитную восприимчивость единицы объема изотропного магнетика в малой окрестности данной точки. Обычно для характеристики вещества используют *киломолярную восприимчивость*, т.е. магнитную восприимчивость одного киломоля магнетика ($\chi_{\text{кмоль}} = \chi V_{\text{кмоль}}$). Очевидно, что единицей измерения $\chi_{\text{кмоль}}$ в системе СИ является *метр в кубе на киломоль* ($\text{м}^3/\text{кмоль}$).

Магнетики классифицируются по *величине и знаку магнитной восприимчивости*. Существуют *три класса* магнетиков: два класса *слабых магнетиков* (диамагнетики и парамагнетики) и один класс *сильных магнетиков* (ферромагнетики).

Диамагнетики – это вещества, у которых магнитная восприимчивость *отрицательна*, а ее величина $\chi_{\text{кмоль}} \sim 10^{-7} \div 10^{-8} \text{ м}^3/\text{кмоль}$. Поэтому магнитная проницаемость ($\mu = 1 + \chi < 1$) очень мало отличается от единицы. Отрицательное значение χ у диамагнетиков означает, что в этих веществах (4.32) *намагниченность \vec{J} и напряженность поля \vec{H} направлены противоположно друг другу*. Диамагнитные свойства вещества можно легко обнаружить экспериментально, помещая образец между полюсами постоянного магнита. При этом диамагнетик будет *выталкиваться* из магнитного поля. Отметим, что диамагнетиками являются такие вещества, как азот, вода, серебро, висмут и т.д.

Парамагнетики – вещества, у которых магнитная восприимчивость *положительна* и по величине значительно меньше единицы ($\chi_{\text{кмоль}} \sim 10^{-6} \div 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кмоль}$). В изотропных парамагнетиках $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$, поэтому при наличии внешнего магнитного поля образец такого вещества будет *втягиваться* в область более сильного поля. Например, парамагнитными свойствами обладают кислород, алюминий, платина и т.д.

Ферромагнетики – очень сильные магнетики, свойства которых значительно отличаются от соответствующих свойств слабомагнитных веществ не только количественно ($\chi_{\text{кмоль}} \sim 10^3 \text{ м}^3/\text{кмоль} \gg 1$), но и обладают рядом уникальных особенностей, совершенно отсутствующих у слабых магнетиков. Более подробно обсуждение природы и свойств этих веществ будет приведено ниже. Отметим, что свое название ферромагнетики получили от латинского слова ferrum – железо. Железо является типичным магнетиком этого класса. Ферромагнитными свойствами обладают, кроме железа, никель, кобальт, некоторые редкоземельные металлы, их сплавы и соединения и т.д.

Выводы. *Магнетики классифицируются по величине и знаку магнитной восприимчивости. Существуют слабые (диа- и парамагнетики) и сильные магнетики (ферромагнетики).*

Контрольные вопросы

5.1. Какую величину используют в качестве основной характеристики при классификации магнетиков?

5.2. По каким признакам вещество может быть отнесено к диамагнетикам или парамагнетикам?

5.2. Природа молекулярных токов. Магнитные моменты атомов и молекул

При описании магнитного потока в веществе была использована гипотеза Ампера о существовании в веществе круговых молекулярных токов. Возникает естественный вопрос: какова физическая природа этих токов? Сейчас уже хорошо известно, что атом любого вещества состоит из тяжелого положительно заряженного ядра, вокруг которого непрерывно движутся электроны, обладающие суммарным отрицательным зарядом, равным заряду ядра.

Для качественного объяснения природы молекулярных токов достаточно воспользоваться планетарной моделью строения атома, согласно которой электроны в атоме движутся вокруг ядра по круговым или эллиптическим орбитам. Такое движение электронов представляет собой замкнутые электрические токи с соответствующими магнитными моментами \vec{P}_m (*орбитальные магнитные моменты*). Электрон, кроме заряда, обладает и массой,

поэтому при движении по орбите он имеет не только орбитальный магнитный момент, но и *момент импульса* \vec{L}_i . Легко установить, что между \vec{p}_{mi} и \vec{L}_i существует простая связь. Для модуля магнитного момента p_{mi} имеем (1.18), что

$$p_{mi} = I S_i = e v_i S_i, \quad (5.1)$$

где e – величина заряда электрона; v_i – частота его обращения по орбите; S_i – площадь, охватываемая орбитой электрона. Момент импульса (рис.5.1) электрона при движении по круговой орбите радиуса r_i со скоростью v_i равен

$$L_i = m v_i r_i = m \frac{2\pi r_i}{T_i} r_i = 2m v_i S_i, \quad (5.2)$$

где $T_i = \frac{1}{v_i}$ – период обращения.

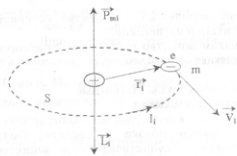


Рис. 5.1

к моменту его импульса L_i называется *гиромагнитным отношением* и определяется только универсальными постоянными e и m :

$$\Gamma = \frac{p_{mi}}{L_i} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} = -\frac{1}{2} \gamma, \quad (5.3)$$

где $\gamma = \frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг – удельный заряд электрона.

Дальнейшее развитие представлений о свойствах частиц, входящих в состав атома и его ядра, привело к заключению, что

наряду с орбитальными магнитными и механическими моментами практически у всех элементарных частиц существуют и *собственные (спиновые)* магнитные и механические моменты. Не касаясь здесь природы этих моментов, отметим, что собственные магнитные и механические моменты частиц являются такими же неотъемлемыми их свойствами, как заряд, масса и т.д.

Таким образом, магнитный момент атома \vec{p}_{ma} представляет собой векторную сумму магнитного момента ядра $\vec{p}_{m\alpha}$, который складывается из собственных \vec{p}_{ms} и орбитальных \vec{p}_m моментов электронов, входящих в состав атома:

$$\vec{p}_{ma} = \vec{p}_{m\alpha} + \sum_i \vec{p}_{msi} + \sum_i \vec{p}_{mi}, \quad (5.4)$$

где суммирование проводится по всем электронам атома. В случае молекул проводится суммирование по всем атомам, входящим в состав молекулы.

Аналогично находится собственный суммарный механический момент атома.

В заключение этого пункта отметим, что поведение магнитных моментов и связанных с ними моментов импульса частиц, входящих в состав атомов или молекул, в магнитном поле и определяет магнитные свойства вещества.

Выводы. Природа молекулярных токов обусловлена орбитальным движением электронов вокруг ядра. Частицы, входящие в состав атома, обладают собственными магнитными и механическими моментами, которые наряду с орбитальными моментами определяют результирующие моменты атома.

Контрольные вопросы

- 5.3. Какова природа молекулярных токов?
- 5.4. Что такое гиромагнитное отношение и чем оно определяется?
- 5.5. Чем определяется магнитный момент атома (молекулы)?

5.3. Магнитомеханическое и механомагнитное явления

Существование орбитальных магнитных моментов электронов в атомах и связанных с орбитальным движением моментов

импульса свидетельствуют о том, что всякое изменение намагниченности магнетика должно сопровождаться соответствующим изменением суммарного орбитального момента импульса электронов, а значит, и момента импульса самого магнетика.

Рассмотрим для простоты однородный изотропный магнетик объемом V , намагниченность которого обусловлена только орбитальными моментами электронов \vec{p}_{mk} . Полный магнитный момент \vec{P}_m этого магнетика может быть записан в виде

$$\vec{P}_m = \vec{J}V = \sum_k \vec{p}_{mk} \quad (5.5)$$

где \vec{J} — намагниченность, а суммирование производится по всем орбитам электронов магнетика. Этому магнитному моменту соответствует суммарный момент импульса орбитального движения электронов \vec{L} :

$$\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k = \frac{1}{\hbar} \sum_k \vec{p}_{mk} = \frac{1}{\hbar} V \vec{J} = -\frac{2V}{\hbar} \vec{J} \quad (5.6)$$

Здесь использовано (5.3) и (5.5). Если в исходном состоянии вещество не намагничено, то $\vec{J} = 0$, поэтому момент импульса всех электронов (5.6) тоже равен нулю $\vec{L} = 0$. При наличии магнитного поля за счет ориентации магнитных моментов круговых токов намагниченность становится отличной от нуля, т.е. получает приращение $\Delta \vec{J} = \vec{J}$. Соответствующее приращение получает суммарный орбитальный момент. Из (5.6) имеем, что

$$\Delta \vec{L} = \frac{V}{\hbar} \Delta \vec{J} = -\frac{2V}{\hbar} \Delta \vec{J} \quad (5.7)$$

Так как при этом магнетик представляет собой замкнутую механическую систему, то общий момент импульса должен оставаться равным нулю. Следовательно, намагничиваемое тело должно приобретать момент импульса

$$\Delta \vec{L}_T = -\Delta \vec{L} = \frac{2V}{\hbar} \Delta \vec{J} = \frac{2V}{\hbar} \vec{J} \quad (5.8)$$

т.е. приходит во вращение вокруг оси, параллельной вектору \vec{J} .

Возникновение вращательного движения образца магнетика при его намагничивании называется *магнито-механическим явлением*. Существование этого явления может быть экспериментально

проверено. Одновременно оно может быть использовано при измерении гиромагнитного отношения.

Магнито-механический эффект был обнаружен на опыте и объяснен А.Эйнштейном и В.де Хаазом в 1915 году. Сущность опыта заключалась в следующем. На упругой нити внутри вертикального соленоида подвешивался тонкий *железный* стержень. Для усиления эффекта по катушке соленоида пропускался переменный ток, частота которого подбиралась равной собственной частоте крутильных колебаний стержня. При резонансе амплитуда колебаний достигала значений, обеспечивающих достаточную точность измерений. По данным опыта было определено отношение величины намагниченности J и механического момента единицы объема L/V . Оно оказалось соответствующим отрицательному знаку носителей молекулярных токов, что совпадало со знаком заряда электрона, но значение этого отношения превышало ожидаемое значение гиромагнитного отношения в два раза и было равно $(-\frac{e}{m}) = (-\gamma)$.

Магнито-механический эффект является *обратным магнито-механическому* и заключается в том, что при *возникновении вращения магнетика последний должен намагничиваться в направлении оси вращения*.

Наблюдение магнито-механического эффекта было произведено опытным путем Барнеттом. Возникающее намагничивание измерялось при очень быстром вращении железного стержня. Рассчитанное по результатам опыта гиромагнитное отношение оказалось в два раза больше ожидаемого (5.3).

Таким образом, на основании опытных данных, полученных Эйнштейном, де Хаазом и Барнеттом, можно заключить, что магнитные свойства железа *нельзя объяснить существованием орбитальных магнитных моментов электронов*.

Позднее было установлено, что магнитные свойства ферромагнетиков, к классу которых относится железо, обусловлены существованием у электронов собственных момента импульса (L_s) и магнитного момента (p_{ms}), отношение которых равно

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m} = -\gamma \quad (5.9)$$

что хорошо согласуется с результатами опытов по наблюдению магнито-механических и магнито-механических явлений.

Как уже указывалось в предыдущем пункте, собственным моментом импульса (спином) обладает большинство элементар-

ных частиц. Величина спинового момента любой частицы может быть представлена равенством

$$L_s = k \frac{\hbar}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с (h – постоянная Планка), т.е. спиновый момент частицы является кратным величине $\hbar/2$.

Для электрона спиновый момент $L_s = \frac{1}{2}\hbar$, что позволяет на основании (5.9) определить величину собственного магнитного момента электрона: μ_{ms}

$$\mu_{ms} = -\frac{e}{m} L_s = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (5.11)$$

Модуль магнитного момента (5.11) является *естественной количественной мерой измерения магнитных моментов* элементарных частиц, атомов и молекул и называется *магнетоном Бора*:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}. \quad (5.12)$$

Измерения магнитных моментов атомов обычно дают значения порядка нескольких магнетонов Бора, хотя встречаются атомы с нулевыми моментами. Не касаясь здесь специфических квантовых результатов опытов по измерению магнитных моментов атомов, укажем только, что впервые эти измерения были проведены Штерном и Герлахом. Пучки атомов пропускались через область сильно неоднородного магнитного поля, и по их отклонению от первоначального направления можно было судить о величине магнитного момента атома.

Выводы. *Данные опытов подтверждают существование магнитных моментов атомов, наличие которых обуславливает магнитные свойства веществ. Однако обоснование этих свойств только наличием орбитальных магнитных моментов электронов в атомах оказывается невозможным.*

Контрольные вопросы

5.6. Дайте обоснование существованию магнитомеханических и механомангнитных явлений. В чем заключается сущность этих явлений?

5.7. Сформулируйте главные выводы из результатов опытов Эйнштейна, де Хааза и Барнета.

5.8. Что такое магнетон Бора и какова его роль в описании магнитных свойств атомов?

5.4. Объяснение парамагнетизма

Тот факт, что атомы обладают магнитными моментами, позволяет достаточно наглядно объяснить качественную картину намагничивания *парамагнетиков*, опираясь на классические представления.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов вследствие теплового движения ориентированы совершенно хаотично. Поэтому намагниченность \vec{J} , равная *векторной* сумме магнитных моментов атомов в единице объема (4.11), в этом случае равна нулю. При наличии внешнего магнитного поля на магнитный момент каждого атома действует момент сил (2.16), стремящийся ориентировать магнитный момент атома параллельно полю. (Эта ситуация аналогична поведению диполя во внешнем электрическом поле). Одновременно действует конкурирующий процесс, связанный с наличием теплового движения, препятствующий полной ориентации магнитных моментов по полю. В результате действия этих двух механизмов появляется *результатирующая преимущественная ориентация* магнитных моментов атомов по полю, при этом намагниченность становится отличной от нуля и параллельной направлению поля $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$, что характерно для парамагнетиков.

Из сказанного выше следует, что с ростом температуры T намагниченность парамагнетика должна убывать. Действительно, Кюри экспериментально установил закон, согласно которому киломолярная магнитная восприимчивость $\chi_{\text{кмоль}}$ парамагнетика обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\chi_{\text{кмоль}} = \frac{C}{T}, \quad (5.13)$$

где C – постоянная Кюри, величина которой зависит от свойств парамагнетика.

Напомним, что парамагнетики являются слабыми магнетиками, для которых в не слишком сильных полях справедлива связь (4.23):

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (5.14)$$

Ланжевен, опираясь на классические представления, теоретически объяснил явление парамагнетизма в 1905 г. В основу его теории положен тот факт, что в магнитном поле атом с магнитным моментом \vec{p}_{ma} обладает потенциальной энергией $W = -p_{ma} B \cos \alpha$ (2.33). Поэтому равновесное распределение моментов p_{ma} по различным направлениям α должно подчиняться распределению Больцмана:

$$f(W) = A e^{-W/kT} = A e^{-p_{ma} B \cos \alpha / kT}.$$

Следовательно, вероятность того, что магнитный момент атома составляет с вектором \vec{B} угол, заключенный в интервале от α до $\alpha + d\alpha$, будет равна

$$dP_{\alpha} = A e^{p_{ma} B \cos \alpha / kT} \frac{1}{4\pi} d\Omega_{\alpha}, \quad (5.15)$$

где $d\Omega_{\alpha} = 2\pi \sin \alpha \cdot d\alpha$ – пространственный угол, заключенный между соседними конусами, имеющими при вершинах углы α и $\alpha + d\alpha$, а константа A определяется из условия нормировки

$$\int_0^{\pi} dP_{\alpha} = 1. \quad (5.16)$$

Для определения концентрации атомов dn_{α} , моменты которых ориентированы в пределах от α до $\alpha + d\alpha$, имеет место равенство

$$dn_{\alpha} = n dP_{\alpha}. \quad (5.17)$$

Учтя, что каждый атом вносит в намагниченность J вклад, равный $p_{ma} \cos \alpha$, получим

$$J = \int_0^{\pi} p_{ma} \cos \alpha \cdot dn_{\alpha},$$

или

$$J = \frac{A}{2} p_{ma} n \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{p_{ma} B \cos \alpha}{kT}\right) \cos \alpha \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (5.18)$$

Интегрирование (5.15) и (5.18) при условии $p_{ma} B / kT \ll 1$, что соответствует “слабому” полю B , дает выражение для намагниченности

$$J = \frac{n p_{ma}^2 B}{3kT} = \frac{\mu_0 n p_{ma}^2}{3kT} H, \quad (5.19)$$

где $B = \mu_0 H$ ($\mu = 1$). Сравнивая (5.14) с (5.19), получим формулу для магнитной восприимчивости

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_{ma}^2}{3kT}.$$

Заменяя концентрацию атомов n на число Авогадро N_A , найдем kilomольную восприимчивость (5.18)

$$\chi_{кмоль} = \frac{\mu_0 N_A p_{ma}^2}{3kT}. \quad (5.20)$$

Из (5.20) видно, что теория Ланжевена дает правильное объяснение экспериментальной зависимости $\chi_{кмоль}(T)$ согласно закону Кюри (5.13). Кроме того, численные значения $\chi_{кмоль}$, рассчитанные по формуле (5.20), для различных парамагнетиков согласуются по порядку величины со значениями, полученными из опытов.

В сильных полях или при низких температурах, когда $p_{ma} B / kT \gg 1$, наблюдаются отклонения от линейной зависимости J от H (5.14). В этом случае (рис.5.2) из-за полной ориентации магнитных моментов атомов по полю наступает состояние магнитного насыщения $J_{нас}$.

и при дальнейшем увеличении поля H намагниченность парамагнетика перестает изменяться, оставаясь постоянной и равной $J = J_{нас}$.

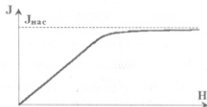


Рис. 5.2

В заключение отметим, что правильные количественные результаты при объяснении магнитных свойств конкретных парамагнетиков могут

быть получены только на основе квантово-механических представлений, где учитывается *самый главный* факт, что возможны *любые ориентации* магнитных моментов атомов относительно магнитного поля, а *только вполне определенные*. Набор возможных ориентаций определяется квантовыми свойствами атома и его состоянием.

Выводы. *Количественное объяснение природы парамагнетизма возможно на основе ориентационного механизма действия магнитного поля на магнитные моменты атомов. Количественное по порядку величины согласие с опытными данными дает теория Ланжевена. Ориентационный механизм намагничивания не является универсальным. Он действует только в тех веществах, атомы которого обладают собственным магнитным моментом.*

Контрольные вопросы

5.9. Объясните качественно механизм намагничивания парамагнетика в слабых и сильных полях.

5.10. В чем заключается сущность теории парамагнетизма Ланжевена? При каких условиях эта теория дает правильные результаты?

5.11. Вычислите нормировочный множитель A (5.15) в случае слабого поля B .

5.12. Рассчитайте значение $\chi_{\text{моль}}$ при комнатной температуре, приняв $\mu_B = \mu_B$, и сравните результат с данными пункта 5.1.

5.5. Объяснение диамагнетизма

Рассмотрим теперь, как на основе классических представлений можно объяснить существование диамагнетиков.

Как — уже указывалось (см. п. 5.1), характерной особенностью этого класса веществ является *направление намагниченности \vec{J} , противоположное направлению напряженности магнитного поля \vec{H}* . Эту особенность намагниченности невозможно объяснить формальным существованием магнитных моментов атомов и их преимущественной ориентацией вдоль магнитного поля.

Однако явление диамагнетизма сравнительно легко объясняется в рамках гипотезы о существовании круговых молекуляр-

ных токов (орбитальных магнитных моментов электронов). Подобное объяснение было также дано впервые Ланжевеном. Рассмотрим какую-либо круговую электронную орбиту атома (рис. 5.3). Если атом находится во внешнем магнитном поле \vec{B} , то поведение электрона при его движении вокруг ядра становится подобным поведению *гироскопа* при действии на него внешнего момента силы: у электронной орбиты появляется дополнительное *прецессионное* движение, которое и обуславливает возникновение дополнительного (*индуцированного*) магнитного момента, направленного против поля \vec{B} . Опишем это явление на основе физических закономерностей. На орбитальный магнитный момент электрона \vec{p}_m со стороны поля \vec{B} действует вращательный момент сил $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$. В результате этого действия орбитальный момент импульса получает приращение $d\vec{L}$. Согласно основному закону

динамики вращательного движения $\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\right)$:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt.$$

Так как \vec{M} , а следовательно, и $d\vec{L}$ в любой момент времени перпендикулярны плоскости, в которой лежат векторы \vec{p}_m, \vec{B} и \vec{L} (напомним, что $\vec{L} \uparrow \downarrow \vec{p}_m$), то действие момента сил \vec{M} приводит к повороту этой плоскости на угол $d\varphi$ (см. рис. 5.3). Поэтому ось орбиты электрона вращается вокруг направления \vec{B} . Это и есть прецессия электронной орбиты. Из рис. 5.3 видно, что угол поворота $d\varphi$ равен

$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{L \sin \theta} = \frac{|\vec{M}| dt}{L \sin \theta} = \frac{p_m B \sin \theta dt}{L \sin \theta} = \frac{p_m B}{L} dt.$$

Разделив этот угол на dt , найдем угловую скорость прецессии:

$$\omega_L = \frac{p_m B}{L} = \frac{eB}{2m}, \quad (5.21)$$

где учтена величина гиромангнитного отношения (5.3).



Рис. 5.3

дополнительный эквивалентный круговой ток I' , охватывающий площадь $\langle S' \rangle = \pi \langle r'^2 \rangle$, где r' — изменяющееся в зависимости от времени расстояние электрона от оси прецессии. В этом случае магнитный момент $\langle p'_m \rangle$ будет равен

$$\langle p'_m \rangle = I' \langle S' \rangle = e \frac{\omega_L}{2\pi} \langle S' \rangle = \frac{e\omega_L}{2} \langle r'^2 \rangle. \quad (5.22)$$

Усреднение по всем возможным значениям угла α , который определяет ориентацию орбиты радиусом r_0 относительно вектора \vec{B} , дает связь

Угловую скорость прецессии электронной орбиты называют *ларморовой частотой*. Отметим, что ω_L зависит только от удельного заряда электрона $\left(\frac{e}{m}\right)$ и

величины вектора \vec{B} . Следовательно, для любых электронных орбит величины ω_L равны между собой.

Найдем теперь индуцированный магнитный момент p'_m , возникающий за счет прецессии электронной орбиты. Будем считать, что в результате прецессии в среднем возникает

$$\langle r'^2 \rangle = \frac{2}{3} r_0^2.$$

Подставляя эту связь в (5.22) и учитывая (5.21), получим выражение для среднего значения индуцированного магнитного момента в результате прецессии электронной орбиты радиусом r_0

$$\langle p'_m \rangle = \frac{e^2 r_0^2}{6m} B. \quad (5.23)$$

Более строгий учет того факта, что в атоме, кроме круговых, имеются и эллиптические орбиты, требует замены в (5.23) величины r_0^2 на $\langle r^2 \rangle$, где r — расстояние от электрона до ядра атома.

Просуммировав (5.23) по всем электронам атома, с учетом сказанного выше для индуцированного магнитного момента атома получим

$$\vec{p}'_{mat} = \sum_{k=1}^z \langle \vec{p}'_m \rangle = -\frac{e^2 \vec{B}}{6m} \sum_{k=1}^z \langle r_k^2 \rangle, \quad (5.24)$$

где z — полное число электронов в атоме, т.е. его порядковый номер в таблице Менделеева. В (5.24), кроме того, учтено, что \vec{p}'_m и \vec{B} имеют противоположные направления.

Умножив выражение (5.24) на число Авогадро и разделив на H ($B = \mu_0 H$, так как μ практически равно единице), для киломолярной магнитной восприимчивости получим равенство

$$\chi_{кмоль} = -\frac{\mu_0 N_A e^2}{6m} \sum_{k=1}^z \langle r_k^2 \rangle. \quad (5.25)$$

Вычисления по формуле (5.25) с учетом того, что r_k имеют значения порядка 10^{-10} м, дают величину $\chi_{кмоль}$, хорошо согласующуюся с данными опытов.

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что атомы **любого вещества** в магнитном поле приобретают индуцированный магнитный момент, т.е. явление **диамагнетизма является универсальным**.

Однако возникает вопрос: почему же не все вещества обнаруживают в опытах диамагнитные свойства? Здесь следует вспомнить, что атомы обладают собственным суммарным магнитным моментом (5.4), наличие которого обуславливает во внешнем поле парамагнитные свойства вещества. Поэтому во внешнем поле суммарный магнитный момент атома складывается из собственного $\vec{p}_{\text{ма}}$ и индуцированного моментов $\vec{p}'_{\text{мат}}$:

$$\vec{p}_m = \vec{p}_{\text{ма}} + \vec{p}'_{\text{мат}} \quad (5.26)$$

Так как моменты $\vec{p}_{\text{ма}}$ и $\vec{p}'_{\text{мат}}$ имеют противоположные направления ($\vec{p}_{\text{ма}} \uparrow \uparrow \vec{B}$, $\vec{p}'_{\text{мат}} \uparrow \downarrow \vec{B}$), то принадлежность вещества к парамагнетикам или диамагнетикам зависит от соотношения между модулями $|\vec{p}_{\text{ма}}|$ и $|\vec{p}'_{\text{мат}}|$.

При $|\vec{p}_{\text{ма}}| > |\vec{p}'_{\text{мат}}|$ *вещество – парамагнетик*, так как в этом случае $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$. При $|\vec{p}_{\text{ма}}| < |\vec{p}'_{\text{мат}}|$ *вещество – диамагнетик*.

Последнее соотношение обычно выполняется только для тех веществ, собственные магнитные моменты атомов которых равны нулю ($p_{\text{ма}} = 0$). В этом случае вещество во внешнем магнитном поле ведет себя как *диамагнетик*. В противном случае – как *парамагнетик*.

Выводы. *Явление диамагнетизма является универсальным, присущим всем веществам, и обусловлено появлением индуцированного магнитного момента в результате прецессии электронных орбит во внешнем поле. Однако в чистом виде этот эффект наблюдается только у тех веществ, атомы которых обладают нулевым собственным магнитным моментом.*

Контрольные вопросы

5.13. Опишите и объясните сущность явления диамагнетизма.

5.14. При каких условиях можно наблюдать диамагнетизм вещества?

5.15. Рассчитайте значение $\chi_{\text{эксп}}^{\text{моль}}$ по формуле (5.25) и сравните его значение с данными пункта 5.1 для диамагнетиков.

Ферромагнетики образуют особый класс сильномагнитных веществ, которые могут обладать *намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля*. К ферромагнетикам относятся железо, никель, гадолиний, кобальт, их сплавы и соединения, а также другие вещества в *кристаллическом состоянии*.

Характерными признаками ферромагнетика являются следующие свойства, отличающие их от других магнетиков.

1) Аномально высокая намагниченность, превышающая в $10^{10} \div 10^{11}$ раз намагниченность диа- и парамагнетиков при соответствующих внешних полях и, как следствие этого, огромные значения относительной магнитной проницаемости μ (10^5 и более).

2) Существенно нелинейная зависимость намагниченности $\vec{J} = \vec{J}(\vec{H})$ от напряженности намагничивающего поля \vec{H} , а поэтому и нелинейная зависимость $\vec{B}(\vec{H})$.

3) Наличие *истерезиса*, т.е. неоднозначной зависимости намагниченности от внешнего намагничивающего поля. Это свойство свидетельствует о том, что значения величин, характеризующих состояние ферромагнетика при данном значении намагничивающего поля \vec{H} , сильно зависят от того, в каком состоянии до этого находился ферромагнетик.

Обсудим теперь указанные свойства более подробно.

5.6.1. Основная кривая намагниченности

Рассмотрим какой-либо ферромагнетик, который в отсутствие внешнего магнитного поля \vec{H} обладает нулевой намагниченностью, т.е. магнитный момент единицы его объема равен нулю ($\vec{J} = 0$, при $\vec{H} = 0$). При включении внешнего намагничивающего поля намагниченность очень быстро нарастает и уже в сравнительно слабых полях достигает насыщения. На рис. 5.4а изображена характерная зависимость $\vec{J}(\vec{H})$, соответствующая исходному состоянию ферромагнетика с $\vec{J} = 0$ при $\vec{H} = 0$.

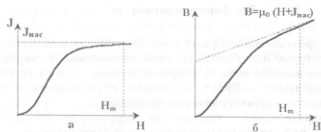


Рис. 5.4

Эта зависимость называется *основой (нулевой) кривой намагниченности*.

Такой характер зависимости можно объяснить качественно тем, что на начальном этапе с ростом намагничивающего поля H увеличивается ориентация магнитных моментов частиц ферромагнетика по полю. При этом доля частиц с неориентированными моментами становится все меньше и меньше, стремясь к нулю с ростом поля H . Насыщение наступает, когда магнитные моменты всех частиц оказываются ориентированными вдоль поля H . В этом случае дальнейшее возрастание поля H уже не приводит к изменению намагниченности J , т.е. наступает насыщение $J = J_{\text{нас}}$. Значение напряженности H_m , при которой наступает насыщение намагниченности, составляет обычно 10^2 А/м.

Индукция магнитного поля B , зависимость которой от H дана на рис.5.4,б, в слабых полях $H \ll H_m$ в основном обусловлена нелинейной связью $J(H)$ (4.18):

$$B = \mu_0(H + J(H)). \quad (5.27)$$

При достижении насыщения ($H \geq H_m$) второе слагаемое в (5.27) становится постоянным ($J(H) = J_{\text{нас}}$), поэтому индукция B с увеличением H в этой области значений растет линейно с ростом H :

$$B = \mu_0 J_{\text{нас}} + \mu_0 H. \quad (5.28)$$

Впервые основная кривая намагничивания была получена и описана А.Г.Столетьевым для железа.

В завершение обсуждения нелинейных зависимостей $J(H)$

и $B(H)$ отметим, что изложенные результаты справедливы для *изотропных ферромагнетиков*, когда они имеют мелкокристаллическую структуру с совершенно хаотичным расположением кристалликов. Только в этом случае векторы \vec{J} , \vec{B} и \vec{H} в среднем имеют внутри ферромагнетика одинаковое направление. Если же ферромагнетик представляет собой единый кристалл, то его магнитные свойства проявляют существенную *анизотропию*. В частности, вид основной кривой намагничивания различен для разных направлений намагничивающего поля H относительно кристаллографических осей.

Выводы. *Важнейшей характеристикой ферромагнетика является основная кривая намагниченности, которая имеет типичную S-образную форму. Намагниченность достигает насыщения уже в сравнительно слабых намагничивающих полях, оставаясь постоянной при дальнейшем увеличении этого поля.*

5.6.2. Гистерезис. Петля гистерезиса

Возьмем вначале образец ненамагниченного изотропного ферромагнетика ($J = 0$) и, поместив его между полюсами электромагнита, начнем увеличивать намагничивающее поле от нуля до некоторого значения $H_1 < H_m$. В этом случае зависимость $B(H)$ (рис.5.5) изобразится отрезком кривой 01 на основной кривой намагничивания 01А, а значению поля H_1 будет соответствовать индукция B_1 , равная на рисунке вертикальному отрезку 0Н₁. Если теперь от значения $H = H_1$ уменьшить намагничивающее поле до нуля, то индукция B уже не будет соответствовать основной кривой от точки 1 до нуля, а будет изображаться отрезком кривой 12. Когда поле H станет равным нулю, индукция B будет соответствовать отрезку 02. Ферромагнетик в этом состоянии обладает некоторым значением остаточной индукции, т.е. становится *постоянным магнитом*. При изменении направления намагничивающего поля на противоположное ($0 \geq H \geq -H_1$) зависимость $B(H)$ изображается отрезком кривой 234. Если теперь изменять намагничивающее поле H от значения $H = -H_1$

до значения $H = H_1$, то $B(H)$ соответствует ветви кривой 4561.

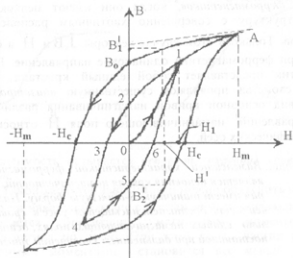


Рис. 5.5

Таким образом, перемагничивание образца ферромагнетика при циклическом изменении поля H в пределах $-H_1 \leq H \leq H_1$ описывается зависимостью $B(H)$ в виде замкнутой кривой 1234561.

Из результатов описанного опыта видно, что значение и направление индукции поля в ферромагнетике существенным образом зависят не только от напряженности намагничивающего поля, но и от предыдущих состояний ферромагнетика. Другими словами, происходит *отставание* изменений B от изменений H , которое получило название *магнитного гистерезиса*. Замкнутая кривая $B(H)$, которая получается при циклическом перемагничивании ферромагнетика, называется *петлей гистерезиса*.

При циклическом перемагничивании ферромагнетика между значениями поля H , при которых достигается магнитное насыщение ($-H_m \leq H \leq H_m$), получается так называемая *максимальная петля гистерезиса*. Остальные петли, соответствующие случаям перемагничивания $-H_1 \leq H \leq H_1$ при $H_1 < H_m$, называются *частичными циклами* и располагаются внутри максимальной

петли гистерезиса. Вершины всех частных циклов лежат на основной кривой зависимости $B(H)$ 01A (рис.5.5).

Максимальная петля гистерезиса позволяет определять некоторые важнейшие характеристики ферромагнетика.

а) *Остаточная индукция* (B_0) – значение индукции магнитного поля в ферромагнетике, когда намагничивающее поле H обращается в нуль. На рис. 5.5 она изображается отрезком $0B_0$. В этом случае состояние ферромагнетика характеризуется *остаточной намагниченностью* J_0 (5.27):

$$J_0 = \frac{B_0}{\mu_0}. \quad (5.29)$$

б) *Коэрцитивная сила* (H_c) – значение поля H , при котором индукция магнитного поля B внутри ферромагнетика обращается в нуль. Заметим, что H_c имеет направление, противоположное первоначальному направлению намагничивающего поля H_m . Кроме того, следует указать, что, хотя при $H = H_c$ индукция B обращается в нуль, это не означает, что данное состояние ферромагнетика соответствует его ненамагниченности. Действительно, из (5.27) следует, что в этом случае

$$J_c = H_c \neq 0. \quad (5.30)$$

Из сказанного вытекает важное следствие, которое используют на практике для размагничивания ферромагнетиков. Образец необходимо поместить во внешнее магнитное поле с напряженностью $H > H_m$ и произвести его циклическое перемагничивание, постепенно уменьшая амплитуду поля H до нуля. При этом частные циклы перемагничивания будут уменьшаться, стягиваясь к точке 0, в которой (кроме $H = 0$, $B = 0$) намагниченность J равна нулю.

По величине коэрцитивной силы ферромагнетика делятся на *жесткие* и *мягкие*. Для жестких ферромагнетиков характерным является большое значение H_c и широкая петля гистерезиса, для мягких – соответственно малое значение H_c и узкая петля. Обычно жесткие ферромагнетики используются для изготовления постоянных магнитов, а мягкие – для изготовления сердечников трансформаторов, дросселей и т.д.

в) *Площадь петли гистерезиса* является еще одной важной характеристикой ферромагнетика: она численно равна работе по циклическому перемагничиванию единицы объема ферромагнетика при изменении намагничивающего поля в пределах

$$-H_1 \leq H \leq H_1.$$

Доказательство этого утверждения будет приведено ниже в следующей части пособия.

В заключение обсуждения явления магнитного гистерезиса отметим, что его наличие свидетельствует о значительной неоднозначности зависимости $B(H)$, а значит, и $J(H)$ у ферромагнетиков. Эта зависимость в значительной степени определяется тем, в каких предыдущих состояниях находился образец. Так, из рис.5.5 видно, что при значении поля $H = H'$ индукция магнитного поля может иметь любое значение B в интервале $B'_2 \leq B \leq B'_1$, а намагниченность, согласно (5.27), соответственные значения в интервале

$$\frac{B'_2}{\mu_0} - H' \leq J \leq \frac{B'_1}{\mu_0} - H'.$$

Выводы. Важным свойством любого ферромагнетика является запаздывание значений индукции B от величины намагничивающего поля H (гистерезис). Максимальная петля гистерезиса позволяет определять такие основные параметры, как остаточную индукцию (или остаточную намагниченность), коэрцитивную силу и максимальную работу по циклическому перемагничиванию единицы объема ферромагнетика.

5.6.3. Магнитная проницаемость ферромагнетиков

Неоднозначность зависимости параметров состояния ферромагнетика от характеристик его предыдущих состояний приводит к значительным трудностям при интерпретации такого широко используемого параметра, как *магнитная проницаемость*. Особенно эти сложности проявляются при наличии переменных во времени магнитных полей. Можно, конечно, сохранить определение магнитной проницаемости на основе равенства (4.26), но в этом случае из-за нелинейности зависимости $B(H)$ сама магнитная проницаемость является нелинейной функцией H :

$$\mu(H) = \frac{B(H)}{\mu_0 H}. \quad (5.31)$$

Однако это не спасает ситуацию, так как остается неоднозначность значения B как функции H , о которой говорилось в конце предыдущего пункта, что приводит к неопределенности самого значения $\mu(H)$.

Поэтому понятие магнитной проницаемости μ используется только применительно к основной кривой $B(H)$, для которой сохраняется взаимоднозначное соответствие между B и H . Значение магнитной проницаемости μ при данном значении намагничивающего поля H можно найти по данным графика основной кривой $B(H)$, используя равенство (5.31). Для этого выбранную точку на кривой $B(H)$ (например, точки 1, 2, 3 на рис.5.6.а) соединяют с точкой 0 отрезком прямой. Легко видеть, что в этом случае тангенс угла наклона такого отрезка к оси OH равен отношению B/H для выбранной точки. Разделив это отношение на магнитную постоянную μ_0 , согласно (5.31), получим значение μ , соответствующее данному полю H .

Проводя подобную процедуру для различных точек, начиная от точки 0, и следя за углом наклона указанного отрезка прямой, легко восстановить зависимость $\mu(H)$. При перемещении по основной кривой на участке 02 угол наклона отрезка возрастает, достигая максимального значения в точке 2, когда отрезок

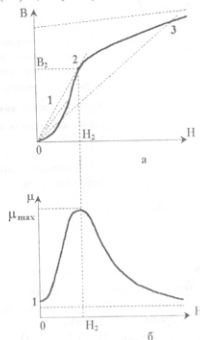


Рис. 5.6

становится касательным к основной кривой.

При дальнейшем движении по основной кривой от точки 2 в сторону точки 3 угол наклона убывает. Аналогично ведет себя и магнитная проницаемость при возрастании H . Отметим, что при $H \rightarrow \infty$ магнитная проницаемость стремится к единице. Действительно, из (5.31) с учетом (5.28) при условии $H \rightarrow \infty$ имеем

$$\mu = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H} = 1 + \frac{J_{\text{нас}}}{H} \rightarrow 1. \quad (5.32)$$

Характерный вид зависимости $\mu(H)$ ферромагнетика, построенной на основе изложенных выше соображений, приведен на рис.5.6,б. Получаемое при этом *максимальное значение магнитной проницаемости* μ_{max} является одним из основных параметров ферромагнетика. У некоторых специальных ферромагнитных сплавов максимальные значения μ_{max} могут достигать сотен тысяч и более.

Выводы. Из-за неоднозначности зависимости $B(H)$ понятие магнитной проницаемости используется только по отношению к основной кривой. Существенной является нелинейная зависимость $\mu(H)$ с характерным максимумом μ_{max} , значение которого является основным параметром ферромагнетика.

5.6.4. Зависимость магнитных свойств ферромагнетиков от температуры

Магнитные свойства ферромагнетиков существенно зависят от температуры. Здесь кратко укажем основные особенности этой зависимости.

При повышении температуры способность ферромагнетиков к намагничиванию значительно уменьшается. Так, намагниченность насыщения J имеет наибольшее значение при 0°K и монотонно спадает до нуля при стремлении температуры к некоторому конечному, характерному для каждого ферромагнетика, значению θ_k ($J_{\text{нас}} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \theta_k$). Это критическое значение температуры θ_k , при которой вещество теряет свои ферромагнитные свойства, переходя обычно в парамагнитное

состояние, называется температурой Кюри (точкой Кюри). Характерный вид зависимости $J_{\text{нас}}(T)$ представлен на рис.5.7.

Кроме указанной зависимости $J_{\text{нас}}(T)$ с ростом температуры ослабляется до исчезновения при $T = \theta_k$ явление гистерезиса. Особенно интересна, на наш взгляд, зависимость магнитной проницаемости ферромагнетиков от температуры в слабых намагничивающих полях. В области температур, значительно меньших точки Кюри ($T \ll \theta_k$), с ростом T наблюдается сравнительно медленное возрастание μ .

При T , близких к точке Кюри, наблюдается резкий скачок значения μ , которое затем еще резко падает при $T \rightarrow \theta_k$. При температурах выше точки Кюри ($T > \theta_k$) хорошо выполняется закон Кюри – Вейса для киломолярности магнитной восприимчивости:

$$\chi_{\text{кмоль}} = \frac{C}{T - \theta_k}, \quad (5.33)$$

где C – постоянная, зависящая от рода вещества.

Поскольку при таких температурах ферромагнитные свойства вещества отсутствуют (оно становится парамагнитным), равенство (5.33) согласуется с (5.13).

Выводы. С ростом температуры при любых намагничивающих полях ферромагнитные свойства вещества ослабляются, исчезая при температуре Кюри. При этом вещество, как правило, становится парамагнетиком.

5.6.5. Природа ферромагнетиков и объяснение их свойств

Опытные данные по изучению магнитомеханических и механомагнитных явлений (см.п.5.3) свидетельствуют о том, что

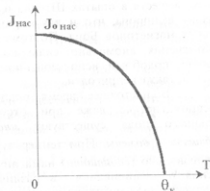


Рис. 5.7

свойства ферромагнетиков не могут быть объяснены наличием у атомов вещества орбитальных магнитных моментов. Значение гиромагнитного отношения, полученное в этих опытах, в два раза больше, чем для орбитального движения электронов, хорошо согласуется с отношением *спиновых* магнитного момента и момента импульса электрона.

Кроме того, следует принять во внимание тот факт, что измерения суммарных магнитных моментов атомов ферромагнитных веществ в опытах Штерна и Герлаха дают такие же по порядку величины, что и для парамагнетиков, т.е. порядка нескольких магнетонов Бора. Поэтому ориентационный механизм для объяснения anomalно сильно намагничивания ферромагнетиков, подобный использованному при объяснении парамагнетизма, также непригоден.

В настоящее время опытным путем доказано, что в ферромагнетике даже при отсутствии внешнего намагничивающего поля существуют *многочисленные микроскопические области* — *домены*. При температурах $T < \theta_c$ эти области самопроизвольно (*спонтанно*) намагничены до насыщения, но направления намагничивания в различных доменах при отсутствии внешнего поля могут быть ориентированы хаотично, что обуславливает отсутствие результирующей намагниченности. Рис.5.8

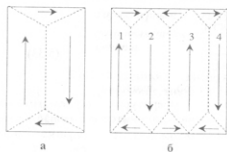


Рис. 5.8

как в этом случае его энергия минимальна.

Существование доменной структуры и общих свойств ферромагнетиков теоретически были объяснены Я.И.Френкелем и В.Гейзенбергом в 1928 г. Они показали, что при определенных условиях спонтанная ориентация спиновых моментов электронов возможна в результате *специфического квантового (обменного) взаимодействия* между ними. Специфичность этого взаимодей-

вия заключается в том, что оно обладает свойством *насыщения*, т.е. этим взаимодействием могут быть охвачены лишь ограниченное число спиновых моментов. Наличием свойства насыщения и объясняется существование доменов, содержащих в своем составе конечное число атомов. Опытные данные дают характерные размеры доменов от 1 до 100 мкм. В пределах одного домена спиновые моменты электронов ориентированы параллельно друг другу, что обеспечивает насыщение намагниченности домена в отсутствие намагничивающего поля.

Доменная структура позволяет объяснить общий механизм намагничивания ферромагнетиков. Процесс намагничивания условно можно разбить на два этапа.

На первом этапе, когда внешнее поле мало, намагничивание происходит за счет смещения границ доменов. При этом объем доменов с преимущественной ориентацией их моментов по полю (первый тип) возрастает за счет объема доменов с преимущественной ориентацией их моментов против поля (второй тип). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не исчезнут домены второго типа. На рис.5.9 а,б,в проиллюстрирован этот этап намагничивания. Такой механизм намагничивания на первом этапе связан с тем, что состояния доменов второго типа во внешнем поле энергетически менее выгодны, чем состоя-

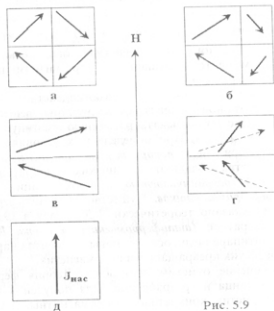


Рис. 5.9

ния доменов первого типа.

При дальнейшем росте намагничивающего поля H магнитные моменты доменов первого типа испытывают скачкообразную ориентацию в направлении поля H (рис.5.9,г). В этом случае спиновые моменты электронов одного домена поворачиваются одновременно, скачкообразно, сохраняя параллельную ориентацию друг другу.

Этот этап намагничивания продолжается до того, пока магнитные моменты всех доменов первого типа не примут строгой ориентации по полю H . Намагниченность достигает насыщения, при этом весь образец ферромагнетика представляет фактически один микроскопический домен (рис.5.9,д).

Описанный механизм намагничивания связан с перестройкой структуры доменов, т.е. со смещением границ доменов, и перераспределением спиновых моментов электронов. Эти процессы уже на этапах б, в, г (см.рис.5.9) являются необратимыми, что является причиной наличия магнитного гистерезиса у ферромагнетиков.

Существование обменного спинового взаимодействия электронов позволяет достаточно просто на качественном уровне объяснить существование точки Кюри. Действительно, это обменное взаимодействие обладает вполне определенной средней энергией связи ΔE , приходящейся на один электрон, которая и обеспечивает параллельность спиновых моментов. Когда средняя энергия теплового движения атомов ($\sim k\theta_c$) становится равной энергии связи обменного взаимодействия, параллельная ориентация спиновых моментов нарушается и ферромагнетик переходит в парамагнитное состояние.

Интенсивность обменного взаимодействия спиновых моментов электронов зависит от структуры вещества. Это взаимодействие может вызывать различную взаимную ориентацию спиновых моментов. При определенных условиях спиновые моменты электронов имеют *попарную антипараллельную ориентацию*. Такие вещества обладают при низких температурах *сверхмалой магнитной восприимчивостью*, и поэтому они получили название *антиферромагнетиков*. Существование антиферромагнетиков было предсказано теоретически Л.Д.Ландау в 1933 г. При некоторой температуре (*антиферромагнитная точка Кюри, или точка Нееля*) антипараллельность спиновых моментов нарушается и антиферромагнетик превращается в парамагнетик.

В заключение отметим, что общая теория ферромагнетизма еще до конца не разработана. Для получения количественных характеристик конкретных ферромагнитных материалов

необходимо детально знать состав и кристаллическую структуру этих материалов, а также внешние условия (температуру, механические напряжения и т.д.), в которых они находятся. Решение подобных задач является одним из предметов квантово-механической теории.

Выводы. *Природа ферромагнетиков обусловлена спонтанной параллельной ориентацией спиновых моментов электронов в пределах одного домена из-за специфического квантового обменного взаимодействия. Процесс намагничивания идет в два этапа. При этом происходит необратимые процессы, приводящие к магнитному гистерезису. Существование точки Кюри связано с тем, что для каждого ферромагнетика энергия обменного взаимодействия спиновых моментов имеет определенную величину.*

Контрольные вопросы

- 5.16. Перечислите характерные признаки ферромагнитных веществ, отличающие их от других магнетиков.
- 5.17. Опишите вид основной кривой намагниченности и основной зависимости $B(H)$. Укажите их основные особенности.
- 5.18. Что такое магнитный гистерезис? Что такое петля гистерезиса? Чем отличаются частные циклы от максимальной петли?
- 5.19. Укажите основные параметры ферромагнетика, которые можно определить по максимальной петле гистерезиса. Какие свойства эти параметры определяют?
- 5.20. При каких условиях ферромагнетик можно характеризовать понятием магнитной проницаемости и почему?
- 5.21. Опишите и объясните общий характер зависимости $\mu(H)$ ферромагнетика.
- 5.22. Опишите качественно зависимость магнитных свойств ферромагнетика от температуры.
- 5.23. Что такое точка Кюри? Что происходит в этой точке? Что описывает закон Кюри – Веиса?
- 5.24. Почему на основе существования орбитальных магнитных моментов и ориентационного механизма намагничивания нельзя объяснить природу ферромагнетизма?

5.25. Какова в общих чертах квантовая природа ферромагнетизма? Что такое домены и каковы их общие особенности?

5.26. Как происходит процесс намагничивания с учетом доменной структуры?

5.27. Как на основе квантовой природы ферромагнетизма объяснить существование точки Кюри?

6. Ответы на контрольные вопросы

Магнитостатическое поле в вакууме

1.4. Нестационарно, так как $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

1.5. Это объясняется тем, что возмущение поля \vec{B} при смещении частицы достигает точки наблюдения не мгновенно, а спустя конечное время.

1.6. $\langle B_j \rangle = \frac{\mu_0 q_0 \langle \vec{v} \cdot \vec{r} \rangle}{4\pi r^3} = 0$, так как $\langle \vec{v} \rangle = 0$.

1.7. В этом случае $B = \frac{\mu_0 q_0 v}{4\pi r^2}$, $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2}$, поэтому

$\frac{B}{E} = \epsilon_0 \mu_0 v = \frac{v}{c^2} \ll 1$. В проводнике с током B резко возрастает из-за огромного количества носителей заряда, а E из-за электронейтральности проводника практически отсутствует.

1.11. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$.

Слововое действие магнитного поля в вакууме

2.4. $P = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi 2\pi R}$.

2.7.

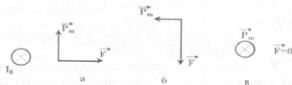


Рис. 6.1

2.8. $\Delta E_k = A = I \Delta \Phi = I B \ell \Delta r = 5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

2.9. Возрастает на $\Delta W = 2p_m B$.

Основные теоремы для магнитостатического поля в вакууме

3.1. $\Phi_c = \frac{\mu_0}{4\pi} 2Ib \ell n(1 + a/\ell)$.

3.4. $j = \frac{2\alpha}{\mu_0} = \text{const}$; $I = \frac{2\alpha\pi R^2}{\mu_0}$.

3.6. $\Phi = \mu_0 n I S$.

3.7. $\Psi = N\Phi = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I S$ (см. ответ 3.6).

Магнитное поле в веществе

4.6. $\oint_L (\vec{J} d\ell) = \int_S (\vec{j}_{\text{микро}} d\vec{S})$; $[\nabla \vec{J}] = \vec{j}_{\text{микро}}$.

4.7. $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$.

4.8. $\oint_L (\vec{H} d\ell) = \int_S (j d\vec{S})$; $[\nabla \vec{H}] = \vec{j}$.

4.9. Для однородных изотропных веществ в слабых магнитных полях.

4.11. $B_{1r} = B_{2r}$; $H_{1r} - H_{2r} = j_{\text{пов}} -$ следствия теоремы Гаусса для \vec{B} и теоремы о циркуляции для \vec{H} .

4.12. Выражение (4.29) справедливо для изотропных магнетиков. Выражение (4.34) справедливо для изотропных магнетиков при отсутствии поверхностных токов проводимости.

4.13. $\frac{B_{1r}}{\mu_1} - \frac{B_{2r}}{\mu_2} = \mu_0 j_{\text{мон}}$.

Магнитные свойства вещества

$$5.11. \quad I = \int dP_{\alpha} = \int_0^{\pi} A e \frac{p_{ma} B \cos \alpha}{kT} \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

$$\text{При } p_{ma} B / kT \ll 1, \quad \exp\left(\frac{p_{ma} B \cos \alpha}{kT}\right) = 1 + \frac{p_{ma} B}{kT} \cos \alpha.$$

Подставляя это выражение в нормировочный интеграл и интегрируя, получим $A = 1$.

$$5.12. \quad \chi_{\text{кмоль}} = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кмоль}.$$

$$5.14. \quad |\vec{p}_{ma}| < |p'_{mat}|.$$

$$5.15. \quad \chi_{\text{кмоль}} = -3,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{кмоль}.$$

Оглавление

1. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	3
1.1. Магнитное поле и его физическая природа.....	3
1.2. Магнитное поле движущегося заряда. Закон Био – Савара – Лапласа.....	5
1.3. Магнитные поля прямого и кругового проводников с током.....	10
2. СИЛОВОЕ ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ.....	14
2.1. Сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле. Сила Лоренца.....	14
2.2. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.....	17
2.3. Контур с током во внешнем однородном магнитном поле.....	20
2.4. Контур с током в неоднородном магнитном поле.....	26
2.5. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.....	28
3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАГНИТОСТАТИ- ЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ.....	33
3.1. Магнитный поток. Теорема Гаусса для поля \vec{B} в вакууме.....	33

3.2. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.....	36
3.3. Применение основных теорем к расчету магнитных полей.....	40
3.3.1. Магнитное поле соленоида.....	40
3.3.2. Магнитное поле тороида.....	46
4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.....	48
4.1. Описание магнитного поля в веществе.....	48
4.2. Намагничивание вещества.....	51
4.3. Напряженность магнитного поля.....	55
4.4. Поведение магнитного поля на границе раздела двух магнетиков.....	59
5. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА.....	66
5.1. Классификация магнетиков.....	66
5.2. Природа молекулярных токов. Магнитные моменты атомов и молекул.....	67
5.3. Магнитомеханическое и механомагнитное явления.....	69
5.4. Объяснение парамагнетизма.....	73
5.5. Объяснение диамагнетизма.....	76
5.6. Ферромагнетизм.....	81
5.6.1. Основная кривая намагниченности.....	81
5.6.2. Гистерезис. Петля гистерезиса.....	83
5.6.3. Магнитная проницаемость ферромагнетиков.....	86
5.6.4. Зависимость магнитных свойств ферромагнетиков от температуры.....	88
5.6.5. Природа ферромагнетиков и объяснение их свойств.....	89
6. ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	94
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	96

Уколов Александр Сергеевич

Лекции по общему курсу физики

Часть IV

Стационарное магнитное поле

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *Уколов А.С.*

Редактор *Маныч Э.И.*

Корректор *Проценко И.А.*

ЛР № 020565 от 23.06.1997 г.

Бумага офсетная

Печать офсетная

Подписано к печати *30.11.00*

Формат 60x84 1/16

Усл.п.л.- 6,0. Уч.-изд.л.- 5,7.

Заказ № *449*

Тираж 1500 экз.

“С”

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического
университета

ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44

Типография Таганрогского государственного радиотехнического
университета

ГСП 17А, Таганрог, 28, Знгельса, 1