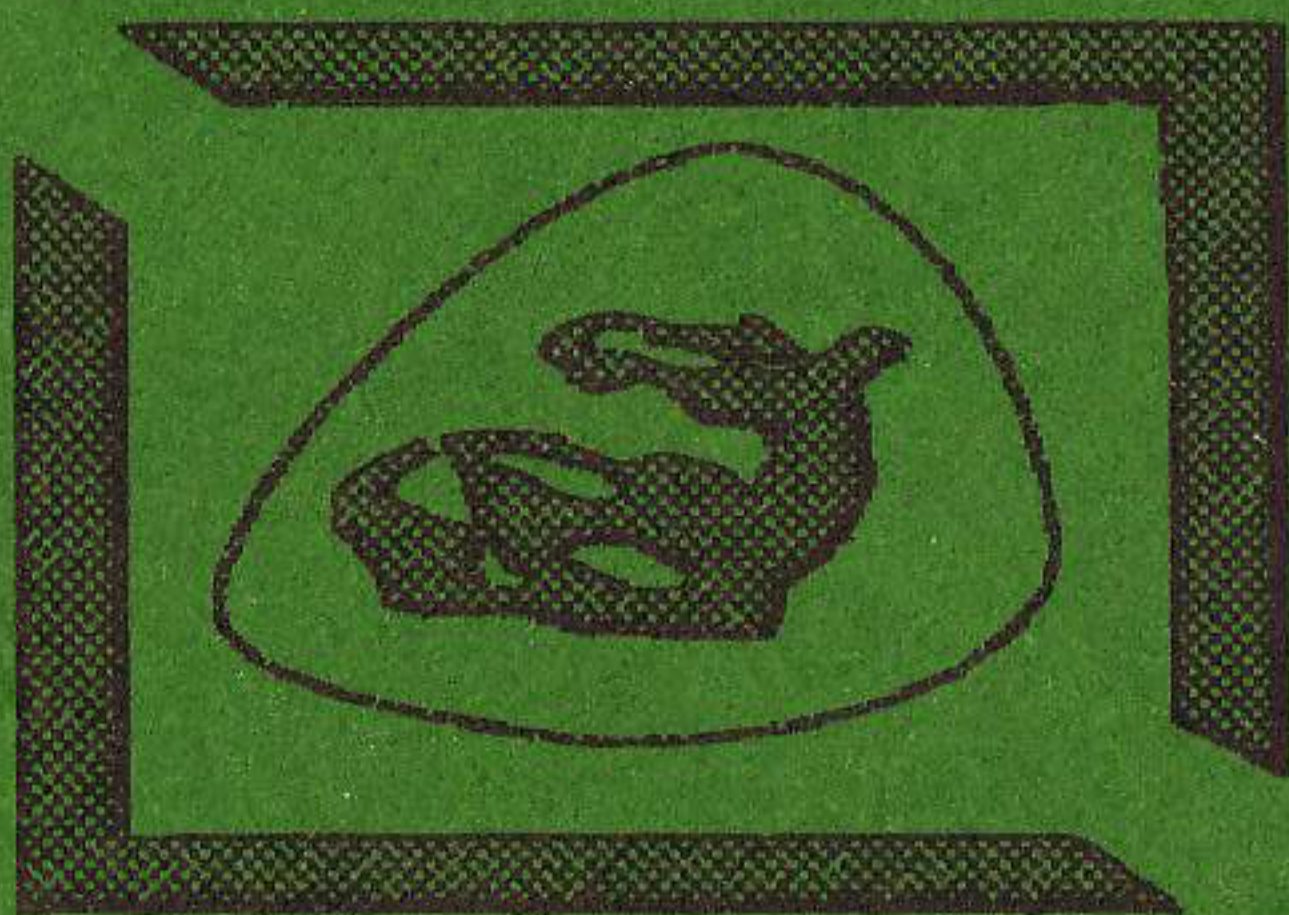


53(075)

№ 421-5

У 447



Таганрогский
Государственный
Радиотехнический
Университет

А.С.Уколов

ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Часть V

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ



Министерство образования
Российской Федерации

ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

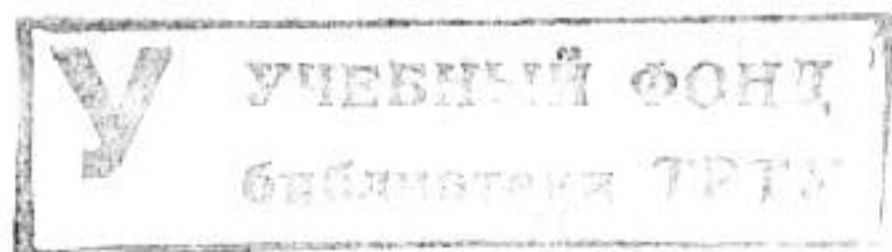
А.С. Уколов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Часть V

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

Учебное пособие



Таганрог 2001

УДК 53(075.8)+538.12(075.8)

Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч.V. Электромагнитное поле. Колебания и волны. Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. 129 с.

В пятой части учебного пособия дается описание явления электромагнитной индукции и основ теории Максвелла электромагнитного поля. Рассматриваются типичные свойства колебательных процессов различной физической природы. Излагаются основные характеристики механических и электромагнитных волн. Пособие соответствует рабочей программе курса общей физики для студентов технических специальностей ТРТУ, обучающихся по системе РИТМ.

Ил.35.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Таганрогского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты:

Кафедра прикладной электродинамики и компьютерного моделирования Ростовского-на-Дону государственного университета.

Ю.М. Вернигоров, д - р.техн. наук, профессор кафедры физики Донского государственного технического университета.

© Таганрогский государственный радиотехнический университет, 2001

© Уколов А.С., 2001

В части IV данного пособия было установлено, что в пространстве, где есть электрические токи, возникает магнитное поле. Существует и обратное явление: *при определенных условиях магнитное поле может вызывать электрические токи.* Честь открытия этого одного из фундаментальнейших явлений в электродинамике принадлежит М. Фарадею, который в 1831 г. установил, что *в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток.*

Это явление получило название *электромагнитной индукции*, а ток, возникающий в контуре, - *индукционного*. Появление индукционного тока в *замкнутом* контуре означает, что в контуре на носители заряда действуют какие-то сторонние силы неэлектростатического происхождения, т.е. возникает электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i . Удивительным оказался тот факт, что величина ЭДС индукции совершенно не зависит от способа, которым производится изменение магнитного потока, пронизывающего контур, а определяется только *скоростью изменения этого потока* $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$. При изменении знака $\frac{d\Phi}{dt}$ происходит изменение знака \mathcal{E}_i ,

т.е. изменение направления действия ЭДС.

В опытах Фарадея возникновение электродвижущей силы индукции в соленоиде (проволочной катушке) регистрировалось с помощью подключенного к нему гальванометра, который показывал наличие тока. Изменение магнитного потока, пронизывающего сечение соленоида достигалось тремя способами: 1) относительным движением одного из полюсов постоянного магнита вдоль оси неподвижного соленоида; 2) в другом случае вместо постоянного магнита использовалась еще одна катушка с током; 3) в третьем способе обе катушки были неподвижны и вставлены друг в друга, а изменение магнитного потока достигалось за счет изменения тока в одной из них.

В каждом из способов величина *индукционного* тока, регистрируемого гальванометром, а значит и *ЭДС индукции* оказывалась *пропорциональной скорости изменения магнитного потока:*

$$\mathcal{E}_i = -\kappa \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.1)$$

где κ - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц, а знак «минус» обусловлен направлением действия ЭДС (направлением индукционного тока).

В системе СИ $\kappa = 1$, поэтому формула (1.1) имеет вид

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.2)$$

Равенства (1.1) и (1.2) называются *законом Фарадея для электродвижущей силы индукции*.

Связь между направлением индукционного тока в замкнутом контуре и знаком $\frac{d\Phi}{dt}$ установлена Ленцем и носит название

правила Ленца:

Индукционный ток всегда имеет такое направление, что своим магнитным полем препятствует причине, вызывающей этот ток.

По сути, правило Ленца является проявлением *общего свойства* любой физической системы: свойства «инертности».

Выводы

При любом изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в нем возникает ЭДС индукции, величина которой прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока, а направление действия ЭДС определяется правилом Ленца.

1.2. Причины возникновения ЭДС индукции

Причины возникновения электродвижущей силы в контуре можно условно разбить на два типа:

- **формальные (кажущиеся)**, обусловленные способами, с помощью которых можно изменять магнитный поток, пронизывающий контур;

- **истинные**, которые лежат в основе физических механизмов возникновения ЭДС индукции.

Рассмотрим вначале формальные причины. Чтобы не усложнять рассуждения, будем считать, что плоский контур с площадью S находится в однородном магнитном поле \vec{B} . В этом случае магнитный поток, пронизывающий контур, равен

$$\Phi = (\vec{B}\vec{S}) = BS \cos \alpha,$$

где α - угол между нормалью к плоскости контура \vec{n} и вектором \vec{B} . Из этого равенства видно, что магнитный поток может изменяться тремя способами: за счет изменения самого магнитного поля $B = B(t)$, площади $S = S(t)$ контура или его ориентации $\alpha = \alpha(t)$ относительно направления \vec{B} . Если действуют одновременно три фактора, т.е. $B = B(t)$, $S = S(t)$ и $\alpha = \alpha(t)$, то на основании (1.2) ЭДС индукции можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d(BS \cos \alpha)}{dt} = -\frac{dB}{dt} S \cos \alpha - B \frac{dS}{dt} \cos \alpha + BS \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1.3)$$

Легко видеть, что два последних слагаемых в правой части равенства (1.3), связанные с изменением площади, охватываемой контуром $\left(\frac{dS}{dt}\right)$, и его ориентации $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ в магнитном поле, обусловлены движением либо всего контура, либо отдельных его частей в магнитном поле. Первое слагаемое в правой части отлично от нуля, если контур находится в изменяющемся (переменном) во времени магнитном поле.

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать два главных вопроса этого пункта.

1) Какова физическая причина возникновения ЭДС индукции при движении проводника в постоянном во времени магнитном поле?

2) Какова физическая причина возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре при изменении самого магнитного поля?

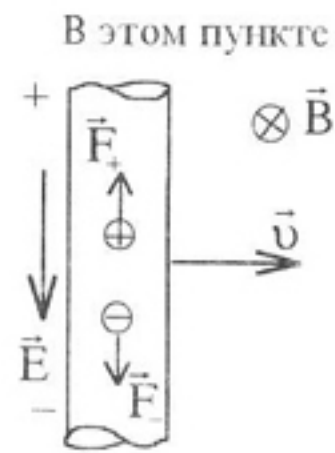


Рис.1.1

В этом пункте мы дадим ответ на первый вопрос, механизм же возникновения ЭДС индукции в случае переменного магнитного поля будет рассмотрен в пункте 2.1 следующего раздела.

Рассмотрим простой пример, когда отрезок прямолинейного проводника движется с постоянной скоростью \vec{v} в однородном магнитном поле \vec{B} (рис.1.1). Поскольку вместе с проводником относительно магнитного поля перемещаются с той же скоростью \vec{v} и заряженные частицы, входящие в

состав проводника, то на каждую из этих частиц действует магнитная сила (\vec{F}_+ и \vec{F}_- на рис.1.1)

$$\vec{F}_M = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1.4)$$

Свободные носители под действием этой силы смещаются вдоль проводника, создавая на его концах избыточные заряды. Внутри проводника возникает электрическое поле \vec{E} , препятствующее дальнейшему смещению свободных носителей (рис.1.1).

$$\vec{F}_c = q\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{F}_M.$$

Перераспределение зарядов прекращается при наступлении равновесия, когда

$$\vec{F}_M + \vec{F}_c = q[\vec{v} \times \vec{B}] + q\vec{E} = 0$$

откуда

$$\vec{E} = -[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1.5)$$

Равновесие не наступает, если перемещающийся проводник входит в состав замкнутого проводящего контура L (рис.1.2). В этом случае на концах проводника 12 избыточные заряды не скапливаются, следовательно электрическое поле \vec{E} (1.5) не образуется. Поэтому упорядоченное движение свободных носителей под действием силы (1.4) будет продолжаться до тех пор, пока сохраняется движение проводника. Силе (1.4) можно сопоставить поле, напряженность которого \vec{E}^* определим обычным образом:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}_M}{q} = [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1.6)$$

Поскольку это поле неэлектростатическое, то циркуляция его по контуру L равна электродвижущей силе, действующей в этом контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{E}^* d\vec{\ell}) = \int_1^2 ([\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{\ell}). \quad (1.7)$$

В (1.7) учтено равенство (1.6) и тот факт, что поле \vec{E}^* отлично от нуля только в движущемся проводнике 12. При вычислении интеграла (1.7) направление обхода контура L выберем по часовой стрелке. В этом случае положительная нормаль \vec{n} к плоскости контура параллельна \vec{B} (рис.1.2). Так как \vec{B} и \vec{v} постоянны, то (1.7) примет вид

$$\mathcal{E}_i = \left([\vec{v} \times \vec{B}] \int_1^2 d\vec{\ell} \right) = ([\vec{v} \times \vec{B}] \vec{\ell}), \quad (1.8)$$

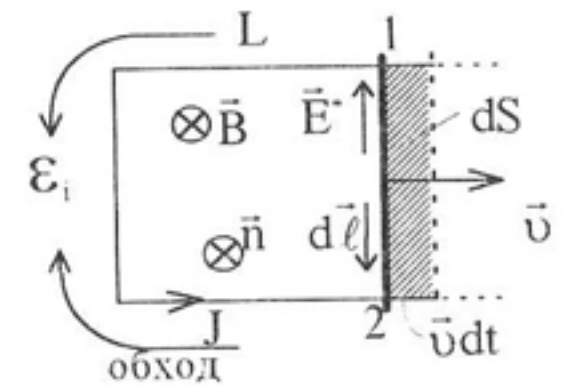


Рис.1.2

где $\vec{\ell}$ - вектор длины проводника l_2 . Из рис.1.2 видно, что $[\vec{\ell} \times \vec{v} dt] = [\vec{\ell} \times \vec{v}] dt = -dS\vec{n}$. Откуда $[\vec{\ell} \times \vec{v}] = -\vec{n} \frac{dS}{dt}$. Произведем в (1.8) циклическую перестановку множителей и используем последнее равенство, после чего получим

$$\mathcal{E}_i = \left(\vec{B} [\vec{\ell} \times \vec{v}] \right) = - \frac{(\vec{B} \vec{n} dS)}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.9)$$

где $d\Phi = (\vec{B} \vec{n} dS)$ - приращение магнитного потока сквозь контур за время dt при движении проводника l_2 . Рассмотренный случай приводит к выражению для ЭДС индукции (1.9), в точности совпадающему с законом Фарадея (1.2).

Кроме того, отметим, что выбор направления положительной нормали к плоскости контура L не влияет на результат (1.9).

В заключение этого пункта заметим, что действие ЭДС индукции (1.9) в контуре L (рис.1.2) приводит к появлению индукционного тока J , текущего против часовой стрелки. При этом свободные носители заряда, двигаясь упорядоченно со средней скоростью \vec{u} вдоль проводника l_2 , испытывают дополнительное действие со стороны магнитного поля $\vec{F}_\perp = q[\vec{u} \times \vec{B}]$, которое направлено противоположно движению проводника со скоростью \vec{v} , что в итоге приводит к его торможению. Поэтому для поддержания движения проводника с постоянной скоростью \vec{v} необходима внешняя сила $\vec{F}_{\text{внеш}} \uparrow \downarrow \vec{F}_\perp$, компенсирующая тормозящее действие сил \vec{F}_\perp на свободные носители заряда.

Выводы

ЭДС индукции возникает при движении проводника в магнитном поле или при изменении самого магнитного поля. В первом случае причиной возникновения ЭДС является действие магнитных сил на свободные носители заряда в проводнике.

Контрольные вопросы

- 1.1. Перечислите формальные причины возникновения явления электромагнитной индукции.
- 1.2. Какова физическая причина возникновения ЭДС индукции при движении проводника в магнитном поле?
- 1.3. Покажите, что соотношение знаков $d\Phi$ и \mathcal{E}_i в (1.9) и истинное направление действия ЭДС индукции остается неизменным при изменении направления \vec{n} (рис.1.2) на противоположное.
- 1.4. Докажите, что полная магнитная сила, действующая на свободный носитель заряда в проводнике l_2 (рис.1.2), работы не совершает.

1.3. Явления самоиндукции и взаимной индукции

Явления самоиндукции и взаимной индукции представляют собой важные частные случаи явления электромагнитной индукции, широко используемые в практике. Не касаясь пока истинной природы этих явлений, подчеркнем, что явление электромагнитной индукции наблюдается всегда, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур.

Одним из частных случаев может быть изменение *собственного магнитного потока*, созданного самим изменяющимся током в контуре. Действительно, контур с током J в нем создает в окружающем пространстве магнитное поле \vec{B} , которое частично пронизывает площадь, ограниченную самим контуром. Если ток в контуре по какой-либо причине изменяется, то собственный магнитный поток будет также изменяться, вызывая в контуре ЭДС и дополнительный индукционный ток J_i . Это явление называется *самоиндукцией*.

Между током J в контуре и собственным магнитным потоком, пронизывающим контур, существует простая связь

$$\Phi_c = LJ, \quad (1.10)$$

где L - коэффициент пропорциональности, который называется *индуктивностью контура* или *коэффициентом самоиндукции*. Единицей индуктивности L в системе СИ служит *генри* (Гн). Это индуктивность такого контура, в котором при силе тока в 1 А возникает собственный магнитный поток в 1 Вб.

Справедливость связи (1.10) легко установить. Действительно, собственный магнитный поток (рис.1.3) может быть вычислен на основе общей формулы

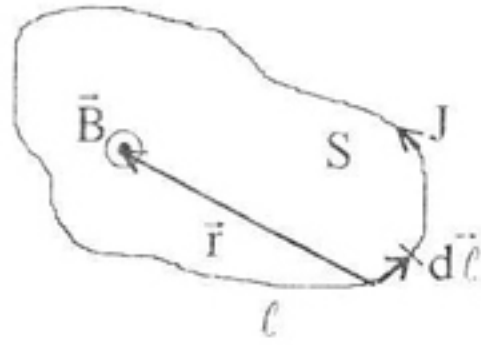


Рис.1.3

$$\Phi_c = \int_S (\vec{B} d\vec{S}), \quad (1.11)$$

где \vec{B} - индукция магнитного поля, созданного контуром с током J в точках какой-либо поверхности S , ограниченной этим контуром. Индукция \vec{B} в каждой точке этой поверхности определяется на основе за-

кона Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{B} = \oint_{\ell} \frac{\mu\mu_0 J [d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (1.12)$$

Объединяя интегралы (1.11) и (1.12) и вынося за их пределы постоянные и не зависящие от координат величины, получим

$$\Phi_c = J \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left(\left(\oint_{\ell} \frac{\mu [d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{r^3} \right) d\vec{S} \right) = JL,$$

где выражение

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left(\left(\oint_{\ell} \frac{\mu [d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{r^3} \right) d\vec{S} \right) \quad (1.13)$$

и определяет индуктивность контура.

Значение интеграла (1.13) зависит существенным образом от формы, размеров контура, а также от магнитных свойств μ среды, в которой этот контур находится. В случае изотропной нелинейной среды ее магнитная проницаемость является сложной

функцией силы тока в контуре: $\mu = \mu(H) = \mu(H(J))$. Поэтому даже для неподвижного контура его индуктивность зависит от силы тока в нем:

$$L = L(J).$$

Таким образом, в более общей форме связь (1.10) можно записать в виде

$$\Phi_c = L(J)J. \quad (1.14)$$

Если по какой-либо причине ток в контуре изменяется, т.е. $J = J(t)$, то в контуре возникает ЭДС самоиндукции (1.2)

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d(LJ)}{dt} = -\frac{dL}{dJ} \frac{dJ}{dt} J - L(J) \frac{dJ}{dt} = -\left(\frac{dL}{dJ} J + L(J) \right) \frac{dJ}{dt}, \quad (1.15)$$

где учтено равенство (1.14). Только в случае неизменяющегося контура, находящегося в линейной изотропной среде ($\mu = \text{const}$), его индуктивность постоянна ($L = \text{const}$) и формула (1.15) принимает более простой вид

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (1.16)$$

Из равенств (1.15) и (1.16) следует, что определять индуктивность как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей при этом ЭДС самоиндукции можно только при условии $L = \text{const}$.

Для примера определим индуктивность длинного соленоида. Если его длина ℓ значительно больше его диаметра D ($\ell \gg D$), то поле внутри такого соленоида практически однородно ($B = \text{const}$) (см.п.3.3.1 ч.IV данного пособия)

$$B = \mu\mu_0 nJ = \mu\mu_0 \frac{N}{\ell} J,$$

где $\mu = \text{const}$, $n = \frac{N}{\ell}$ - число витков на единицу длины соленоида, N - полное число витков. Магнитный поток через один виток равен $\Phi_1 = BS$, а полный поток через все N витков

$$\Phi_c = N\Phi_1 = NBS = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell} SJ = \mu\mu_0 n^2 \ell SJ = \mu\mu_0 n^2 VJ, \quad (1.17)$$

где S - площадь поперечного сечения соленоида, а $V = \ell S$ - его объем. Сравнивая выражения (1.17) и (1.10), получим для индуктивности длинного соленоида формулы

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell} S = \mu\mu_0 n^2 \ell S = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (1.18)$$

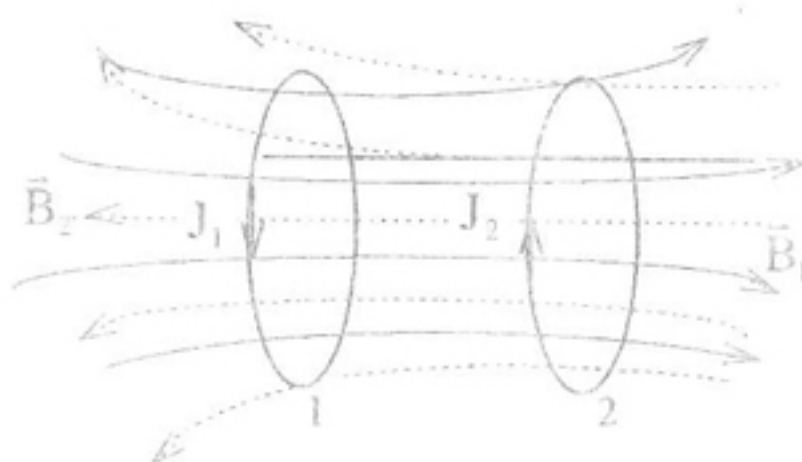


Рис. 1.4

ное поле \vec{B}_1 тока J_1 в контуре 1 создает через контур 2 магнитный поток

$$\Phi_2 = L_{21}J_1, \quad (1.19)$$

а магнитное поле \vec{B}_2 тока J_2 в контуре 2 создает через контур 1 магнитный поток

$$\Phi_1 = L_{12}J_2. \quad (1.20)$$

Проводя рассуждения, аналогичные при получении формул (1.12) и (1.13), можно записать равенства

$$\Phi_2 = J_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \left(\oint_{\ell_1} \frac{\mu [d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3} \right) d\vec{S}_2, \quad (1.21)$$

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \left(\oint_{\ell_1} \frac{\mu [d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3} \right) d\vec{S}_2, \quad (1.22)$$

где $d\vec{\ell}_1$ - элемент контура 1, \vec{r}_{12} - радиус-вектор, проведенный от элемента $d\vec{\ell}_1$ в точку на поверхности S_2 , ограниченной контуром 2. По аналогии записываются выражения для Φ_1 и L_{12} .

Коэффициенты пропорциональности L_{21} и L_{12} в формулах (1.19) и (1.20) называются *взаимной индуктивностью связанных контуров*. Их величины существенно зависят от формы, размеров, взаимного расположения контуров и магнитных свойств среды, в которой они находятся. Отметим, что формулы (1.21) и (1.22) можно использовать при соответствующих расчетах для *изотропных магнетиков*. Кроме того, в случае линейных магнетиков ($\mu = \text{const}$) коэффициенты взаимной индуктивности всегда равны друг другу

$$L_{12} = L_{21}. \quad (1.23)$$

Если $L_{12} = L_{21} = \text{const}$, то при изменении тока J_1 в первом контуре возникает ЭДС индукции во втором контуре, равная

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{21} \frac{dJ_1}{dt}, \quad (1.24)$$

а при изменении тока J_2 во втором контуре возникает ЭДС индукции в первом контуре, равная

$$\mathcal{E}_{11} = -L_{12} \frac{dJ_2}{dt}. \quad (1.25)$$

Явление возникновения ЭДС индукции в одном из связанных контуров при изменении тока в другом называется взаимной индукцией.

Проще всего рассчитывать взаимную индуктивность двух обмоток на тонком тороидальном сердечнике с постоянной магнитной проницаемостью ($\mu = \text{const}$). Если по первой обмотке течет ток J_1 , то индукция магнитного поля, создаваемая этим током в сердечнике, равна

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1}{\ell} J_1,$$

где ℓ - длина средней линии сердечника. (см. формулу (3.24) ч.IV пособия). Полный поток, пронизывающий при этом вторую обмотку, определяется равенством

$$\Phi_2 = N_2 B_1 S = \mu\mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{\ell} J_1. \quad (1.26)$$

Сравнивая (1.26) с (1.19), получим

$$L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S. \quad (1.27)$$

Аналогичные рассуждения приводят для L_{12} к такому же выражению

$$L_{12} = \mu\mu_0 \frac{N_2 N_1}{\ell} S. \quad (1.28)$$

В заключение отметим, что явление взаимной индукции широко используется в *трансформаторах* для преобразования токов и напряжений.

Выводы

Самоиндукция и взаимная индукция - это частные случаи электромагнитной индукции. Самоиндукция - это явление, обусловленное возникновением ЭДС в контуре при изменении тока в нем. Взаимная индукция - это возникновение ЭДС в одном из связанных контуров при изменении тока в другом. Индуктивность и взаимная индуктивность контуров сильно зависят от их формы, размеров, взаимного расположения и магнитных свойств среды, в которой контуры находятся.

Контрольные вопросы

- 1.5. Дайте обоснование равенству (1.10).
- 1.6. В чем заключается сущность явления самоиндукции?
- 1.7. Запишите выражения для Φ_1 и L_{12} по аналогии с (1.21) и (1.22).
- 1.8. Какова сущность явления взаимной индукции?
- 1.9. При каких условиях коэффициенты взаимной индукции L_{12} и L_{21} двух связанных контуров могут быть равны друг другу?

1.4. Токи при замыкании и размыкании цепи

Токи самоиндукции в соответствии с правилом Ленца всегда имеют такое направление, что препятствуют изменениям основного тока. При включении источника ЭДС в цепь токи самоиндукции направлены противоположно току, создаваемому источником, а при отключении от цепи имеют такое же направление, что и основной ток. Явление самоиндукции приводит не к мгновенному нарастанию или исчезновению основного тока, а к постепенному его изменению.

Опишем вначале процессы, происходящие при размыкании цепи. Рассмотрим простую цепь, содержащую постоянную индуктивность $L = \text{const}$ и сопротивление R , к которой подключен источник ЭДС \mathcal{E} с нулевым внутренним сопротивлением (рис.1.5). Когда ключ K находится в положении «1», по цепи течет постоянный ток

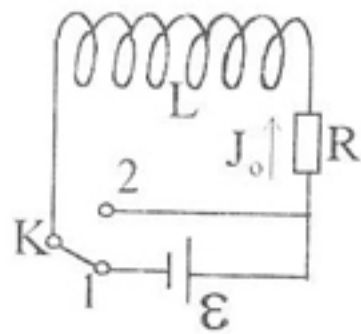


Рис.1.5

$$J_0 = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (1.29)$$

Если в начальный момент времени ($t = 0$) ключ «К» перебросят в положение «2», то за счет джоулевых потерь энергии в сопротивлении R сила тока в цепи начнет уменьшаться, а в индуктивности L возникнет ЭДС самоиндукции, препятствующая этому

уменьшению. На основании закона Ома для произвольного момента времени t можно записать равенство

$$JR = \varepsilon_s = -L \frac{dJ}{dt}, \quad (1.30)$$

из которого после разделения переменных получим

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{R}{L} dt.$$

Последнее выражение проинтегрируем

$$\int_{J_0}^J \frac{dJ}{J} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt,$$

после чего будем иметь

$$\ln \frac{J}{J_0} = -\frac{R}{L} dt.$$

Потенцируя это равенство и учитывая формулу (1.29), окончательно получим

$$J = J_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right). \quad (1.31)$$

Таким образом, при отключении источника ЭДС ток в цепи убывает с течением времени по экспоненте. Введем обозначение

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (1.32)$$

Постоянная величина τ , имеющая размерность времени, как видно из (1.30):

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{\tau} J,$$

значительно влияет на скорость убывания тока в цепи и называется *постоянной времени* цепи или *временем релаксации*. Используя (1.32), закон убывания тока можно записать в форме

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.33)$$

Из (1.33) видно, что постоянная времени τ равна промежутку времени, в течение которого ток в цепи убывает в e раз.

В случае замыкания цепи ток нарастает постепенно. Поэтому, кроме ЭДС источника, действует ЭДС самоиндукции:

$$JR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L \frac{dJ}{dt}.$$

Введением переменной $U = RJ - \varepsilon$ последнее равенство легко приводится к виду

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{\tau},$$

где $\tau = L/R$ (1.32). Интегрирование и последующее потенцирование дает формулу

$$U = Ce^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.34)$$

Так как при $t = 0$, $J = 0$, $U = -\mathcal{E}$, то постоянная интегрирования C принимает значение $C = -\mathcal{E}$. Произведя в (1.34) обратный переход от переменной U к силе тока J , окончательно получим

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = J_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad (1.35)$$

где $J_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (см. (1.29)) - сила установившегося в цепи тока. Из (1.35) видно, что скорость установления тока определяется той же постоянной времени τ , что и при размыкании цепи. При этом ток

нарастает от значения $J = 0$ в момент времени $t = 0$, асимптотически приближаясь к значению $J_0 = \mathcal{E} / R$ при $t \rightarrow \infty$. Примерный вид зависимостей силы тока от времени изображен на рис. 1.6, где кривая «1» соответствует размыканию цепи, а кривая «2» ее замыканию.

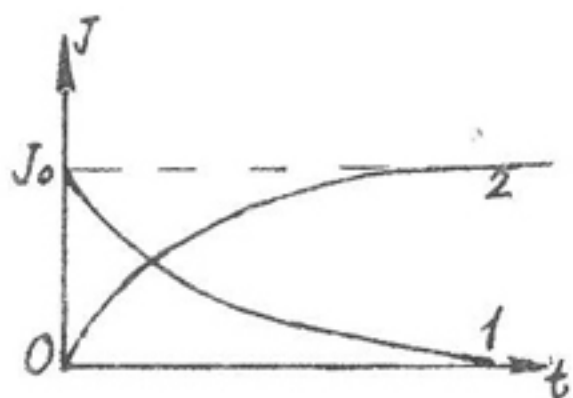


Рис.1.6

Выводы

Процессы установления тока при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность, происходят не мгновенно из-за явления самоиндукции. Скорость установления тока определяется величиной постоянной времени цепи.

Контрольные вопросы

1.10. Изобразите примерный вид зависимости силы тока от времени при периодическом переключении ключа «К» (рис.1.5) из положения «1» в положение «2» и обратно.

1.11. Проанализируйте, как будет изменяться эта зависимость при изменении периода T_0 переключения ключа «К». Рассмотрите случаи $T_0 > \tau$ и $T_0 \ll \tau$.

1.5. Энергия проводника с током. Энергия магнитного поля

Рассмотрим снова электрическую цепь, изображенную на рис.1.5., когда ключ K находится в положении «1» достаточно длительное время. В этом случае в цепи будет течь установившийся постоянный ток (1.29), за время Δt в сопротивлении R при этом выделяется джоулево тепло

$$Q = J_0^2 R \Delta t = J_0 \mathcal{E} \Delta t,$$

где учтено (1.29). Правая часть этого равенства выражает работу источника ЭДС за это же время Δt .

Таким образом, когда по цепи течет постоянный ток, вся работа источника ЭДС идет на выделение джоулева тепла, поэтому на поддержание магнитного поля проводников с постоянным током не требуется никакой дополнительной работы.

Иная ситуация наблюдается, когда ток в цепи изменяется с течением времени. Например, при выключении тока в цепи, содержащей постоянную индуктивность, действует ЭДС самоиндукции, которая за время dt совершает работу

$$\delta A = \mathcal{E}_s J dt = -L \frac{dJ}{dt} J dt = -L J dJ, \quad (1.36)$$

где учтено (1.16). Интегрируя это выражение от J_0 до 0, получим полную работу, которая совершается при исчезновении тока, а значит и исчезновении магнитного поля

$$A = \int \delta A = -L \int_{J_0}^0 J dJ = \frac{L J_0^2}{2}. \quad (1.37)$$

Как уже указывалось, эта работа тратится на выделение джоулева тепла в проводниках цепи. Поскольку единственным изменением в рассмотренной системе, является исчезновение тока и

связанного с ним магнитного поля, то следует заключить, что проводник с током J_0 обладает энергией

$$W = \frac{LJ_0^2}{2}. \quad (1.38)$$

Аналогичное выражение получается для работы источника ЭДС, совершаемой им против ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s , которая идет на создание установившегося значения тока J_0 и связанного с ним магнитного поля. Здесь следует отметить, что величина работы (1.38), которую источник ЭДС совершает на создание тока J_0 и его магнитного поля, является *только частью полной работы источника ЭДС за время установления тока*. Кроме указанной работы, источник ЭДС совершает работу, связанную с затратами энергии на выделение джоулева тепла за время установления тока.

В случае длинного соленоида ($\mu = \text{const}$) справедливы формулы $L = \mu\mu_0 n^2 V$ и $H = nJ$, с помощью которых выражению (1.38) можно придать вид

$$W = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 V \left(\frac{H}{n} \right)^2 = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V. \quad (1.39)$$

Поскольку магнитное поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено внутри его объема, и однородно, то разумно говорить об энергии, приходящейся на единицу объема $\omega = W/V$, т.е. об объемной плотности энергии магнитного поля

$$\omega = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (1.40)$$

(Сравните это выражение с $\omega = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$ для случая электрического поля). Используя связь $B = \mu\mu_0 H$, равенство (1.40) можно записать в другой форме

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{HB}{2}. \quad (1.41)$$

Отметим здесь, что последнее выражение представимо в векторном виде

$$\omega = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2}. \quad (1.42)$$

Формулы (1.39)-(1.42) получены для *однородного магнитного поля в отсутствие ферромагнетиков* ($\mu = \text{const}$). Однако в общей теории электромагнетизма показывается, что равенство (1.42) справедливо и для неоднородного поля. В этом случае выражение

$$dW = \omega dV = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2} dV \quad (1.43)$$

дает значение энергии магнитного поля, заключенной в элементарном объеме dV в окрестности данной точки пространства. Полную энергию можно определить, проинтегрировав (1.43) по всему объему, в котором локализовано магнитное поле:

$$W = \int_V \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2} dV. \quad (1.44)$$

Еще раз напомним, что формулы (1.39) - (1.44) справедливы для тех магнетиков, для которых *зависимость \vec{B} от \vec{H} линейна*.

В заключение этого пункта следует указать, что пока мы имеем дело с *постоянными* токами и окружающими их *постоянными* магнитными полями, нельзя однозначно ответить на вопрос: где локализована энергия, т.е. является ли носителем энергии магнитное поле или собственно проводник с током? Определенный ответ можно дать только при изучении переменных магнитных полей или электромагнитных волн, которые могут существовать самостоятельно в отрыве от породивших эти волны источников и при этом переносить определенную энергию.

С подобной ситуацией мы уже встречались при обсуждении вопроса об энергии электростатического поля.

Выводы

Проводник с током и связанное с ним магнитное поле обладают определенной энергией. Поэтому для изменения тока и магнитного поля необходимо совершить дополнительную работу.

Контрольные вопросы

- 1.12. Запишите и проанализируйте выражение для энергии проводника с током.
- 1.13. Запишите и проанализируйте выражения для объемной плотности энергии магнитного поля. При каких условиях они справедливы? Укажите, в чем заключается различие в применимости формул (1.41) и (1.42)?
- 1.14. Запишите и проанализируйте выражение для общей энергии магнитного поля двух контуров с током. Является ли эта энергия аддитивной величиной?

1.6. Работа по перемагничиванию ферромагнетика

На основании результатов, полученных в предыдущем пункте, можно теперь обосновать утверждение, высказанное в п.5.6.2. части IV данного пособия:

Площадь петли гистерезиса ферромагнетика численно равна работе по циклическому перемагничиванию единицы объема ферромагнетика.

Анализ формул (1.37)-(1.40) свидетельствует о том, что в отсутствие ферромагнетиков для изменения энергии магнитного поля (в расчете на единицу объема) должна совершаться работа

$$\delta A' = d\omega = d\left(\frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\right) = Hd(\mu\mu_0 H) = HdB, \quad (1.45)$$

где учтено, что $\mu = \text{const}$.

При циклическом изменении параметров магнитного поля, при котором поле возвращается в исходное состояние, не происходит результирующего изменения его объемной плотности энергии. Действительно,

$$\Delta\omega = \oint d\omega = \oint HdB = 0. \quad (1.46)$$

Этот результат обусловлен тем, что энергия магнитного поля является функцией состояния, приращение которой при круговом процессе равно нулю.

При наличии ферромагнитной среды ситуация существенно образом изменяется. Из-за наличия гистерезиса (рис. 1.7) зависимость $B(H)$ является существенно неоднозначной.

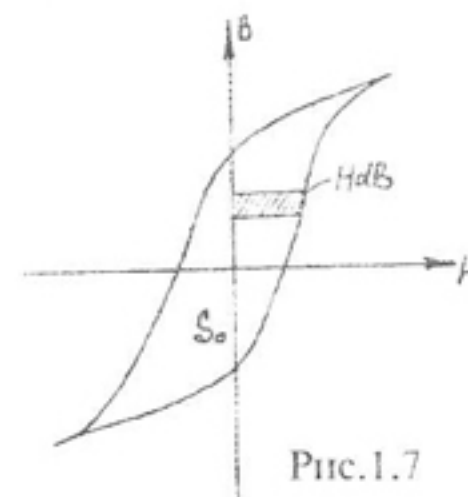


Рис.1.7

Поэтому значение интеграла $\oint HdB$, вычисленное вдоль петли гистерезиса, не равно нулю, а численно равно площади, охватываемой петлей гистерезиса S_0 . Таким образом, равенство $\delta A' = HdB$ при наличии ферромагнетиков не может быть отождествлено с приращением объемной плотности энергии магнитного поля: $\delta A' \neq d\omega$. После окончания цикла перемагничивания параметры магнитного поля B и H , а значит и его энергия, принимают исходные значения. Поэтому работа

$$A' = \oint \delta A' = \oint HdB = S_0. \quad (1.47)$$

Выводы

Площадь петли гистерезиса численно равна работе, затрачиваемой на циклическое перемагничивание единицы объема ферромагнетика, и не связана с приращением объемной плотности энергии магнитного поля.

2. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла

2.1. Вихревое электрическое поле

В пункте 1.2. предыдущего раздела было указано, что одной из формальных причин возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре является наличие изменяющегося магнитного поля $\vec{B} = \vec{B}(t)$.

Обсудим вопрос об истинной физической причине возникновения ЭДС индукции в этом случае. Наличие ЭДС свидетельствует о том, что вдоль проводника на свободные носители заряда действуют некоторые *сторонние силы неэлектростатического происхождения*.

Поскольку ЭДС индукции совершенно не зависит от природы и свойств проводника, то эти сторонние силы *не могут быть обусловлены изменением свойств проводника в магнитном поле*. Кроме того, эти *силы не являются магнитными*, которые не могут совершать работы над заряженными частицами. Остается заключить, что *на заряженные частицы в контуре действует электрическое поле*, которое и вызывает в замкнутом контуре индукционный ток.

Однако это *электрическое поле не может быть электростатическим*, так как известно, что работа электростатического поля на любом замкнутом участке равна нулю. Подобные рассуждения и анализ явления электромагнитной индукции легли в основу одной из гипотез Максвелла в созданной им теории электромагнитного поля.

Изменяющееся со временем магнитное поле порождает в окружающем пространстве электрическое поле.

Главной особенностью этого поля является то, что оно неэлектростатическое, так как может совершать *отличную от нуля работу* по перемещению заряженных частиц в замкнутом проводящем контуре. Возникающее при изменении магнитного поля электрическое поле имеет *замкнутые силовые линии*, поэтому является *вихревым*.

Отметим здесь, что замкнутый контур, помещенный в такое вихревое электрическое поле, играет роль своеобразного *прибора*, с помощью которого по наличию в нем индукционного тока можно обнаружить это вихревое поле. Другими словами, замкнутый проводящий контур выполняет такую же функцию по отношению к вихревому электрическому полю, как и пробный заряд по отношению к электростатическому полю.

Опишем теперь свойства вихревого электрического поля с помощью уравнений. Обозначим для этого напряженность этого поля \vec{E}_B , где индекс B используется для того, чтобы подчеркнуть, что это поле порождается магнитным полем. Из общего определения для ЭДС имеем

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\ell} (\vec{E}_B d\vec{\ell}). \quad (2.1)$$

С другой стороны, на основании закона Фарадея для ЭДС индукции запишем равенство:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} d\vec{S}). \quad (2.2)$$

Операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности S , ограниченной *неподвижным* контуром, в равенстве (2.2) можно поменять местами, учтя, что в общем случае $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$.

$$\mathcal{E}_i = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right). \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.1) и (2.3), получим

$$\oint_{\ell} (\vec{E}_B d\vec{\ell}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right), \quad (2.4)$$

где S - некоторая поверхность, ограниченная контуром ℓ . Равенство (2.4) фактически представляет собой математическую запись теоремы о циркуляции для напряженности вихревого электрического поля. Из (2.4) видно, что поле \vec{E}_B не является потенциальным, так как

$$\oint_{\ell} (\vec{E}_B d\vec{\ell}) \neq 0.$$

Используя интегральную теорему Стокса, (2.4) перепишем в виде

$$\int_S ([\nabla \times \vec{E}_B] d\vec{S}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right).$$

Поскольку поверхность S , ограниченная контуром ℓ , может быть любой, то последнее равенство выполняется при условии, если

$$[\nabla \times \vec{E}_B] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

что представляет собой дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора \vec{E}_B .

Поскольку поле \vec{E}_B вихревое, т.е. не имеет источников, подобных зарядам, то математическая запись теоремы Гаусса выглядит так же, как и для поля \vec{B} :

$$\oint_S (\vec{E}_B d\vec{S}) = 0 \quad (2.6)$$

или

$$(\nabla \vec{E}_B) = 0. \quad (2.7)$$

Выводы

Физической причиной возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре является наличие вихревого электрического поля, которое порождается изменяющимся магнитным полем. Вихревое электрическое поле непотенциально и не имеет источников, подобных электрическим зарядам.

Контрольные вопросы

2.1. Приведите рассуждения в пользу существования вихревого электрического поля.

2.2. Сформулируйте гипотезу Максвелла о существовании вихревого электрического поля.

2.3. Каковы основные свойства вихревого электрического поля? Опишите их в математической форме.

2.2. Бетатрон

Рассмотрим одно из важных применений вихревого электрического поля для практических целей. С помощью этого поля можно эффективно ускорять электроны (бета-частицы). Ускоритель, в котором электроны разгоняются до субсветовых скоростей вихревым электрическим полем, называется **бетатроном**. Принципиальная схема устройства бетатрона изображена на рис.2.1. Бетатрон представляет собой вакуумную камеру тороидальной формы, помещенную между полюсами электромагнита, которые имеют вид усеченного конуса для создания магнитного поля определенной конфигурации. Магнитное поле в зазоре мощного электромагнита NS симметрично относительно оси OO' и плоскости AA' в середине зазора. Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой порядка сотен герц. Изменяющееся со временем магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле, линии напряженности которого направлены вдоль оси ускорительной камеры К. В моменты времени, когда $B \cong 0$, в камеру попадает пучок электронов, которые подхватываются вихревым электрическим полем.

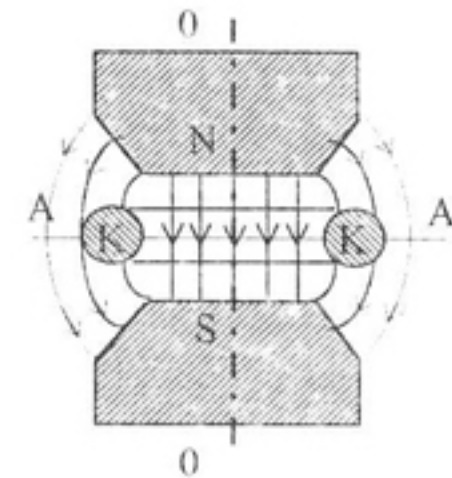


Рис.2.1

В течение первой четверти периода, когда магнитное поле нарастает, вихревое электрическое поле действует на электроны, ускоряя их движение. В следующей четверти периода магнитное поле убывает, и направление электрического поля изменяется на противоположное. Поэтому для ускорения используется только четверть периода либо первая, либо третья (или вторая, или четвертая), следовательно, бетатрон может работать только в им-

пульсном режиме ускорения. К концу ускорения (к концу нарастания магнитного поля), когда энергия электронов оказывается близкой к максимальной, их выводят из ускоряющей камеры. Заметим, что магнитное поле в бетатроне играет двойную роль: создает вихревое электрическое поле и удерживает электроны в процессе их ускорения на стационарной орбите, совпадающей с осью ускоряющей камеры. Чтобы радиус орбиты при ускорении оставался постоянным, должно выполняться простое условие:

$$B_0 = \frac{1}{2} \langle B \rangle, \quad (2.8)$$

где B_0 - индукция поля на орбите, а $\langle B \rangle$ - среднее по площади орбиты значение магнитного поля.

Докажем формулу (2.8).

Релятивистское уравнение движения электрона имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}_B + e[\vec{v} \times \vec{B}_0], \quad (2.9)$$

где \vec{E}_B - вихревое электрическое поле, а \vec{B}_0 - индукция магнитного поля на орбите радиуса r_0 . Представив импульс электрона \vec{p} как произведение $\vec{p} = p\vec{\tau}$, где p - модуль импульса, а $\vec{\tau}$ - орт касательной к траектории, найдем его производную по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(p\vec{\tau}) = \frac{dp}{dt}\vec{\tau} + p\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dp}{dt}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{r_0}\vec{n}, \quad (2.10)$$

где учтено, что $\vec{p} = m\vec{v}$, (m - релятивистская масса электрона), а

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{r_0}\vec{n} \quad (\vec{n} - \text{орт нормали к траектории}).$$

Сравнивая (2.10) и (2.9), запишем уравнение движения в проекциях на направления $\vec{\tau}$ и \vec{n} :

$$\frac{dp}{dt} = eE_B, \quad (2.11)$$

$$\frac{mv^2}{r_0} = evB_0 \Rightarrow p = mv = er_0B_0 \quad (2.12)$$

Теперь на основании закона Фарадея (1.2) и равенства (2.1) имеем

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \pi r_0^2 \frac{d\langle B \rangle}{dt}$$

и

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\ell} \vec{E}_B d\vec{\ell} = 2\pi r_0 E_B,$$

откуда

$$E_B = \frac{r_0}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.11) и дифференцируя (2.12) по времени, получим два равенства:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{er_0}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt}, \quad (2.15)$$

и

$$\frac{dp}{dt} = er_0 \frac{dB_0}{dt}. \quad (2.16)$$

Окончательно из (2.15) и (2.16) имеем

$$\frac{dB_0}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt} \quad \text{или} \quad B_0 = \frac{1}{2} \langle B \rangle.$$

Выполнение последнего равенства достигается практически выбором формы полюсных наконечников электромагнита в виде усеченных конусов.

2.3. Ток смещения

Как следует из предыдущих рассуждений, любое переменное магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}(t)$ порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле \vec{E}_B . Анализ электромагнитных явлений привел Максвелла к мысли, что должна существовать *симметрия во взаимопревращениях электрических и магнитных полей*, т.е. должен иметь место и обратный процесс:

- *всякое изменение во времени электрического поля должно порождать в пространстве вихревое магнитное поле.*

Содержание этого утверждения является сущностью второй важнейшей гипотезы Максвелла, которая позволила ему не только развить идеи Фарадея, но и фактически завершить построение строгой теории электромагнитного поля.

Основываясь на том, что магнитное поле всегда присутствует при наличии любого тока, Максвелл для переменного электрического поля ввел название *тока смещения*, чтобы отличить его от тока проводимости, связанного с упорядоченным движением свободных носителей заряда.

Для более наглядного пояснения необходимости введения нового понятия токов смещения обычно рассматривают, ставший уже классическим, пример. Пусть предварительно заряженный конденсатор разряжается через какое-либо сопротивление. При этом по подводящим проводам течет изменяющийся со временем электрический ток J (рис.2.2). Для *магнитоэстатического* поля имеет место теорема о циркуляции

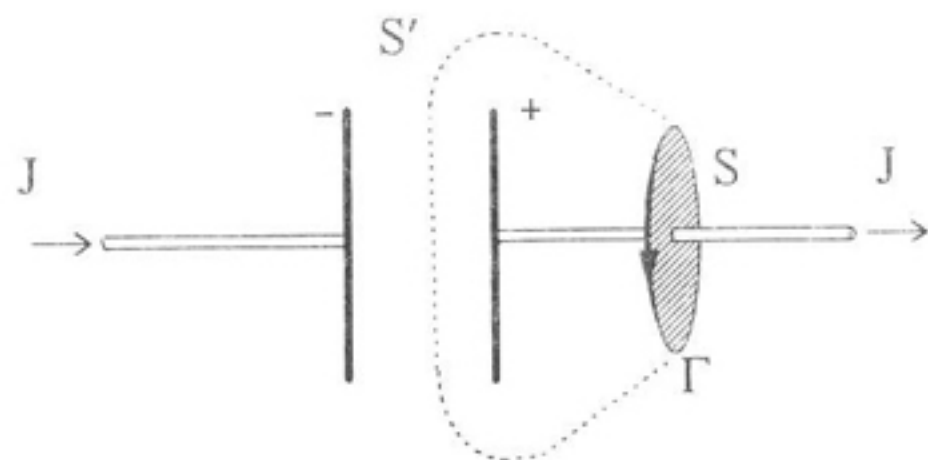


Рис.2.2

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}), \quad (2.17)$$

которая справедлива для любой поверхности, ограниченной контуром Γ . Применим эту теорему для случая, изображенного на рис. 2.2. Для контура Γ , охватывающего провод и поверхность S , имеем

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = J,$$

а для поверхности S' , ограниченной тем же контуром Γ ,

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} d\vec{\ell}) = 0,$$

так как через эту поверхность не течет никакого тока. Мы получим явное противоречие, свидетельствующее о том, что равенство (2.17), справедливое в случае постоянного поля \vec{H} , *не выполняется для переменного поля*. Исправить эту ситуацию можно, обратив внимание на то, что поверхность S' пересекает только электрическое поле. По теореме Гаусса для вектора \vec{D} имеем

$$\oint_{S+S'} (\vec{D} d\vec{S}) = q, \quad (2.18)$$

где $q = q(t)$ заряд, находящийся в данный момент времени внутри *замкнутой* поверхности $S + S'$, т.е. на пластине конденсатора (рис.2.2). Дифференцируя (2.18) по времени t , получим

$$\frac{d}{dt} \oint_{S+S'} (\vec{D} d\vec{S}) = \oint_{S+S'} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \right) = \frac{dq}{dt}. \quad (2.19)$$

С другой стороны, справедливо уравнение непрерывности для плотности тока проводимости \vec{j} (см. п. 5.1, формулу (5.8) части III данного пособия):

$$\oint_{S+S'} (\vec{j} d\vec{S}) = -\frac{dq}{dt}. \quad (2.20)$$

Сложив почленно равенства (2.19) и (2.20), будем иметь равенство

$$\oint_{S+S'} \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \right) = 0, \quad (2.21)$$

аналогичное по форме уравнению непрерывности в случае постоянного тока. Дополнительное слагаемое $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ в подынтегральном выражении в (2.21), имеющее размерность плотности тока, Максвелл назвал *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.22)$$

В случае переменных во времени полей сумму токов проводимости и тока смещения называют *полным током*

$$J_{\text{полн}} = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \right), \quad (2.23)$$

а его плотность - плотностью полного тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.24)$$

В заключение этого пункта отметим, что равенство (2.21) фактически является интегральной формой теоремы Гаусса для плотности полного тока. Поскольку форма поверхностей S и S' (рис.2.2), вообще говоря, может быть произвольной, то равенство (2.21) выполняется для любой замкнутой поверхности. Тот факт, что поток плотности полного тока через произвольную замкнутую поверхность равен нулю, свидетельствует о том, что

линии плотности полного тока замкнуты, в отличие от линий тока проводимости. Необходимо иметь в виду, что ток смещения и ток проводимости равноправны только по одному признаку: по способности их возбуждать магнитное поле. Ток смещения существует в тех областях, где имеется переменное электрическое поле. При наличии диэлектрической среды ток смещения состоит из двух естественных составляющих:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (2.25)$$

собственно тока смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и тока, обусловленного смещением связанных зарядов при поляризации диэлектрика $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Существенным здесь является тот факт, что слагаемое в (2.25) $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ не связано ни с каким движением заряженных частиц, а определяется только наличием переменного электрического поля, а поэтому приводит к возбуждению магнитного поля даже в вакууме.

Выводы

Изменяющееся во времени электрическое поле (ток смещения) порождает магнитное поле в равной степени, как и токи проводимости. Полный ток, равный сумме токов проводимости и токов смещения, имеет замкнутые линии.

Контрольные вопросы

- 2.4. Дайте обоснование необходимости введения понятия токов смещения в случае переменных электрических полей.
- 2.5. Что называют током смещения, плотностью тока смещения?
- 2.6. Запишите теорему Гаусса для плотности полного тока. Какими свойствами обладает $\vec{j}_{\text{полн}}$?

2.7. Пусть переменное электрическое поле сосредоточено в диэлектрической среде. Какими естественными составляющими обусловлена в этом случае плотность тока смещения?

2.8. Уравнения Максвелла

Наличие вихревого электрического поля \vec{E}_B , возбуждаемого переменным магнитным полем, и токов смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, порождающих магнитное поле, позволяют записать основные уравнения в теории электромагнетизма в самом общем виде. Эти уравнения, полученные впервые Максвеллом и носящие его имя, завершают единую макроскопическую теорию электромагнитного поля.

Установим вид фундаментальных уравнений Максвелла.

Как уже известно, в общем случае электрическое поле может иметь две составляющие.

Одна из них порождается неподвижными заряженными частицами. Это электростатическое потенциальное поле, для которого справедливы теоремы о циркуляции

$$\oint_{\ell} (\vec{E}_q d\vec{\ell}) = 0 \quad (2.26)$$

и Гаусса

$$\oint_S (\vec{D}_q d\vec{S}) = q_{\text{стат}} = \int_V \rho_{\text{стат}} dV. \quad (2.27)$$

В формулах (2.26) и (2.27) индекс "q" указывает на принадлежность векторов электростатическому полю.

Другая составляющая электрического поля возбуждается переменным магнитным полем и представляет собой вихревое непотенциальное поле, не имеющее источников, подобных зарядам. Для вихревого поля имеем (2.4):

$$\oint_{\ell} (\vec{E}_B d\vec{\ell}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right), \quad (2.28)$$

и на основании (2.6)

$$\oint_S (\vec{D}_B d\vec{S}) = 0. \quad (2.29)$$

В силу принципа суперпозиции результирующее поле характеризуется суммой электростатической и вихревой составляющих:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B, \\ \vec{D} = \vec{D}_q + \vec{D}_B. \end{cases} \quad (2.30)$$

(2.31)

Определим циркуляцию вектора \vec{E} :

$$\oint_{\ell} (\vec{E} d\vec{\ell}) = \oint_{\ell} (\vec{E}_q d\vec{\ell}) + \oint_{\ell} (\vec{E}_B d\vec{\ell}).$$

Используя (2.26) и (2.28), получим

$$\oint_{\ell} (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right). \quad (2.32)$$

Для потока вектора \vec{D} , используя (2.31), (2.27) и (2.29), получим равенство

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \oint_S (\vec{D}_q d\vec{S}) + \oint_S (\vec{D}_B d\vec{S})$$

или

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho_{\text{стат}} dV. \quad (2.33)$$

Аналогично, для магнитного поля результирующее поле \vec{H} складывается из поля, порождаемого токами проводимости \vec{H}_j , и поля, возбуждаемого токами смещения $\vec{H}_{\text{см}}$:

$$\vec{H} = \vec{H}_j + \vec{H}_{cm}.$$

Определяя циркуляцию \vec{H} в этом случае, получим

$$\oint_{\ell} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \oint_{\ell} (\vec{H}_j d\vec{\ell}) + \oint_{\ell} (\vec{H}_{cm} d\vec{\ell}) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) + \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \right),$$

т.е.

$$\oint_{\ell} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \right), \quad (2.34)$$

где использовано (2.17) и (2.24).

Вид теоремы Гаусса для результирующего поля \vec{B} сохраняет свою форму, аналогичную для магнитоэстатического поля

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (2.35)$$

Запишем теперь полученные уравнения (2.32), (2.33), (2.34) и (2.35) в одном месте

$$\oint_{\ell} (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right), \quad \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV, \quad (2.36)$$

$$\oint_{\ell} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \right), \quad \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (2.37)$$

Напомним, что в уравнениях (2.36) и (2.37) ρ - объемная плотность сторонних зарядов, \vec{j} - плотность тока проводимости.

Уравнения (2.36) и (2.37) представляют собой *систему фундаментальных уравнений Максвелла электродинамики неподвижных сред в интегральной форме.*

Сформулируем содержание этих уравнений.

- *Циркуляция вектора \vec{E} по произвольному замкнутому контуру равна взятой с противоположным знаком скорости изменения магнитного потока через любую поверхность, ограниченную этим контуром.* В основе этого уравнения лежит закон Фарадея для ЭДС индукции.

- *Поток вектора электрического смещения \vec{D} через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности.*

Это уравнение является обобщением закона Кулона на случай переменных полей.

- *Циркуляция вектора \vec{H} по произвольному замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения), охватываемому этим контуром.*

Это уравнение является обобщением закона Био-Савара-Лапласа.

- *Поток вектора \vec{B} через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю.*

Соответствующее уравнение есть обобщение теоремы Гаусса для вектора \vec{B} на случай электромагнитного поля.

Из уравнений Максвелла (2.36) и (2.37) с необходимостью следует, что в случае *изменения со временем любого из полей \vec{E} или \vec{B} возбуждается другое.* Поэтому эти поля всегда сопутствуют друг другу, т.е. представляют собой *единый объект - электромагнитное поле.*

Только в случае стационарных полей, когда $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ и

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, уравнения (2.36) и (2.37) становятся независимыми друг

от друга. Заметим, что если условие стационарности полей \vec{E} и \vec{B} выполняется в одной из инерциальных систем отсчета, то в других, движущихся относительно данной, это условие нарушается. Эти соображения являются лишним подтверждением в пользу *единства* электромагнитного поля.

Кроме того, здесь следует отметить, что приведенные *рассуждения не являются доказательством уравнений Максвелла.* Они представляют собой *основные постулаты электродинамики.* Их справедливость основана на обобщении многочисленных опытных

фактов и позволило предсказать целый ряд новых явлений, которые подтвердились позже.

Уравнения Максвелла играют в электродинамике такую же роль, как и законы Ньютона в классической механике. *С общезначимой точки зрения они представляют собой математические выражения принципа причинности в теории электромагнитного поля:* зная состояние поля в какой-либо момент времени, на основе уравнений Максвелла можно предсказать состояние поля в любой сколь угодно близкий последующий момент.

Запишем теперь уравнения Максвелла (2.36) и (2.37) в дифференциальной форме:

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\nabla \cdot \vec{D}) = \rho, \quad (2.38)$$

$$[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\nabla \cdot \vec{B}) = 0. \quad (2.39)$$

Из этой системы уравнений видно, что источниками электрического поля являются электрические заряды и переменное во времени магнитное поле. Магнитное же поле возбуждается при наличии движущихся зарядов (электрических токов) и переменного во времени электрического поля. Кратко укажем свойства уравнений Максвелла. Система (2.38), (2.39) линейна, она содержит только первые производные полей и первые степени \vec{j} и ρ . Уравнения Максвелла являются релятивистски инвариантными, т.е. их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Уравнение непрерывности является следствием уравнений Максвелла. В электрически нейтральной ($\rho = 0$) однородной непроводящей среде ($\vec{j} = 0$) уравнения Максвелла приобретают симметричный вид.

В заключение этого пункта следует отметить, что уравнения Максвелла не позволяют однозначно по распределению токов \vec{j} и зарядов ρ определять характеристики электромагнитного поля, т.е. система (2.38) - (2.39) не является полной. Для того чтобы система уравнений оказалась замкнутой, ее необходимо дополнить уравнениями, связывающими основные параметры поля \vec{E} и \vec{B} с вспомогательными \vec{D} и \vec{H} . Вид этих связей существенным обра-

зом зависит от свойств среды, в которой локализовано электромагнитное поле.

Уравнения, связывающие между собой характеристики электромагнитного поля (полевой формы материи) с электрическими и магнитными параметрами среды (вещества), называются *материальными уравнениями*.

Простейшие материальные уравнения нам уже известны:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (2.40)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*),$$

где ϵ, μ - относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ - ее удельная электропроводность, \vec{E}^* - напряженность поля сторонних сил неэлектромагнитного происхождения. Напомним, что эти уравнения справедливы в случае слабых полей для изотропных сред при отсутствии сегнетоэлектриков и ферромагнетиков.

Выводы

Фундаментальные уравнения Максвелла совместно с материальными уравнениями представляют собой замкнутую (полную) систему уравнений, позволяющую объяснить все явления макроскопической (не квантовой) электродинамики, и являются обобщением многочисленных опытных фактов.

Контрольные вопросы

- 2.8. Кратко приведите соображения, приводящие к виду уравнений Максвелла.
- 2.9. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Какие связи эти уравнения отражают? Каков смысл этих уравнений? Обобщением каких экспериментальных физических законов они являются?
- 2.10. Какую роль в теории электромагнетизма играют уравнения Максвелла?
- 2.11. Запишите, поясните смысл и условия применимости простейших по форме материальных уравнений.
- 2.12. Перечислите свойства уравнений Максвелла.

- 2.13. Покажите, что действительно из уравнений Максвелла следует уравнение непрерывности для плотности тока \vec{j}
- 2.14. Запишите систему уравнений (2.38) и (2.39) для случая нейтральной однородной непроводящей среды.

3. Колебательные процессы

3.1. Колебания и их общая классификация

Колебательные явления - это процессы, происходящие во времени с какой-либо повторяемостью. Если при протекании процесса существует минимальный, постоянный по величине промежуток времени, в течение которого данный процесс повторяется, то он называется *периодом колебаний* T . Следует сразу отметить, что это понятие применяется и в случаях, когда указанный промежуток времени изменяется, т.е. $T(t)$. Хотя колебания весьма разнообразны по своей природе, существует общий подход в описании их свойств и характеристик.

Колебания *различают по их физической природе*: существуют механические, электрические, электромагнитные колебания и т.д.

Наиболее важными разновидностями являются *свободные* (собственные) и *вынужденные* колебания, которые отличаются по характеру внешних воздействий на саму колебательную систему.

Свободными (собственными) называется колебания за счет энергии, сообщенной системе в начальный момент времени, которая затем предоставлена самой себе. В процессе свободных колебаний внешние воздействия на колебательную систему отсутствуют. Например, свободными являются колебания груза, подвешенного на пружине.

Вынужденными называются такие колебания, которые происходят в системе под периодическим внешним воздействием.

Примером вынужденных колебаний могут служить процессы в электрической цепи при воздействии на нее внешней периодической ЭДС. Особую важность в технике играют колебательные процессы, при протекании которых потери энергии восполняются за счет каких-либо внешних воздействий. Наиболее интересными являются так называемые *автоколебательные системы*, в которых незатухающие колебания поддерживаются за счет внешних источников энергии, причем компенсация потерь энергии происходит периодически в моменты времени, определяемые свойствами самой

колебательной системы. Привычной автоколебательной системой являются часы с механическим маятником, незатухающие колебания которого поддерживаются с помощью специального механизма за счет энергии закрученной пружины.

Важными являются *параметрические колебания* - это такие колебания, которые происходят в системе и сопровождаются периодическими изменениями какого-либо параметра колебательной системы. Примером такой системы является человек на качелях, который для поддержания их колебаний периодически приседает на них, изменяя при этом фактическую длину подвеса. Необходимость изучения основных свойств колебательных процессов не требует особого обоснования, поскольку фактически вся современная цивилизация человечества базируется на использовании различного рода колебательных процессов (это транспорт, промышленность, радиотехника и электроника и т.д.) Следует, однако, напомнить, что наряду с положительной ролью колебательных процессов, существует обширный ряд случаев, когда колебания играют отрицательную роль. К ним относятся, например, вибрации различных машин и механизмов, возникающие при их работе, которые при определенных условиях могут достигать опасных размеров.

3.2. Гармонические колебательные процессы

3.2.1. Описание гармонических колебаний и их общие свойства

Самой простой и наиболее важной идеализированной моделью колебания является гармоническое колебание. Важность рассмотрения такого модельного периодического процесса следует из того факта, что в принципе любые процессы, даже непериодические, можно представить как результат наложения конечного или бесконечного ряда гармонических колебаний.

В дальнейшем мы будем описывать колебания с общих позиций, не касаясь их физической природы, при необходимости иллюстрируя их конкретными примерами.

Итак, гармоническим колебанием называется процесс, когда какая-либо характеризующая его величина, изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Колебательная система, в которой могут происходить гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором.

Уравнение, с помощью которого описывают гармоническое колебание, имеет вид

$$\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.1)$$

где ξ - физическая величина, которая называется *смещением величины ξ в данный момент времени* от равновесного значения $\xi = 0$; $A = \xi_{\max}$ - называется *амплитудой* колебания (заметим, что $A > 0$); аргумент косинуса $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ - называется *фазой колебаний* в момент времени t , а φ_0 - *начальной фазой* ($\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$). Из (3.1) легко видеть, что ξ изменяется в пределах $-A \leq \xi \leq +A$.

Поскольку косинус является периодической функцией своего аргумента φ с периодом 2π , то существует минимальный промежуток времени T , в течение которого процесс полностью повторяется

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (3.2)$$

где T - *период колебаний*, а ω_0 - *циклическая частота*.

Величина, обратная периоду, равная числу полных колебаний, совершаемых за единицу времени, называется *частотой колебаний*

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\omega_0 = 2\pi\nu, \quad (3.4)$$

т.е. циклическая частота численно равна числу колебаний, совершаемых величиной ξ за время, равное 2π .

Единица измерения частоты - *герц* (Гц), это частота такого процесса, когда за 1 с совершается одно полное колебание величины ξ . При описании свойств гармонических колебаний в дальнейшем будем пользоваться терминологией, которая применяется в механике. Однако следует иметь в виду, что они соответствуют своему истинному смыслу только для механических колебаний.

Найдем скорость гармонического колебания, дифференцируя по t (3.1):

$$v = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.5)$$

$$v_{\max} = A\omega_0. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.1) видно, что скорость v гармонического процесса сдвинута по фазе по сравнению со смещением ξ на $\pi/2$. Другими словами, когда $\xi = 0$ величина скорости $|v|$ достигает максимального значения, т.е. $|v| = v_{\max} = A\omega_0$ (3.6).

Ускорение гармонического колебания

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \quad (3.7)$$

$$a_{\max} = A\omega_0^2 \quad (3.8)$$

также изменяется по гармоническому закону и колеблется в противоположной фазе по отношению к смещению. Когда $\xi = +A$, то $a = -A\omega_0^2$, когда $\xi = -A$, то $a = +A\omega_0^2$ на рис. 3.1 изображены графики $\xi(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ гармонического колебания для $\varphi_0 = 0$ за один период.

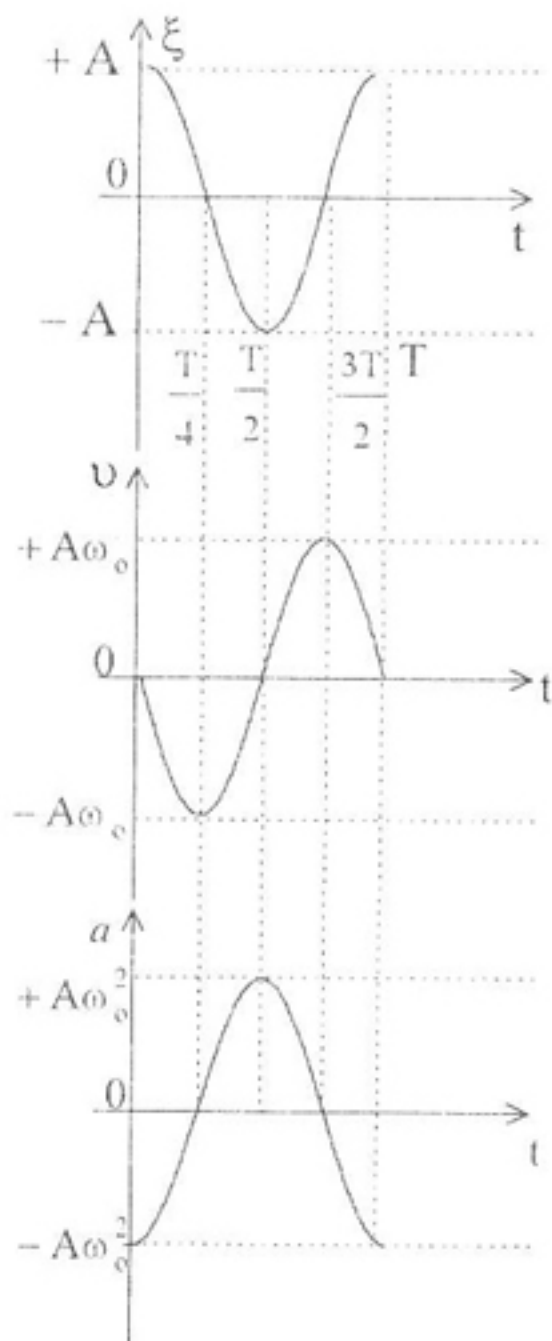


Рис.3.1

Уравнение (3.9) по форме совпадает с уравнением движения материальной точки под действием упругой (квазиупругой) силы. Действительно, на основании второго закона Ньютона имеем $ma = F = -kx$ или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.11)$$

Из сравнения (3.9) и (3.11) имеем для «силы», вызывающей гармоническое колебание, равенства:

Из сравнения (3.7) и (3.1) видно, что смещение ξ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2\xi = 0, \quad (3.9)$$

которое называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*. Его общим решением является функция (3.1). Амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями. Если при $t = 0$ $\xi = \xi_0$ и $v = v_0$, то

$$\begin{aligned} \xi_0 &= A \cos \varphi_0, \\ v_0 &= -A\omega_0 \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Откуда имеем равенства

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{\xi_0 \omega_0}.$$

$$F = -m\omega_0^2x = -m\omega_0^2A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.12)$$

$$F_{\max} = m\omega_0^2A, \quad (3.13)$$

где m и $k = m\omega_0^2$ - величины, характеризующие соответствующие «инертные» свойства колебательной системы и «квазиупругие» свойства причин, вызывающих гармоническое колебание.

Всякое гармоническое колебание обладает энергией. Аналогом «кинетической» энергии является величина

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$W_{k \max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}, \quad (3.15)$$

где использовано (3.5).

Из (3.14) видно, что величина W_k также «колеблется» по гармоническому закону, но относительно равновесного значения, равного $\frac{mA^2\omega_0^2}{4}$ с «амплитудой» $\frac{mA^2\omega_0^2}{4}$ и частотой, в два раза превышающей частоту колебаний самой величины ξ .

Поскольку «сила», вызывающая колебание, имеет квазиупругий характер, то можно говорить о «потенциальной» энергии колебания

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{k\xi^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$W_{n \max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (3.17)$$

Из сравнения (3.16) и (3.15) видно, что «потенциальная» энергия изменяется со временем так же, как и кинетическая, но эти изменения происходят в противофазе относительно W_k . Поэтому «полная» энергия

$$W = W_k + W_{II} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const} \quad (3.18)$$

при гармонических колебаниях от времени не зависит, что и должно быть, так как «силы», вызывающие гармонические колебания, имеют квазиупругий характер, а значит «потенциальны».

В заключение этого пункта полезно указать, что на практике, кроме представления гармонических колебаний с помощью тригонометрических функций, широко применяют еще два других способа описания.

Метод векторных диаграмм заключается в изображении гармонического колебания в виде вектора \vec{A} (рис.3.2), модуль которого равен амплитуде колебания. При вращении этого вектора с угловой скоростью ω_0 относительно оси O , проходящей через начало вектора \vec{A} , проекция конца этого вектора на некоторое направление Ox , лежащее в плоскости вращения, будет изменяться по закону

$$\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Такое изображение колебания весьма наглядно и во многих сложных случаях позволяет качественно представить характер протекания колебательного процесса.

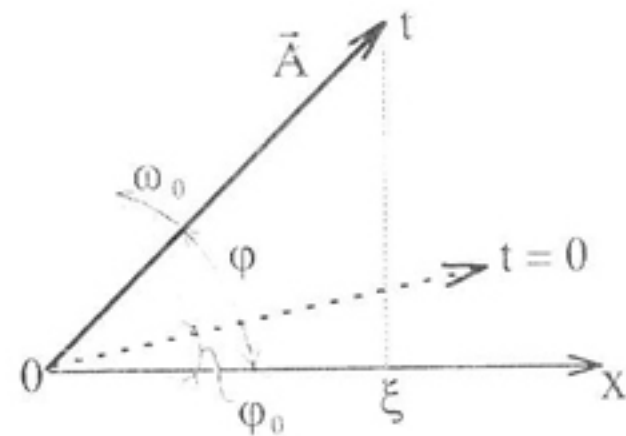


Рис.3.2

Другим широко используемым способом описания является **метод представления колебания с помощью комплексных величин**, который основан на формуле Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (3.19)$$

где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Поэтому гармоническое колебание можно записать в виде действительной части комплексного числа

$$Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} = \xi^*,$$

$$\xi = \text{Re} \xi^* = \text{Re} \left(Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.20)$$

Использование этого метода особенно удобно при анализе колебаний сложной формы, так как математические операции с комплексными величинами выглядят значительно проще, чем с тригонометрическими.

Выводы

Гармонический колебательный процесс описывается законом синуса или косинуса с постоянными параметрами. Процесс происходит в результате «квазиупругого» воздействия на колебательную систему. Полная «энергия» гармонического колебания от времени не зависит.

Контрольные вопросы

- 3.1. Что называется гармоническим колебанием? Перечислите и охарактеризуйте смысл основных параметров гармонического колебания.
- 3.2. Что такое скорость и ускорение гармонического колебания? Как они соотносятся с самим колебанием? Запишите выражения для их амплитудных значений.
- 3.3. Запишите дифференциальное уравнение гармонического процесса. Охарактеризуйте его.
- 3.4. Каково основное свойство воздействия, вызывающего гармоническое колебание?
- 3.5. Запишите выражения, связывающие между собой начальные условия и параметры гармонического колебания.
- 3.6. Каковы основные особенности энергетических характеристик гармонического колебания?
- 3.7. Опишите сущность методов представления колебаний с помощью векторных диаграмм и комплексных чисел.

3.2.2. Гармонические осцилляторы

Как следует из предыдущего пункта, гармоническим осциллятором является колебательная система, в которой происходит процесс, описываемый уравнениями типа (3.1) или (3.9). Здесь будут рассмотрены такие классические (не квантовые) колебательные системы.

3.2.2.1. Пружинный маятник

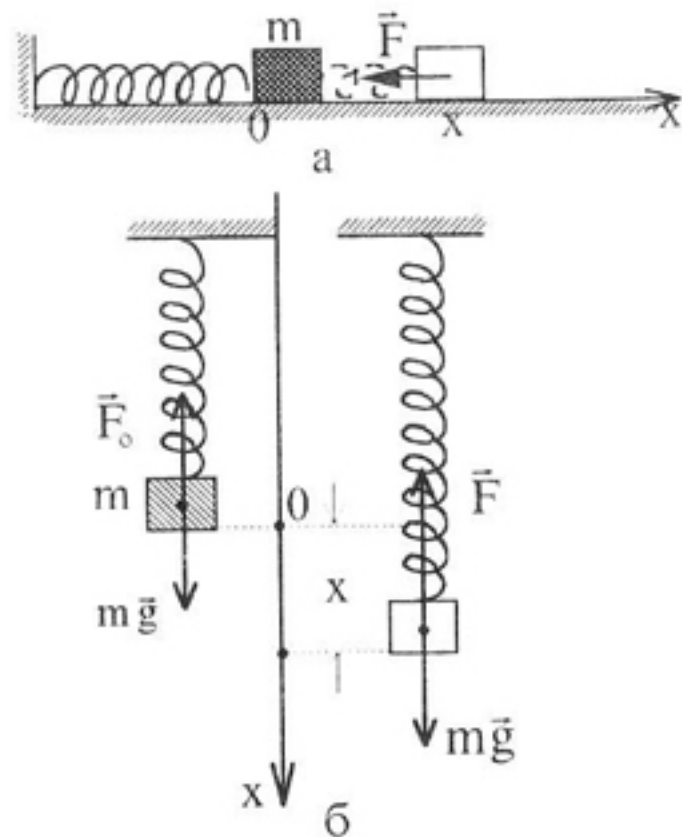


Рис.3.3

Пружинный маятник представляет собой материальную точку массой m , прикрепленную к абсолютно упругой невесомой пружине жесткостью k . Различают два наиболее простых случая: горизонтальный (рис.3.3,а) и вертикальный (рис.3.3,б) маятники.

а) Горизонтальный маятник (рис.3.3,а). При смещении от положения равновесия 0 на величину x на груз m действует в горизонтальном направлении упругая сила $F = -kx$. Предполагается, что горизонтальная опора, по которой скользит груз m при своих колебаниях, *абсолютно гладкая*. В этом

случае на основании второго закона Ньютона уравнение движения маятника имеет вид

$$ma = -kx,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.21)$$

б) Вертикальный маятник (рис.3.3,б). Положение равновесия в этом случае характеризуется условием

$$mg = F_0 = kx_0,$$

где F_0 - величина упругой силы, действующей на груз m при статическом растяжении пружины на x_0 под действием силы тяжести груза mg . При произвольном смещении груза от положения равновесия на величину x на основании второго закона Ньютона имеем

$$\begin{aligned} ma &= m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - F = \\ &= mg - k(x + x_0). \end{aligned}$$

Используя условие равновесия, получим уравнение движения груза m в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

которое тождественно с уравнением (3.21). Таким образом, сравнивая (3.21) и (3.9), можно сделать заключение, что в обоих рассмотренных случаях пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.22)$$

период которых

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.23)$$

Отметим, что полученные здесь результаты справедливы для $k = \text{const}$, т.е. для таких значений амплитуд колебаний, пока сохраняются упругие свойства пружины.

3.2.2.2. Физический и математический маятники

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр масс этого тела (рис. 3.4). Обозначим расстояние от оси подвеса маятника O до центра масс C : $OC = a$. При отклонении маятника от вертикали на угол φ на него будет действовать результирующий момент сил, равный моменту силы тяжести

$$M = M_T = -mga \sin \varphi.$$

Поэтому на основании уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси имеем

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi, \quad (3.24)$$

где J - момент инерции тела относительно оси подвеса O , а знак минус обусловлен противоположностью направлений угла φ отклонения маятника от вертикали и момента силы тяжести относительно точки O .

Уравнение (3.24) представим в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J} \sin \varphi = 0 \quad (3.25)$$

и сравним его с (3.9). Различие этих уравнений свидетельствует о том, что *колебания физического маятника не являются гармониче-*

скими, т.е. нелинейны. Однако если рассматривать только малые отклонения маятника от положения равновесия, для которых

$$\varphi \ll \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad (3.26)$$

то равенство (3.25) *приближенно* примет форму уравнения (3.9)

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J} \varphi \approx 0. \quad (3.27)$$

Из последнего выражения видно, что малые колебания физического маятника являются приближенно гармоническими с циклической частотой

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad (3.28)$$

и периодом

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (3.29)$$

Формулы (3.27)-(3.29) выполняются тем точнее, чем лучше выполняется условие малости колебаний.

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*, который представляет собой идеализированную систему в виде материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной ℓ , которая колеблется под действием силы тяжести. Момент инерции математического маятника относительно точки подвеса равен

$$J = m\ell^2. \quad (3.30)$$

Уравнение малых колебаний (3.27) в этом случае примет вид

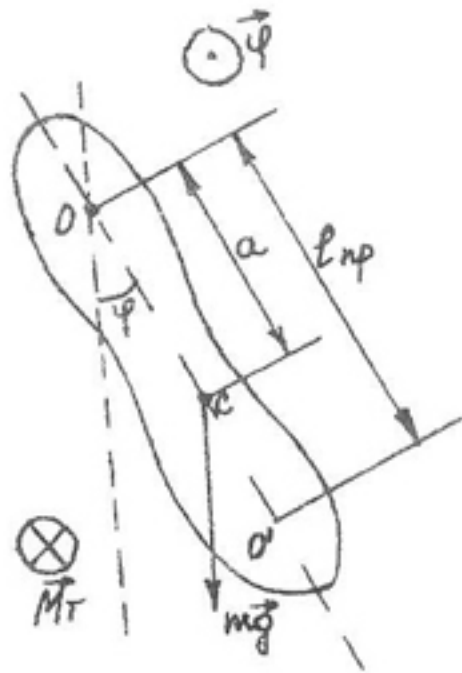


Рис.3.4

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi \approx 0, \quad (3.31)$$

где учтено (3.30), и что $a = \ell$. Таким образом, *малые колебания* математического маятника происходят с циклической частотой

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (3.32)$$

и периодом

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (3.33)$$

Из сравнения (3.33) и (3.29) видно, что если математический маятник имеет длину ℓ , равную

$$\ell = \frac{J}{ma} = \ell_{\text{пр}}, \quad (3.34)$$

то он колеблется с периодом, равным периоду соответствующего физического маятника. Длина такого математического маятника называется *приведенной длиной данного физического маятника*.

Интересно отметить, что на продолжении прямой ОС (рис.3.4) имеется точка O' ($OO' = \ell_{\text{пр}}$), которая называется *центром качаний*. Колебания относительно оси, проходящей через центр качаний O' , происходят с тем же периодом, что и относительно оси, проходящей через точку O .

Выводы

Колебания физического и математического маятников не являются гармоническими. Они становятся таковыми приближенно при условии малости колебаний.

Контрольные вопросы

- 3.8. Что представляют собой физический и математический маятники? Каковы особенности их произвольных и малых колебаний?
- 3.9. Запишите условие малости колебаний в других, отличных от (3.6), формах.
- 3.10. Что называется приведенной длиной физического маятника? Каковы особенности этого параметра?
- 3.11. Докажите утверждение, что колебания физического маятника относительно оси подвеса и оси, проходящей через центр его качаний, происходят с одинаковыми периодами.

3.2.2.3. Идеальный колебательный контур

Особую роль среди колебательных процессов играют электромагнитные колебания, которые широко используются в электротехнике, радиотехнике, электронике и т.д. Простейшей электромагнитной колебательной системой является идеальный колебательный контур - электрическая цепь, содержащая конденсатор емкостью C и катушку индуктивности L (рис.3.5). Предполагается, что сопротивление катушки индуктивности и соединительных проводов равно нулю ($R = 0$). Если зарядить конденсатор C (рис.3.5) от источника постоянного напряжения \mathcal{E} , включив ключ K

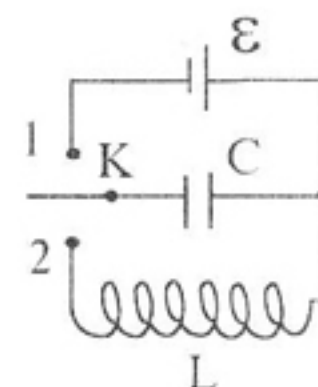


Рис.3.5

в положение «1», а затем в момент времени $t = 0$ быстро переключить ключ в положение «2», то в контуре возникнут электромагнитные колебания. Конденсатор начнет разряжаться через индуктивность L , энергия его электрического поля $q_0^2 / 2C$ преобразуется при этом в энергию магнитного поля $LJ^2/2$ из-за тока разрядки, текущего через индуктивность. Когда поле конденсатора обращается в нуль, энергия магнитного поля и ток достигают максимальных значений. Описанные процессы делятся четвертую часть периода. В следующей четверти периода направление тока сохраняется прежним и он поддерживается за счет ЭДС самоиндукции. Конденсатор начинает заряжаться уменьшающимся

током самоиндукции и при достижении начального значения заряда на его обкладках, но противоположной полярности, энергия магнитного поля обратится в нуль $LJ^2/2 = 0$, так как $J = 0$. В последующие две четверти периода процесс идет в той же последовательности, но в обратном направлении, завершая полный цикл колебания. Из-за отсутствия сопротивления R и в пренебрежении электромагнитным излучением полная энергия в колебательном контуре сохраняется, поэтому процесс электромагнитных колебаний будет в этом случае продолжаться неограниченно долго.

Запишем уравнение колебаний в идеальном колебательном контуре, используя закон Ома

$$JR = U = \mathcal{E}_s + \varphi_1 - \varphi_2, \quad (3.35)$$

где $R = 0$, $\mathcal{E}_s = -L \frac{dJ}{dt}$ - ЭДС самоиндукции в катушке индук-

тивности, а $\varphi_1 - \varphi_2 = -U_c = -\frac{q}{C}$ - разность потенциалов на обкладках конденсатора в текущий момент времени. С учетом того, что $J = \frac{dq}{dt}$, преобразуем равенство (3.35) к виду

$$L \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{C}q \quad (3.36)$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (3.37)$$

Сравнение (3.37) с (3.9) свидетельствует о том, что в идеальном колебательном контуре происходят гармонические колебания

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.38)$$

с частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.39)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.40)$$

В заключение этого пункта полезно, на наш взгляд, провести аналогию роли параметров при описании электромагнитных и механических колебаний. Эта аналогия легко прослеживается при сравнении (3.21) и (3.37): роль массы m играет индуктивность

L , роль $k \rightarrow \frac{1}{C}$, роль скорости $v \rightarrow \frac{dq}{dt} = J$; аналогом кинетической энергии $W_k = \frac{mv^2}{2}$ является энергия магнитного поля

$W_m = LJ^2/2$ и т.д. Остальные аналогии предлагаем проследить читателю самостоятельно.

Выводы

В идеальном колебательном контуре происходят гармонические колебания, обусловленные периодическим преобразованием энергии электрического поля конденсатора в магнитное поле катушки индуктивности и наоборот.

Контрольные вопросы

- 3.12. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний в идеальном колебательном контуре. Следствием какого физического закона оно является?
- 3.13. За счет каких физических процессов происходят преобразования энергии в идеальном контуре?
- 3.14. Покажите, что полная электромагнитная энергия в идеальном контуре сохраняется?
- 3.15. Какая физическая величина при электромагнитных колебаниях играет роль «квасиупругой силы»?
- 3.16. Запишите выражения для максимальной силы тока J_{\max} и максимального значения ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{S \max}$ в контуре.

3.2.2.4. Малые колебания около положения устойчивого равновесия

Проще всего и нагляднее рассматривать данный вопрос на примере механической системы, имеющей одну степень свободы. В этом случае положение системы можно характеризовать одной величиной $x(t)$. Если при этом система находится в потенциальном силовом поле, то она обладает в каждом положении потенциальной энергией $U = U(x)$. Предположим, что существует такое состояние $x = x_0$, в котором потенциальная энергия системы минимальна, т.е.

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0. \quad (3.41)$$

Мы будем рассматривать только малые отклонения $\Delta x = x - x_0$ системы от состояния x_0 . Разлагая функцию $U(x)$ в ряд Тейлора в малой окрестности точки $x = x_0$, получим

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3.42)$$

Учитывая, что потенциальная энергия механической системы определена с точностью до произвольной постоянной, можно положить значение $U(x_0)$ равным нулю. Поэтому, подставляя (3.41) в (3.42) и пренебрегая слагаемыми третьего и более высоких порядков малости, будем иметь

$$U(x) \approx \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} k(\Delta x)^2, \quad (3.43)$$

где использовано обозначение

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} = k > 0.$$

Дифференцируя (3.42) по x , получим выражение для силы, действующей на систему при ее малом отклонении от состояния $x = x_0$:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -k\Delta x = -k(x - x_0). \quad (3.44)$$

Как видно из (3.44), сила F_x имеет квазиупругий характер, обращается в нуль при $x = x_0$, а поэтому положение $x = x_0$ определяет состояние устойчивого равновесия системы. Кроме того, как уже указывалось в п. 3.2.1, система под действием квазиупругой силы совершает гармоническое колебание.

Изложенные здесь соображения применимы к любой системе, если хотя бы один из ее параметров изменяется с течением времени, и ему можно сопоставить аналог потенциальной энергии с указанными выше свойствами. В этом случае соответствующий параметр при его малых отклонениях от равновесного значения изменяется практически по гармоническому закону.

Контрольные вопросы

3.17. Как и почему ведет себя система при ее малых отклонениях от положения устойчивого равновесия?

3.2.3. Сложение гармонических колебаний

3.2.3.1. Сложение колебаний одного направления. Биения

Рассмотрим некоторые конкретные примеры процессов, происходящих в системе, которые являются результатом наложения нескольких одновременных гармонических колебаний.

В начале исследуем результаты сложения двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}), \quad (3.45)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

Рассмотрение будем вести, используя метод векторных диаграмм (см. п. 3.2.1). Из уравнений (3.45) видно, что разность фаз колебаний ξ_1 и ξ_2 от времени не зависит

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \text{const}$$

и равна разности начальных фаз. При вращении векторов \vec{A}_1 и

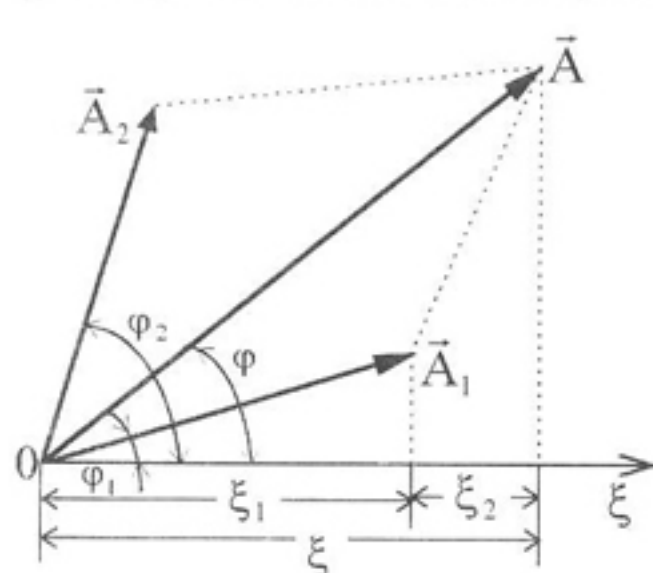


Рис.3.6

\vec{A}_2 с одинаковой угловой скоростью ω_0 их взаимная ориентация в любой момент времени t остается неизменной (рис.3.6). Поэтому результирующий процесс при сложении колебаний ξ_1 и ξ_2

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad (3.46)$$

можно представить вектором

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad (3.47)$$

который вращается с той же угловой скоростью, что и складываемые векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 . Таким образом, результирующий процесс представляет собой гармоническое колебание

$$\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.48)$$

Как видно из рис.3.6, амплитуда колебания (3.48) определяется равенством

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}), \quad (3.49)$$

а начальная фаза φ_0 при $t = 0$ равенством

$$\text{tg}\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}, \quad (3.50)$$

так как при $t = 0$, $\varphi_1 = \varphi_{01}$, а $\varphi_2 = \varphi_{02}$.

Из формулы (3.49) видно, что амплитуда результирующего колебания (3.48) зависит от разности начальных фаз складываемых колебаний $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \Delta\varphi_0$.

При $\Delta\varphi_0 = \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\cos \Delta\varphi_0 = +1$,

$$A = A_1 + A_2.$$

При $\Delta\varphi_0 = \pm(2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\cos \Delta\varphi_0 = -1$,

$$A = |A_1 - A_2|$$

Полученные результаты будут использованы при анализе интерференционных и дифракционных явлений в оптике.

При наложении друг на друга более чем двух гармонических колебаний одинаковой частоты и одного направления указанную процедуру описания повторяют последовательно, сложив вначале два колебания. Затем, используя результат этого сложения, складывают с третьим и т.д.

Заметим, что при сложении колебаний с различными частотами $\omega_{01} \neq \omega_{02}$ также можно использовать метод векторных диаграмм для качественного анализа результата. В этом случае рис.3.6 отражает ситуацию, характерную для некоторого фиксированного момента времени t . Движение вектора \vec{A} вокруг точки O происходит сложным образом, которое уже нельзя описать равенством (3.48). Однако формулы, определяющие модуль результирующего вектора A и его ориентацию φ относительно выбранного направления ξ в данный момент времени, имеют вид, аналогичный (3.49) и (3.50), соответственно

$$A(t)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi(t), \quad (3.51)$$

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad (3.52)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_{o2} - \omega_{o1})t + (\varphi_{o2} - \varphi_{o1})$.

Особый и важный для практических целей представляется случай, когда частоты $\omega_{o1} = \omega$ и $\omega_{o2} = \omega + \Delta\omega$ складываемых колебаний одного направления мало отличаются друг от друга, т.е. $\Delta\omega \ll \omega$. Чтобы не усложнять анализ результата сложения таких колебаний, будем считать, что амплитуды складываемых колебаний равны между собой $A_1 = A_2 = A_o$, а начальные фазы равны нулю $\varphi_{o1} = \varphi_{o2} = 0$. При таких предположениях уравнения исходных колебаний имеют вид

$$\xi_1 = A_o \cos \omega t,$$

$$\xi_2 = A_o \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Сложим эти выражения, учитывая, что $\Delta\omega / 2 \ll \omega$,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \left(2A_o \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (3.53)$$

Результирующий процесс уже не является гармоническим колебанием. Однако из-за условия $\Delta\omega \ll \omega$ множитель, стоящий в скобках выражения (3.53), изменяется с течением времени гораздо медленнее, чем $\cos \omega t$. Поэтому (3.53) приближенно можно считать гармоническим колебанием с медленно пульсирующей амплитудой

$$A = \left| 2A_o \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|, \quad (3.54)$$

период изменения которой равен

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (3.55)$$

Периодические изменения амплитуды результирующего колебания при наложении двух гармонических колебаний одинакового направления с близкими частотами называются биениями.

Заметим, что частота биений

$$\omega_\delta = \frac{2\pi}{T_\delta} = \Delta\omega \quad (3.56)$$

равна разности частот складываемых колебаний.

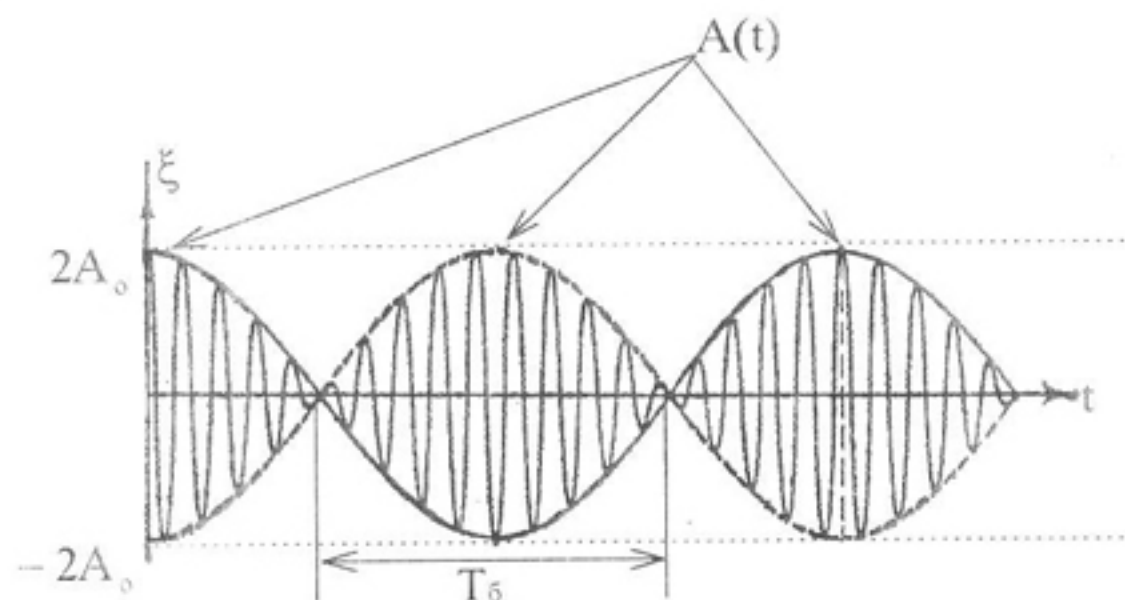


Рис.3.7

Качественная картина зависимости (3.53) изображена на рис.3.7, где сплошная линия — график самого колебания (3.53), а пунктирные огибающие дают размах колебаний в данный момент времени t .

Выводы

При сложении двух гармонических колебаний одного направления при равенстве частот получается гармоническое колебание той же частоты. При малом различии частот амплитуда результирующего колебания пульсирует с частотой, равной разности частот складываемых колебаний.

Контрольные вопросы

- 3.18. Что представляет собой результирующий процесс при наложении двух гармонических колебаний с равными частотами и одного направления?
- 3.19. Выведите формулы (3.49) и (3.50) на основе (3.45) и (3.46) с помощью прямых тригонометрических преобразований.
- 3.20. Какой колебательный процесс называется биениями? При каких условиях он реализуется?

3.2.3.2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Исследуем результат сложения двух гармонических колебаний, происходящих вдоль взаимно перпендикулярных направлений: осей координат x и y . Уравнения колебаний можно записать в виде

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t, \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \Delta\varphi_0), \end{cases} \quad (3.57)$$

где начало отсчета времени выбрано так, чтобы начальная фаза колебания вдоль оси x была равна нулю. В этом случае $\Delta\varphi_0$ представляет собой начальную разность фаз складываемых колебаний. Уравнения (3.57) задают в параметрической форме траекторию результирующего колебания, которая в общем случае имеет очень сложную форму.

Рассмотрим вначале случай, когда частоты складываемых колебаний равны между собой: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. При этом условии уравнение траектории результирующего колебания легко получить в явном виде, исключая из (3.57) параметр t . Из первого уравнения (3.57) имеем

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t, \Rightarrow \sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2}. \quad (3.58)$$

Второе уравнение (3.57) преобразуем к виду

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \Delta\varphi_0) = \cos \omega t \cos \Delta\varphi_0 - \sin \omega t \sin \Delta\varphi_0.$$

Подставляя (3.58) в последнее равенство и избавляясь от иррациональности, после элементарных преобразований получим *уравнение эллипса*

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \Delta\varphi_0, \quad (3.59)$$

оси которого ориентированы произвольным образом относительно осей координат.

Такие колебания называются *эллиптически поляризованными*.

Полезно рассмотреть некоторые частные случаи траектории (3.59) в зависимости от значения $\Delta\varphi_0$.

1) Пусть $\Delta\varphi_0 = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При этом условии $\cos \Delta\varphi_0 = \pm 1$, где знак плюс соответствует значениям $m = 2n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а минус - нечетным значениям m . Уравнение (3.59) вырождается в уравнение отрезка прямой



Рис.3.8

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{A_2}{A_1}. \quad (3.61)$$

В произвольный момент времени t положение результирующего колебания на координатной плоскости XU определяется точкой

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \omega t, \quad (3.62)$$

где учтено (3.57) и (3.60). Таким образом, результирующее колебание является *гармоническим* с частотой ω и амплитудой

$$a = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Подобные колебания называются *линейно поляризованными*.

$$2) \text{ Если } \Delta \varphi_0 = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

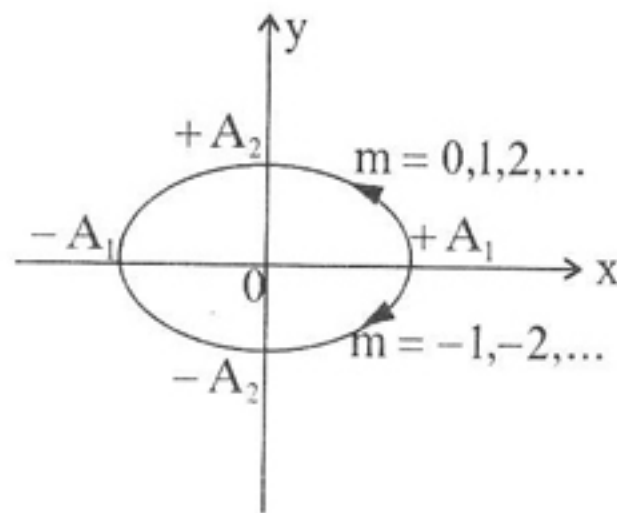


Рис.3.9

то уравнение (3.59) переходит в уравнение эллипса, приведенного к осям координат (рис.3.9)

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (3.63)$$

При условии $m = 1, 2, \dots$ «движение» по эллипсу происходит против часовой стрелки, а при $m = -1, -2, \dots$, - по часовой стрелке.

Если амплитуды складываемых колебаний равны между собой, т.е. $A_1 = A_2 = R$, то результирующее «движение» представляет равномерное вращение вектора \vec{R} в плоскости XOU относительно его начала. Такое результирующее колебание называется *циркулярно поляризованным* или колебанием *с круговой поляризацией*. Следовательно, равномерное движение материальной точки по окружности радиуса R с угловой скоростью ω можно предста-

вить, как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t.$$

Интересно, на наш взгляд, описать случай, когда частоты складываемых колебаний (3.57) не равны друг другу, т.е. $\omega_1 \neq \omega_2$.

Если частоты $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ мало отличаются друг от друга, т.е. $\Delta\omega \ll \omega$, то уравнения (3.57) можно записать в виде

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t, \\ y = A_2 \cos[\omega t + (\Delta\omega t + \varphi_0)] = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi(t)). \end{cases} \quad (3.64)$$

Такая форма записи свидетельствует о том, что разность фаз складываемых колебаний

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\omega t + \Delta\varphi_0$$

медленно по сравнению с самими фазами изменяется со временем. Результирующий процесс описывается медленно изменяющейся по форме кривой, соответствующей значениям разности фаз

$$0 \leq \Delta\varphi(t) \leq m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

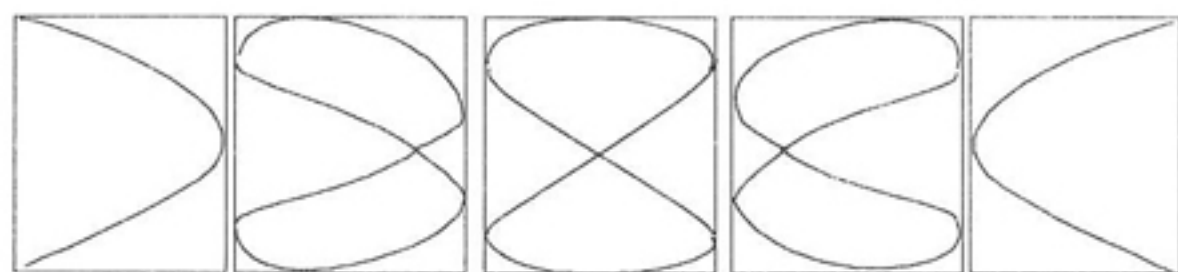
На рис.3.10 представлены траектории для различных значений разности фаз $\Delta\varphi$ в пределах половины периода основного результирующего колебания.



Рис.3.10

В случае различных частот $\omega_1 \neq \omega_2$ результирующая «траектория» имеет сложный вид. Соответствующие кривые назы-

ваются *фигурами Лиссажу*. Для примера на рис.3.11 приведен вид таких кривых, соответствующих условию $\omega_2 = 2\omega_1$ и различным



$\Delta\varphi = 0$ $\pi/4$ $\pi/2$ $3\pi/4$ π

Рис.3.11

значениям разности фаз $\Delta\varphi_0$. В общем случае форма фигур Лиссажу зависит от соотношения частот и разности фаз складываемых колебаний. Фигуры Лиссажу используют для определения параметров и характера взаимно перпендикулярных колебаний.

Выводы

При сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний характер результирующего процесса существенным образом определяется соотношениями амплитуд, частот и разностью фаз исходных колебаний.

Контрольные вопросы

- 3.21. Опишите характер результирующего колебания при сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с равными частотами при различных значениях разности фаз. Какие виды поляризации и при каких условиях могут быть получены в этом случае?
- 3.22. Что называется фигурой Лиссажу?
- 3.23. Как по виду фигуры Лиссажу определить соотношение частот складываемых колебаний?

3.3. Затухающие колебания

В реальных колебательных системах энергия колебаний переходит в другие виды за счет трения, сопротивления среды, излу-

чения энергии и т.д. При небольших скоростях колебательного процесса в первом приближении можно считать, что «силы», приводящие к потерям энергии колебаний, пропорциональны скорости процесса. В этом случае *дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний* имеет вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (3.65)$$

где слагаемое $2\beta \frac{d\xi}{dt}$ обусловлено указанными «силами». Постоянная величина β называется *коэффициентом затухания*. Ее смысл будет пояснен ниже.

Покажем, что для пружинного маятника уравнение его движения имеет вид (3.65). В этом случае, кроме упругой силы $F_y = -kx$, на материальную точку действует сила сопротивления, пропорциональная скорости колебаний

$$F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad (3.66)$$

где $r = \text{const}$ - коэффициент сопротивления. Знак минус в (3.66) обусловлен противоположными направлениями векторов \vec{F}_c и \vec{v} . На основании второго закона Ньютона имеем

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt},$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (3.67)$$

Если в уравнении (3.67) ввести обозначения $\frac{r}{m} = 2\beta$ и $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, то получим уравнение (3.65).

Для реально колебательного контура $R \neq 0$, поэтому уравнение (3.35)

$$JR = \frac{dq}{dt}R = -L \frac{dJ}{dt} - \frac{q}{C}$$

также приводится к виду (3.65)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (3.68)$$

Если ввести обозначения $\frac{R}{L} = 2\beta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, то имеем (3.65).

Равенство (3.65) является *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка*, которое подстановкой

$$\xi = e^{-\beta t} S(t), \quad (3.69)$$

где $S(t)$ - пока неизвестная функция времени, легко приводится к виду

$$\frac{d^2S}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)S = 0. \quad (3.70)$$

Характер решения (3.70) существенным образом зависит от знака множителя $\omega_0^2 - \beta^2$.

Рассмотрим вначале наиболее важный и интересный, с практической точки зрения, случай, когда $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, т.е. $\omega_0 > \beta$. Обозначив разность $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$, что при условии $\omega_0 > \beta$ всегда можно сделать, запишем уравнение (3.70) в форме

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 S = 0, \quad (3.71)$$

которая совпадает с (3.9). Решение уравнения (3.71) нам уже известно, оно является гармонической функцией

$$S = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.72)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а постоянные величины A_0 и φ_0 определяются начальными условиями. Объединяя (3.69) и (3.72), окончательно получим

$$\xi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0). \quad (3.73)$$

Таким образом, при не слишком большом коэффициенте затухания ($\beta < \omega_0$) в колебательной системе происходит процесс с постоянной частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (3.74)$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.75)$$

Здесь период колебаний T следует понимать как промежуток времени между двумя последовательными максимальными смещениями величины ξ от ее равновесного значения. При этом амплитуда колебаний

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (3.76)$$

монотонно убывает по экспоненциальному закону, стремясь к нулю

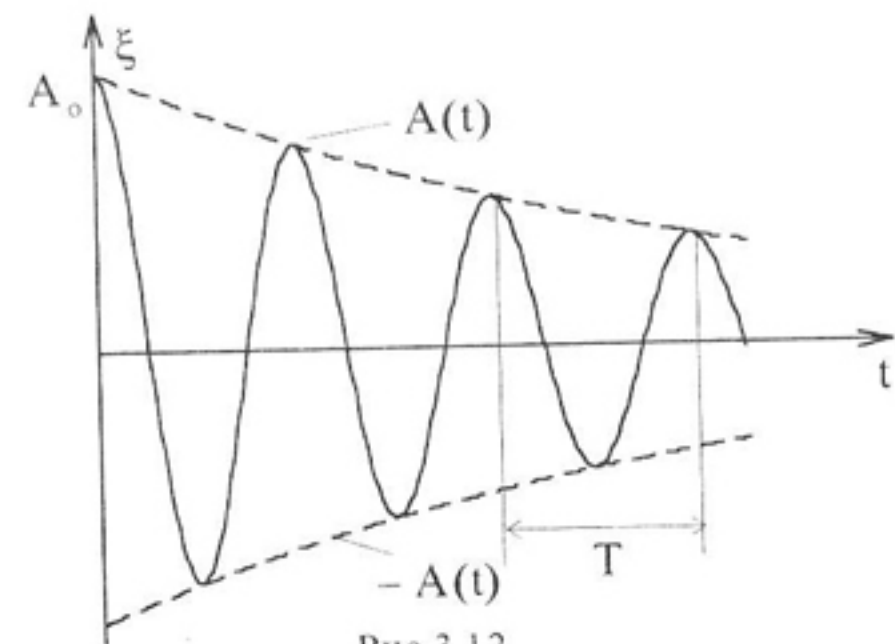


Рис.3.12

при $t \rightarrow \infty$. На рис.3.12 показана зависимость (3.73) для значения $\varphi_0 = 0$, где A_0 - начальная амплитуда. Пунктирными линиям соответствует равенство (3.76).

Выражение (3.76) позволяет прояснить физический смысл коэффициента затухания β . Рассмотрим изменение амплитуды (3.76) за промежуток времени

$$\tau = 1/\beta. \quad (3.77)$$

За это время амплитуда уменьшается в e раз. Действительно,

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\frac{1}{\beta})}} = e.$$

Таким образом, коэффициент затухания β численно равен величине, обратной тому промежутку времени τ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз. Соответствующий промежуток времени τ называется *временем релаксации*.

Для характеристики колебательных систем с затуханием используют следующие важные параметры.

1) *Декремент затухания* (величина, равная отношению двух последовательных значений амплитуд, взятых через период)

$$\chi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \quad (3.78)$$

2) *Логарифмический декремент затухания*

$$\lambda = \ln \chi = \beta T. \quad (3.79)$$

Легко видеть, что $\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$, где N_e - число колебаний, совершаемых системой за время релаксации.

3) *Добротность колебательной системы* - величина, пропорциональная числу колебаний N_e , которая вводится следующим образом:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (3.80)$$

Добротности колебательной системы можно придать различную трактовку. В частности, при малом затухании $\beta \ll \omega_0$ добротность обратно пропорциональна той части полной энергии системы W в данный момент времени, которую она теряет ΔW за один период вследствие затухания

$$Q = \frac{2\pi}{(-\Delta W)/W}. \quad (3.81)$$

Для примера запишем конкретный вид величин, характеризующих электромагнитные затухающие колебания в реальном колебательном контуре.

Решение уравнения (3.68) с учетом (3.73) имеет вид

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \varphi_0\right), \quad (3.82)$$

где $\frac{R}{2L} = \beta$; $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega$. Добротность колебательного контура определяется формулой

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.83)$$

при условии $\beta = \frac{R}{2L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$.

При определенном наборе параметров, когда $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, т.е. $\omega_0 < \beta$, затухание в системе оказывается настолько сильным, что никаких колебаний не происходит. В этом случае решение уравнения (3.70) имеет вид

$$S = A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t},$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Учитывая (3.69), получим, что процесс в колебательной системе будет описываться функцией

$$\xi = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) t}, \quad (3.84)$$

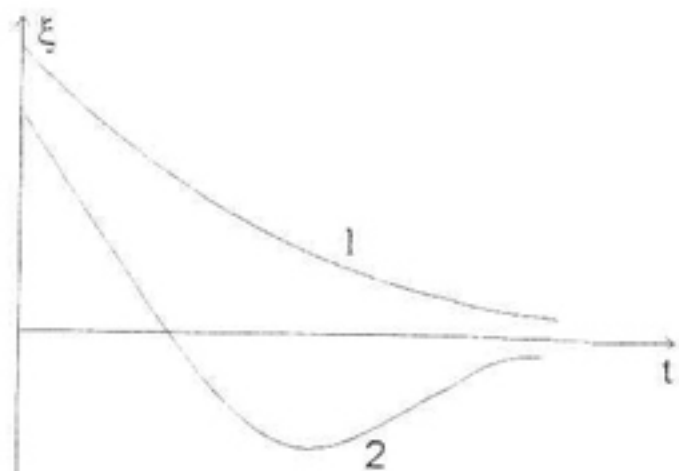


Рис.3.13

вид которой в зависимости от начальных условий изображен на рис.3.13. Кривая 1 соответствует случаю, когда система, будучи выведена из состояния равновесия, отпускается без дополнительного толчка или, если этот толчок достаточно слаб. При этом система плавно возвращается к состоянию равновесия. Если при отклонении системы сообщить ей сильный толчок в сторону состояния равновесия, то этому случаю соответствует кривая 2 на рис. 3.13.

Режимы установления равновесия для данного случая $\omega_0 < \beta$ называются *апериодическими (непериодическими)*.

Переход от периодического к апериодическому режиму происходит при условии

$$\beta = \beta_{кр} = \omega_0, \quad (3.85)$$

которое определяет *критическое значение коэффициента затухания* колебательной системы. В частности, для колебательного контура равенство (3.85) примет вид

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.86)$$

Выводы

В колебательной системе при наличии затухания возможны два режима установления равновесного состояния: периодический с экспоненциально убывающей со временем амплитудой и апериодический при достаточно большом значении коэффициента затухания.

Контрольные вопросы

- 3.24. Запишите общий вид дифференциального уравнения для колебательной системы с затуханием. Какую конкретную форму принимает это уравнение в случаях пружинного маятника и колебательного контура?
- 3.25. Какими свойствами и при каких условиях обладает решение уравнения (3.65)? Какие режимы процессов описывают эти решения?
- 3.26. Дайте определения и поясните смысл параметров: коэффициента затухания, декремента и логарифмического декремента затухания, добротности колебательной системы.
- 3.27. Какими равенствами определяются коэффициент затухания и добротность конкретных колебательных систем? Приведите примеры.
- 3.28. Докажите равенство (3.81).
- 3.29. Что называется критическим значением коэффициента затухания?

3.4. Вынужденные колебания

В предыдущем пункте 3.3 были описаны процессы, возникающие в колебательной системе при наличии линейных воздействий, т.е. пропорциональных скорости процесса, и приводящих к потерям энергии колебаний. Существует много различных способов восполнения этих потерь за счет энергии каких-либо внешних по отношению к колебательной системе источников. Одним из наиболее распространенных способов является действие на систему внешней периодической вынуждающей «силы», изменяющейся по гармоническому закону с циклической частотой Ω . В случае пружинного маятника внешняя вынуждающая сила записывается в виде

$$F = F_0 \cos \Omega t, \quad (3.87)$$

а соответствующее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (см.(3.67)) принимает форму

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (3.88)$$

Для колебательного контура роль вынуждающей «силы» играет внешняя ЭДС, включенная в контур, или подводимое к нему переменное напряжение

$$U = U_0 \cos \Omega t. \quad (3.89)$$

Уравнение (3.68) в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos \Omega t. \quad (3.90)$$

Легко видеть, что уравнения (3.88) и (3.90) имеют аналогичный вид, которому с помощью обозначений $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{F_0}{m} = f_0$, или $\frac{R}{L} = 2\beta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, $\frac{U_0}{L} = f_0$, соответственно, можно придать универсальную форму:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = f_0 \cos \Omega t. \quad (3.91)$$

Уравнение (3.91) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения ξ_0 с нулевой правой частью (найденно в предыдущем пункте) и любого частного решения неоднородного уравнения ξ_n , т.е.

$$\xi = \xi_0 + \xi_n.$$

Мы будем здесь рассматривать случай не очень сильного затухания, когда $\beta < \omega_0$. Общее решение однородного уравнения определяется равенством (3.73)

$$\xi_0 = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0\right). \quad (3.92)$$

Частное решение уравнения (3.91) будем искать в виде

$$\xi_n = A \cos(\Omega t - \alpha), \quad (3.93)$$

где неизвестные параметры A и α определим, требуя, чтобы функция $\xi_n(t)$ (3.93) удовлетворяла уравнению (3.91). Найдем производные по времени функции (3.93)

$$\frac{d\xi_n}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t - \alpha) = A\Omega \cos\left(\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) = A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha + \pi)$$

и подставим их вместе с (3.93) в уравнение (3.91)

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha + \pi) + 2\beta A\Omega \cos\left(\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t - \alpha) = f_0 \cos \Omega t. \quad (3.94)$$

Последнее равенство должно выполняться для любого момента времени t . Его можно интерпретировать следующим образом: гармоническая функция $f_0 \cos \Omega t$, стоящая в правой части равенства, равна сумме трех гармонических функций в левой части равенства, сдвинутых по фазе друг относительно друга. Проще и нагляднее произвести сложение, используя метод векторной диаграммы (см.п.3.2.3.1). Изобразим слагаемые, входящие в равенство (3.94), в виде векторов, как показано на рис.3.14.

Причем рис.3.14,а отвечает условию $\omega_0 > \Omega$, а рис.3.14,б - условию $\omega_0 < \Omega$. Сумма векторов $\vec{\Omega^2 A}$, $\vec{\omega_0^2 A}$ и $2\beta A \Omega$ равна вектору $\vec{f_0}$, если выполняется равенство

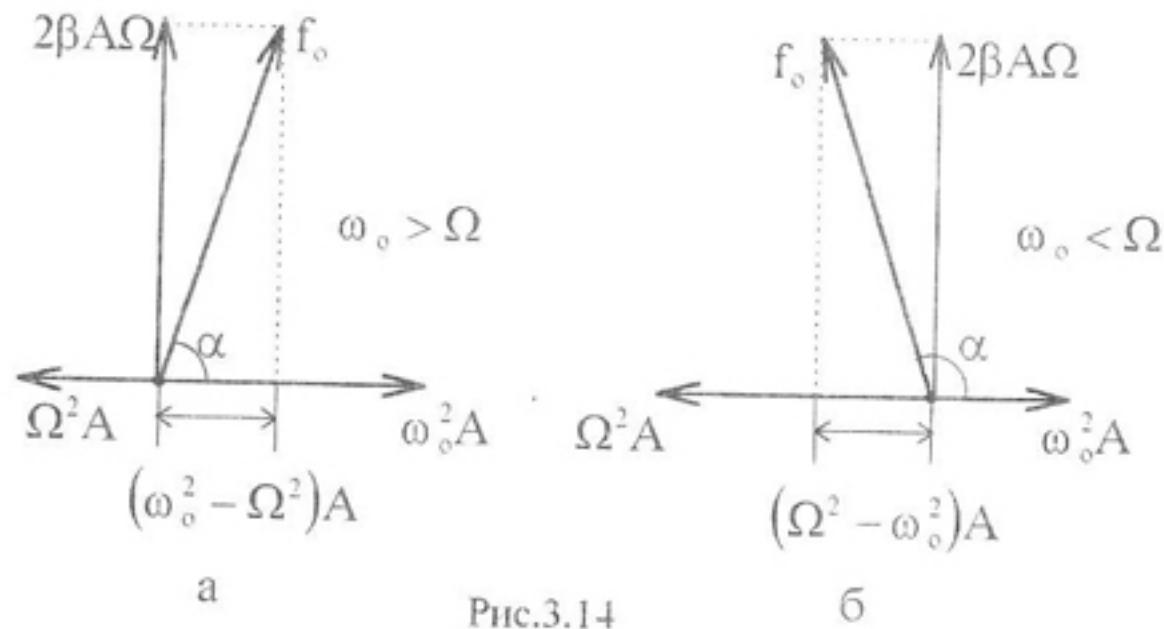


Рис.3.14

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \Omega^2 A^2 = f_0^2.$$

Откуда для амплитуды A получим формулу

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (3.95)$$

Из рис.3.14 также можно легко получить значение константы α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (3.96)$$

Таким образом, функция (3.93) является частным решением уравнения (3.91), если A и α удовлетворяют равенствам (3.95) и (3.96) соответственно. Теперь общее решение уравнения (3.91) примет вид

$$\xi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t - \alpha). \quad (3.97)$$

Из (3.97) видно, что результирующий процесс в колебательной системе при действии гармонической вынуждающей «силы» представляет собой наложение собственных затухающих колебаний (первое слагаемое в (3.97)) и гармоническое колебание с частотой Ω . Причем, спустя достаточно большой промежуток времени t' после начала процесса, обязательно начнет выполняться условие

$$A_0 e^{-\beta t'} \ll A,$$

которое означает, что собственными колебаниями по сравнению с вынужденной компонентой можно пренебречь. Поэтому при $t > t'$ в системе остаются только вынужденные колебания

$$\xi = A \cos(\Omega t - \alpha) \quad (3.98)$$

с частотой вынуждающей «силы», амплитуда A и начальная фаза α которых определяются формулами (3.95) и (3.96).

Интересно отметить очень важный результат, который вытекает из (3.95), играющий огромную роль в практике. Он обусловлен тем фактом, что, как видно из (3.95), амплитуда вынужденных установившихся колебаний зависит не только от параметров ω_0 и β колебательной системы, но и от частоты вынуждающей «силы» Ω . Эта зависимость позволяет объяснить ряд так называемых *резонансных явлений*, которые проявляются, как правило, в резком возрастании амплитуды вынужденных колебаний.

Различают несколько видов резонансов. Рассмотрим некоторые, наиболее важные, на наш взгляд, случаи.

Вначале исследуем ситуацию, когда параметры самой колебательной системы остаются постоянными ($\omega_0 = \text{const}$), а частота вынуждающей силы Ω изменяется. Для нахождения максимума амплитуды, продифференцировав выражение (3.95) по Ω и приравняв производную нулю, получим уравнение, определяющее резонансную частоту $\Omega_{\text{рез}}$:

$$4(\omega_0^2 - \Omega_{\text{рез}}^2)\Omega_{\text{рез}} - 8\beta^2\Omega_{\text{рез}} = 0.$$

Максимуму амплитуды отвечает решение этого уравнения:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (3.99)$$

Само же резонансное значение амплитуды получим, подставив (3.99) в (3.95)

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.100)$$

Заметим, что резонансное значение частоты вынуждающей «силы» всегда меньше собственной частоты затухающих колебаний ω :

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Равенство может быть достигнуто только при отсутствии затухания, т.е.

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0, \text{ при } \beta = 0.$$

На рис.3.15 схематически изображены *резонансные кривые*, отвечающие рассмотренному случаю и соответствующие различным значениям коэффициента затухания β . Пунктирной кривой отмечена резонансная зависимость $A(\Omega)$ для значения $\beta = 0$. Из

(3.99) видно, что при $\beta^2 \rightarrow \frac{\omega_0^2}{2}$ резонансная частота $\Omega_{\text{рез}} \rightarrow 0$.

Это означает, что при достаточно большом затухании, когда $2\beta^2 > \omega_0^2$, явления резонанса не наступает вовсе ни при каких

значениях Ω . На рис.3.15 этот случай отвечает монотонно убывающей кривой (β_3). Все резонансные кривые при $\Omega = 0$ начинаются в одной точке $\frac{f_0}{\omega_0}$, что соответствует смещению системы

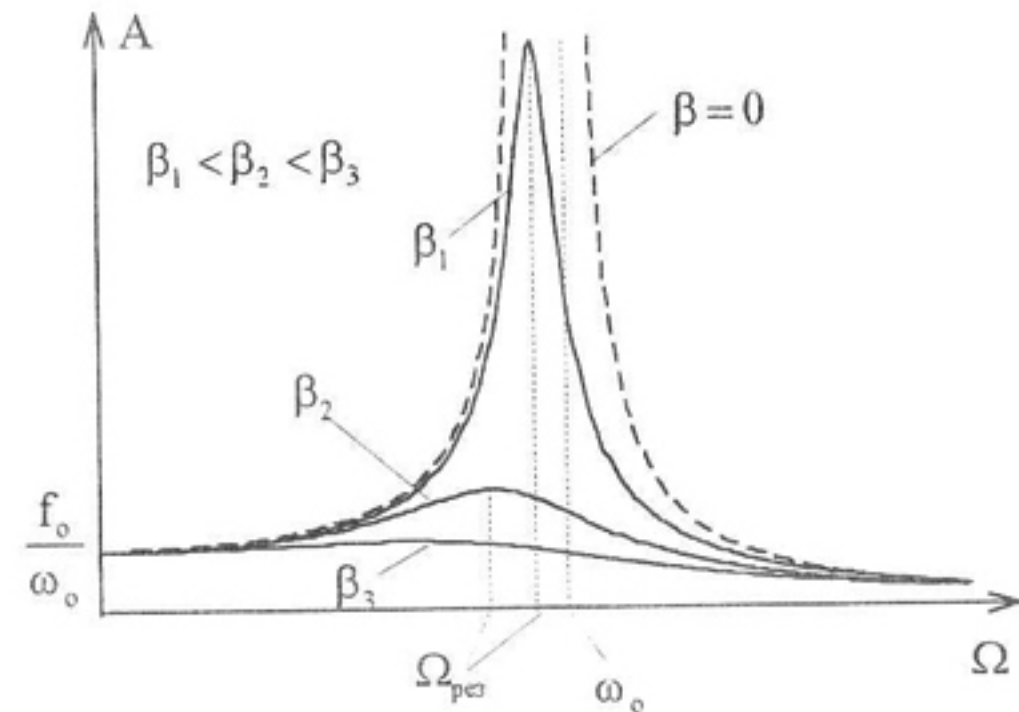


Рис.3.15

от состояния равновесия под действием постоянной силы F_0 (3.87). При $\Omega \rightarrow \infty$ амплитуда вынужденных колебаний $A \rightarrow 0$, так как в этом случае вынуждающая «сила» так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из состояния равновесия. На рис. 3.16 изображены *фазовые резонансные кривые* $\alpha(\Omega)$ (3.96) для различных значений коэффициента затухания. Из равенства (3.95) видно, что при $\Omega = \omega_0$ вынуждающая «сила» опережает сами колебания по фазе на $\pi/2$, а при $\Omega \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow \pi$, т.е. изменения вынуждающей «силы» (3.87) и вынужденные колебания происходят в противоположной фазе.

На практике часто встречаются случаи использования резонансных явлений, когда частота вынуждающей «силы» Ω постоянна, а изменяется собственная частота ω_0 колебательной

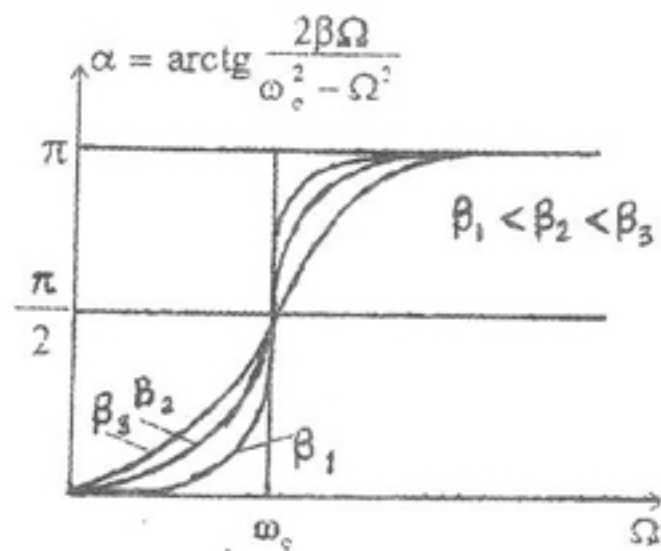


Рис.3.16

системы. Предполагается, что при изменении ω_0 коэффициент затухания β остается постоянным. Подобная ситуация реализуется, в частности, при настройке радиоприемника на частоту Ω передающей радиостанции, что достигается изменением емкости в колебательном контуре, связанном с антенной. В этом случае для установления условия резонанса необходимо выражение (3.96) продифференцировать по ω_0 и приравнять производную $\frac{dA}{d\omega_0}$ к нулю. В результате получим условие резонанса

$$\omega_{0 \text{ рез}} = \Omega, \quad (3.101)$$

которое отличается от (3.99). Подставляя (3.101) в (3.95), получим значение резонансной амплитуды вынужденных колебаний

$$A'_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\Omega}. \quad (3.102)$$

Рассмотренные случаи резонансов связаны с возрастанием амплитуды вынужденных колебаний, поэтому они объединяются общим названием *резонанс смещения* (В колебательном контуре это соответствует *резонансу напряжения* на обкладках конденсатора).

Интересно, на наш взгляд, упомянуть, хотя бы кратко, *резонансное явление, обусловленное возрастанием амплитуды v_{max} скорости вынужденных колебаний.* (В колебательном контуре это соответствует *резонансу тока*). Так как $v = \frac{d\xi}{dt}$, то из (3.98) с учетом (3.95) получим

$$v_{\text{max}} = \frac{f_0 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (3.103)$$

В обоих случаях: $\omega_0 = \text{const}$, Ω -изменяется и $\Omega = \text{const}$, ω_0 -изменяется; максимальное значение амплитуды скорости вынужденных колебаний $(v_{\text{max}})_{\text{max}}$ достигается при одном и том же условии

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0 \text{ или } \omega_{0 \text{ рез}} = \Omega. \quad (3.104)$$

При этом само максимальное значение амплитуды скорости равно

$$(v_{\text{max}})_{\text{max}} = \frac{f_0}{2\beta}. \quad (3.105)$$

Выводы

Вынужденные установившиеся колебания под действием гармонической «силы» происходят с частотой вынуждающей «силы». Амплитуда и начальная фаза колебаний существенным образом зависят не только от параметров колебательной системы, но и от частоты вынуждающей силы, что обуславливает существование резонансных явлений.

Контрольные вопросы

3.30. Запишите общий вид дифференциального уравнения вынужденных колебаний. Какой конкретный вид

имеет это уравнение для пружинного маятника, колебательного контура?

- 3.31. Запишите вид общего решения в случае вынужденных колебаний. Как это решение выглядит в случае установившихся колебаний?
- 3.32. Перечислите наиболее важные случаи резонансов. При каких условиях они реализуются?
- 3.33. Докажите условия (3.104).

4. Волновые процессы

4.1. Общие сведения о волнах

Волной называется любое возмущение, которое распространяется в пространстве и переносит при этом энергию.

Обычно перенос энергии волной происходит без переноса вещества.

Наиболее часто встречающимися по своей физической природе являются:

- *упругие* (в том числе и звуковые) волны, обусловленные распространением в среде упругих деформаций;
- *волны на поверхности жидкости*, связанные с локальными изменениями уровня свободной поверхности жидкости;
- *электромагнитные волны*, распространяющиеся в пространстве электромагнитные поля.

Механизмы распространения волн существенным образом зависят от их природы. Например, в жидкостях и газах упругие волны представляют собой чередующиеся перепады давления (сжатия и разрежения), которые за счет взаимодействия между частицами передаются соседним областям среды. В основе механизма распространения электромагнитных волн лежат такие физические явления, как электромагнитная индукция (изменяющееся магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле) и возникновение магнитного поля в пространстве, где имеется переменное электрическое поле (токи смещения). Возбуждая друг друга, переменные электрические и магнитные поля в виде единого объекта электромагнитного поля распространяются в пространстве.

Форма волны, т.е. вид функции, которой описывается распространяющееся возмущение, существенным образом зависит от

характера воздействия на среду *источника волнового процесса (источника излучения)*. Если источник создает кратковременное воздействие на среду, то волна представляет собой распространяющийся одиночный импульс. Если же источник создает длительные повторяющиеся возмущения среды, то волновой процесс обладает соответствующей периодичностью.

В математике доказывается, что как периодическую, так и не периодическую функцию можно разложить на *гармонические компоненты*, частоты которых образуют дискретную или непрерывную последовательность. Возможность такого разложения является одной из причин, по которой важно изучать явления распространения именно гармонических возмущений (волн) различной природы. Изучение гармонических волн важно и по другой причине: при распространении таких волн в слабо поглощающей линейной среде они практически не изменяют своей формы, т.е. остаются гармоническими. Произвольное возмущение при его распространении за редкими исключениями сохраняет неизменной свою форму.

Рассмотрим некоторое возмущение, создаваемое периодически воздействующим на среду источником, начиная с некоторого момента времени $t_0 = 0$. Поскольку возмущение распространяется с конечной скоростью, то к моменту времени t все пространство будет разделено на две части. В одной части, прилегающей к источнику, к моменту t волновой процесс уже идет, а в другой еще нет. Поверхность, отделяющая друг от друга эти области пространства, называется *фронтом волны*. Легко понять, что в каждый момент времени t эта поверхность *единственная*. Форма фронта волны зависит от формы источника, характера возмущения, создаваемого источником, а также от свойств среды, в которой это возмущение распространяется. Различают следующие простейшие формы фронта волны: *плоский, сферический и цилиндрический*.

Кроме фронта волны, для характеристики волнового процесса часто используют понятие *фазовой поверхности*. При этом подразумевается, что при распространении колебаний *существует геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, которое и называется фазовой или волновой поверхностью*.

Очевидно, что волновые поверхности могут существовать в области пространства, уже охваченной волновым процессом, т.е. за фронтом волны.

Отметим, что *для гармонических волн форма волновых поверхностей и фронта волны одинаковы*.

Возмущения, переносимые волной, могут быть различно ориентированы относительно направления распространения.

Например, в жидкостях и газах смещения частиц происходят при сжатии и разрежении, т.е. вдоль направления распространения волны. Такие волны называются *продольными*.

Если же возмущение происходит в направлении, перпендикулярном распространению волны, то такая волна называется *поперечной*. Поперечными являются волны на свободной поверхности жидкости, электромагнитные волны в изотропной среде.

В случае поперечных волн возмущения могут быть по-разному ориентированы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. С этими различиями тесно связано понятие *поляризации* волн. Виды поляризованных волн определяются характером колебаний в возмущении (см. например, п.3.2.3.2).

Следует уточнить сущность понятия "*скорость распространения волн*", которое упоминалось выше. Говорить о скорости распространения возмущения (волны) имеет смысл только в том случае, если форма возмущения при его распространении не изменяется. В этом случае на возмущении можно выделить *определенную точку* («поставить метку») и следить за ее *скоростью перемещения*. Если же форма возмущения изменяется, то такую точку выделить нельзя, а поэтому понятие скорости распространения волны теряет определенность. В таких ситуациях понятие скорости требует конкретного уточнения.

Отметим, что одной из важнейших причин изменения формы волны является *дисперсия волн*. Выше уже говорилось о том, что возмущение любой формы можно представить как результат наложения гармонических волн. Большинство сред обладают тем свойством, что *скорость распространения гармонической волны зависит от ее частоты*. Эта зависимость называется *дисперсией* и является одной из возможных причин искажения формы возмущения.

Выводы

Волна - это возмущение любой физической природы и формы, распространяющееся в пространстве и переносящее при этом энергию. Форма возмущения при распространении может существенно изменяться.

Контрольные вопросы

- 4.1. Перечислите наиболее распространенные по физической природе волны. Каковы их механизмы распространения?
- 4.2. Что называется фронтом волны, волновой поверхностью? Перечислите простейшие формы фронтов.
- 4.3. Какие волны называются продольными, поперечными? Приведите примеры и дайте этому обоснование на основе механизма распространения.
- 4.4. С какими особенностями волн связано понятие поляризации? Какие виды поляризации Вы можете указать?
- 4.5. При каком условии можно говорить о скорости распространения волны?
- 4.6. В чем заключается сущность понятия "дисперсия волн"?

4.2. Гармонические волны

Как уже указывалось выше, волновые процессы могут иметь различную физическую природу. Однако несмотря на различия в природе волн, существуют общие закономерности в описании их распространения в пространстве. Эти закономерности проще всего выявить на примере описания простейших моделей волновых процессов: *гармонических волн*.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, предполагается, что среда, в которой распространяется волна, является *однородной, изотропной и не поглощает энергию, переносимую волной*. При указанных условиях волна остается гармонической и ее фронт и волновые поверхности не искажаются.

4.2.1. Плоская гармоническая волна

При распространении плоской гармонической волны волновые поверхности представляют собой бесконечную систему параллельных плоскостей, в каждой из которых колебания происходят в одинаковой фазе. Опишем распространение такой волны. Для этого поместим начало координат на волновой плоскости (рис.4.1), в каждой точке которой колебания происходят по закону

$$\xi_0 = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.1)$$

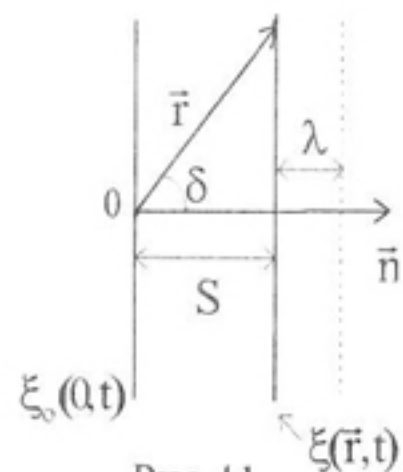


Рис. 4.1

Отметим, что во многих случаях начало системы координат помещают на волновой поверхности, которую принимают за источник волны.

Колебания $\xi(\vec{r}, t)$ в точках волновой плоскости, расположенной от начала координат на расстоянии S в направлении распространения волны \vec{n} ($|\vec{n}| = 1$), будут отставать по времени от

колебаний ξ_0 на величину $\tau = S/v$, где v - скорость распространения волны, и иметь вид

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos\left[\omega(t - \tau) + \varphi_0\right] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{S}{v}\right) + \varphi_0\right] = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}S + \varphi_0\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Выражения (4.2) представляют собой некоторые частные формы записи *уравнения плоской гармонической волны*.

Отметим, что гармоническая волна, кроме периодичности во времени с периодом $T = 2\pi/\omega$ на фиксированной волновой плоскости ($S = \text{const}$), обладает периодичностью в пространстве. Действительно, для колебаний на волновой плоскости, изображенной на рис. 4.1 пунктиром, в которой колебания отстают по фазе на 2π от колебаний (4.2), выражение для фазы можно записать в двух формах для одного и того же момента времени t

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega}{v}S + \varphi_0 - 2\pi = \omega t - \frac{\omega}{v}(S + \lambda) + \varphi_0, \quad (4.3)$$

где символом λ обозначено *расстояние между волновыми плоскостями, фазы колебаний в которых отличаются на 2π* . Из (4.3) следует равенство $\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi$, с учетом $\omega = \frac{2\pi}{T}$ принимающее вид

$$\lambda = vT. \quad (4.4)$$

Другими словами, λ - это *расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний*. Параметр λ называется *длиной волны* и определяет *пространственный период волны*. В волновых плоскостях, отстоящих друг от друга на расстоянии λ , колебания происходят синхронно.

В связи с существованием у волны пространственного периода логично ввести связанное с ним понятие *пространственной частоты* (по аналогии с циклической частотой $\omega = 2\pi/T$)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \quad (4.5)$$

Величина k (4.5) называется *волновым числом* и позволяет представить уравнение плоской волны (4.2) с симметричной формой записи фазы

$$\xi = A \cos(\omega t - kS + \varphi_0). \quad (4.6)$$

Колебания произвольной точки на волновой плоскости, положение которой определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 4.1), удобно описывать с помощью *волнового вектора* \vec{k} , модуль которого равен волновому числу, $(|\vec{k}| = \frac{\omega}{v})$, а направление совпадает с направлением распространения волны \vec{n} , т.е.

$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}. \quad (4.7)$$

Легко видеть (см. рис.4.1), что в этом случае справедливы равенства

$$(\vec{k}\vec{r}) = k(\vec{n}\vec{r}) = kr \cos\delta = kS. \quad (4.8)$$

Используя (4.8), уравнение (4.6) перепишем в виде

$$\xi = A \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi_0). \quad (4.9)$$

Последнее выражение представляет собой самую общую форму записи *плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении*. Уравнение (4.9) необходимо использовать в случае, когда описываются процессы, связанные с распространением двух или более плоских волн в различных направлениях. Когда рассматривается одиночная плоская волна, удобнее пользоваться упрощенным видом уравнения (4.6). Напомним, что в декартовой системе координат произведение $(\vec{k}\vec{r})$ может быть записано в форме

$$(\vec{k}\vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma), \quad (4.10)$$

где α, β, γ - углы между волновым вектором \vec{k} и осями координат Ox, Oy, Oz соответственно.

Уточним теперь смысл понятия скорости распространения v , которое было использовано при записи уравнения (4.2) и ниже. Рассмотрим волновую поверхность, в точках которой фаза колебаний (4.2) имеет постоянное значение:

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega}{v} S + \varphi_0 = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство по времени t , найдем, что *скорость, с которой перемещается поверхность постоянной фазы* $\frac{dS}{dt}$, равна скорости распространения волны v , т.е.

$$\frac{dS}{dt} = v. \quad (4.11)$$

Эта скорость называется *фазовой скоростью волны*. Часто уравнение плоской волны записывают, используя экспоненциальную форму записи, которая во многих случаях более удобна, чем (4.9):

$$\xi = \hat{a} e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}))}. \quad (4.12)$$

Здесь множитель $\hat{a} = A e^{i\varphi_0}$ называется *комплексной амплитудой*, модуль которой определяет амплитуду A , а аргумент - начальную фазу φ_0 волны. В выражении (4.12) физический смысл имеет только его действительная часть.

В заключение этого пункта отметим, что при наличии затухания в среде в уравнение плоской волны (4.9) следует добавить множитель $e^{-\gamma(\vec{n}\vec{r})}$, где \vec{n} - единичный вектор нормали к волновой поверхности, а γ - коэффициент затухания.

Выводы

Получена общая форма (4.9) уравнения плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении. Пространственная периодичность волны и направление ее распространения определяются волновым вектором.

Контрольные вопросы

4.7. Запишите и поясните смысл уравнения плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении.

4.8. Как выглядят уравнения плоской гармонической волны для случаев $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_x, \vec{k} \uparrow \downarrow \vec{e}_x; \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_y; \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$, где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат?

4.9. Поясните смысл и роль волнового вектора в описании плоской волны.

4.10. Перечислите общие условия, при которых справедливо уравнение (4.9).

4.11. Что называется фазовой скоростью волны? Каков смысл этого понятия?

4.2.2. Сферическая гармоническая волна

Сферической волной называется возмущение среды, которое при его распространении зависит только от времени и расстояния r от некоторой точки. Эта точка является источником или центром волны.

Реальные источники возмущений (волн) имеют конечные размеры. Источник можно считать точечным, если рассматривать волну на расстояниях, значительно больших размеров излучающего тела. В этом случае волновые поверхности представляют собой концентрические сферы с центрами, совпадающими с *центром волны*. Следует помнить, что форма волновых поверхностей при распространении волны не искажается, если среда является однородной и изотропной.

Установим вид уравнения сферической гармонической волны, распространяющейся от центра, находящегося в точке O

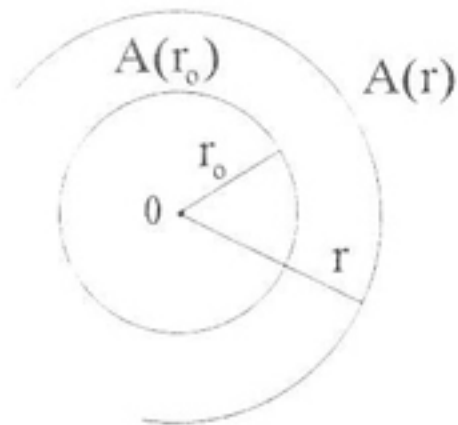


Рис.4.2

(рис.4.2). Если в центре волны фаза колебаний равна $\omega t + \varphi_0$, то на волновой поверхности радиуса r колебания будут отставать по времени от колебаний в центре волны на промежуток

$\tau = \frac{r}{v}$, необходимый

для распространения волны от центра до указанной волновой поверхности. Поэтому фаза колебаний на

волновой поверхности радиуса r будет равна

$$\varphi = \omega(t - \tau) + \varphi_0 = \omega t - \frac{\omega}{v}r + \varphi_0 = \omega t - kr + \varphi_0, \quad (4.13)$$

где учтено (4.5).

Особенностью сферической гармонической волны является то обстоятельство, что даже при отсутствии поглощения средой энергии волны ее амплитуда на различных расстояниях от центра различна, т.е. зависит от r . Чтобы выяснить вид этой зависимости, учтем, что в отсутствие поглощения через сферические поверхности с радиусами r_0 и r (рис.4.2) волной переносится одна и

та же энергия. А так как энергия колебаний точек, лежащих на этих поверхностях, пропорциональна квадрату амплитуды, то можно записать равенство

$$[A(r_0)]^2 4\pi r_0^2 = [A(r)]^2 4\pi r^2.$$

Откуда

$$A(r) = \frac{A(r_0)r_0}{r} = \frac{a_0}{r}, \quad (4.14)$$

где введено обозначение $a_0 = A(r_0)r_0$. Легко видеть, что константа a_0 численно равна амплитуде колебаний на единичном ($r_0 = 1$) расстоянии от центра волны.

Суммируя изложенное выше, запишем *уравнение сферической гармонической волны, распространяющейся в однородной изотропной среде без поглощения* в виде

$$\xi = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (4.15)$$

где учтены равенства (4.13) и (4.14).

При наличии поглощения в правую часть уравнения (4.15) необходимо добавить множитель $e^{-\gamma r}$.

Следует отметить, что уравнение (4.15) описывает гармоническую волну, распространяющуюся от *центра волны*, т.е. *расходящуюся волну*. Для *сходящейся* волны выражение для ее фазы имеет вид $\varphi = \omega t + kr + \varphi_0$.

Выводы

Получено уравнение сферической гармонической волны в виде (4.15), распространяющейся в однородной изотропной среде, справедливое для расстояний, значительно превышающих размеры источника колебаний. Особенностью такой волны является тот факт, что ее амплитуда зависит от расстояния, которое измеряется от центра волны, даже в отсутствие поглощения энергии средой.

Контрольные вопросы

- 4.12. Какие волны называются сферическими?
4.13. При каких условиях могут существовать сферические волны?
4.14. Как выглядит уравнение сферической гармонической волны и в чем его особенность? Какими причинами обусловлена эта особенность?
4.15. Попробуйте самостоятельно записать уравнение цилиндрической гармонической волны в отсутствие поглощения. Проанализируйте полученный результат.

4.3. Волновое уравнение

В этом пункте установим вид дифференциального уравнения, решением которого является уравнение волнового процесса. Такое *дифференциальное уравнение называется волновым*.

Покажем, что любая функция вида $\xi = \xi(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi_0)$, описывающая некоторую волну, удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (4.16)$$

или в операторной форме

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (4.17)$$

где Δ - оператор Лапласа.

Чтобы убедиться в справедливости сказанного, найдем вторые частные производные функции

$$\xi = \xi(\varphi) = \xi(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi_0). \quad (4.18)$$

Дифференцирование (4.18) по x дает

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k_x \frac{\partial \xi}{\partial \varphi},$$

где использовано (4.10). После повторного дифференцирования последнего выражения имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k_x^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}. \quad (4.19)$$

Аналогично, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = k_y^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = k_z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}. \quad (4.20)$$

Дифференцирование (4.18) по времени дает равенства

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \omega \right) = \omega^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.19)-(4.21) в (4.16), получим условия

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{или} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad (4.22)$$

при выполнении которых функция (4.18) является решением уравнения (4.16). Из сравнения условий (4.22) и (4.5), а также из вида волнового уравнения (4.17) непосредственно следует, что *положительный* коэффициент перед

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ в правой части (4.17) позволяет, *не решая волнового уравнения, определить фазовую скорость волны v* .

Легко видеть, что уравнение плоской гармонической волны (4.9) также является решением волнового уравнения (4.16).

Выводы

Волновым уравнением является дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, решением которого описывают некоторый волновой процесс. Вид волнового уравнения позволяет непосредственно определить фазовую скорость волны.

Контрольные вопросы

- 4.16. Запишите волновое уравнение (4.16) для плоской волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, и уравнение гармонической волны в этом случае.
- 4.17. Запишите волновое уравнение (4.17) в развернутом виде в сферической и цилиндрической системе координат.
- 4.18. Покажите, что уравнение сферической волны (4.17) является решением волнового уравнения (4.17).
- Указание:* Использовать оператор Лапласа в сферической системе координат.

4.4. Стоячие волны

Часто встречаются случаи, когда в среде распространяются одновременно несколько волн. При этом частицы среды участвуют одновременно в колебаниях, обусловленных волнами, проходящими через данную точку среды. Если среда линейна, то волны не оказывают влияния друг на друга. В этом случае справедлив *принцип суперпозиции* (сложения) волн: результирующее колебание в данной точке пространства является геометрической суммой колебаний, создаваемых каждой волной в этой точке в отдельности.

Явления, возникающие при наложении двух или более волн в линейных средах (явления интерференции, дифракции) будут обсуждаться подробно в части VI данного пособия.

Здесь мы рассмотрим частный и важный случай наложения двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях, при *условии равенства их частот и одинаковой зависимости их амплитуд от положения точки наблюдения. Кроме того, поперечные волны должны быть одинаково поляризованными.*

Результирующая волна при выполнении указанных условий называется стоячей.

Для простоты будем считать, что складываемые волны плоские, имеют одинаковую амплитуду и распространяются одна вдоль оси ОХ, другая - в противоположном направлении:

$$\begin{cases} \xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_{o1}), \\ \xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_{o2}). \end{cases}$$

Сложение этих выражений дает следующий результат:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_{o1}) + A \cos(\omega t + kx + \varphi_{o2})$$

или

$$\xi = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_{o2} - \varphi_{o1}}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{o2} + \varphi_{o1}}{2}\right). \quad (4.23)$$

Равенство (4.23) является уравнением плоской стоячей волны.

Исследуем характерные особенности стоячей волны (4.23).

1) Из уравнения (4.23) видно, что в некоторой фиксированной точке ($x = \text{const}$) пространства происходит гармоническое колебание с той же частотой ω , что и складываемых волн:

$$\xi = a(x) \cos(\omega t + \varphi_o),$$

где $\varphi_o = \frac{\varphi_{o2} + \varphi_{o1}}{2}$ - начальная фаза этого колебания, а амплитуда

$$a(x) = 2A \left| \cos\left(kx + \frac{\varphi_{o2} - \varphi_{o1}}{2}\right) \right| \quad (4.24)$$

является периодической функцией от координаты x положения равновесия колеблющейся точки среды.

2) Существуют точки, которые называются *узлами стоячей волны*, где амплитуда (4.24) обращается в нуль $a(x_{\text{узел}}) = 0$.

Условие, определяющее положения $(x_{\text{узел}})$ узлов стоячей волны (4.23), имеет вид:

$$kx_{\text{узел}} + \frac{\varphi_{o2} - \varphi_{o1}}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.25)$$

Если принять $\varphi_{o2} - \varphi_{o1} = 0$ и учесть, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то условие (4.25) упрощается:

$$x_{\text{узел}} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.26)$$

Точки, в которых амплитуда (4.24) колебаний в стоячей волне достигает максимального значения, равного $2A$, называются пучностями. Координаты пучностей при $\varphi_{o2} - \varphi_{o1} = 0$ определяются условием

$$x_{\text{пучн}} = m \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.27)$$

Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями в стоячей волне является ее характерным пространственным периодом и называется длиной стоячей волны $\lambda_{\text{ст}}$. Например, из (4.27) имеем

$$\lambda_{\text{ст}} = (m + 1) \frac{\lambda}{2} - m \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, \quad (4.28)$$

т.е. длина стоячей волны равна половине длины бегущей волны.

3) Следующая особенность стоячей волны связана с фазовыми соотношениями колебаний точек среды. Из (4.23) видно, что точки среды, находящиеся между соседними узлами, колеблются в одинаковой фазе (синхронно), но с различными амплитудами.

По обе стороны от узла точки среды колеблются в противофазе, так как их фазы отличаются на π , потому что при переходе через точку с координатой $x = x_{\text{узел}}$ знак выражения

$2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_{o2} - \varphi_{o1}}{2}\right)$ в (4.23) изменяется на противоположный.

На рис.4.3 пунктиром изображены пределы, между которыми колеблется точка среды в стоячей волне. Сплошной линией показаны смещения точек от равновесных положений, а стрелками - направления движения в некоторый фиксированный момент времени.

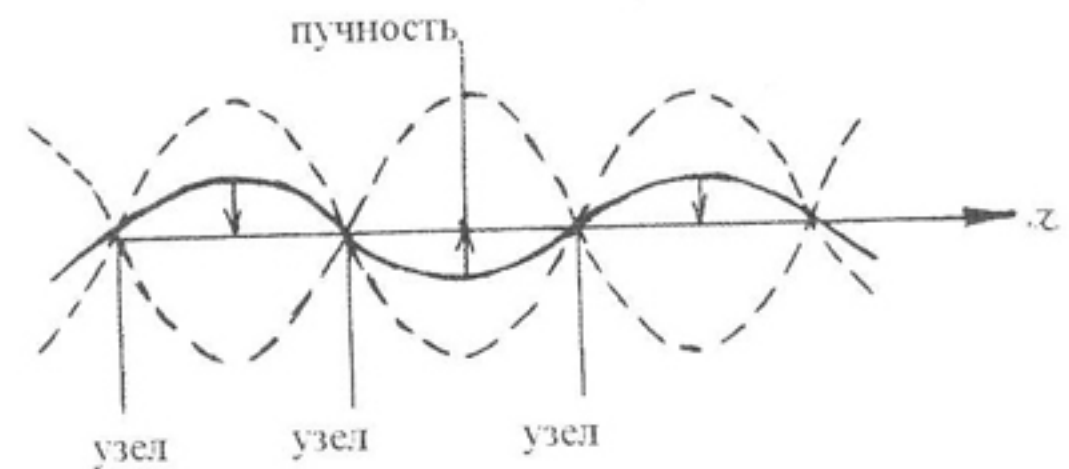


Рис.4.3

4) В стоячей волне отсутствует перенос энергии, что является существенным отличием этого объекта от бегущей волны. Отсутствие результирующего переноса энергии обусловлено тем, что бегущие волны переносят одинаковую энергию, но в противоположных направлениях.

Выводы

Наложение двух волн, бегущих в противоположных направлениях, при определенных условиях приводит к образованию стоячей волны, свойства и параметры которой существенно отличаются от свойств бегущих волн.

Контрольные вопросы

- 4.19. Что называется стоячей волной? При каких условиях может образоваться стоячая волна? Приведите примеры.
- 4.20. Перечислите основные параметры стоячей волны и поясните их смысл.
- 4.21. Каковы основные особенности стоячей волны и в чем заключаются отличия от бегущей волны?
- 4.22. Почему в стоячей волне нет переноса энергии?

4.23. Опишите самостоятельно сферическую стоячую волну. В чем заключаются ее особенности?

4.5. Упругие волны и механизм их образования

Как уже указывалось в пункте 4.1, *упругими волнами называются распространяющиеся в упругой среде механические возмущения*. Упругая среда состоит из огромного числа частиц, взаимодействие между которыми при их сравнительно небольших смещениях от равновесных положений имеет упругий характер. В результате этого взаимодействия возмущения, создаваемые источником, передаются все более и более удаленным от него частицам среды.

В зависимости от упругих свойств среды в ней могут распространяться различные типы волн.

Продольные волны могут распространяться в любых (твердых, жидких, газообразных) средах, поскольку между частицами *всегда* существуют как силы отталкивания, так и силы притяжения. Распространение продольной волны обусловлено чередованием в среде областей сжатия и разрежения, которые имеют в направлении распространения характерные размеры порядка длины волны.

Поперечные волны могут возникать только в такой среде, в которой при сравнительно небольшом сдвиге соседних слоев среды друг относительно друга возникают упругие силы. Подобные силы существуют только в *твердых средах* (в твердых телах). Поэтому поперечные упругие волны могут распространяться только в твердой среде.

Волновое уравнение для продольных и поперечных упругих волн имеет такой же вид, как и (4.17). Мы не будем здесь приводить конкретные обоснования этого утверждения, поскольку они имеют свои особенности для различных типов волн и зависят от упругих свойств среды. Приведем лишь некоторые справочные данные о фазовых скоростях упругих волн в различных изотропных средах.

1) *Продольная волна в идеальном газе* в предположении, что сжатие и разрежение происходят адиабатически, распространяется с фазовой скоростью

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (4.29)$$

где γ - показатель адиабаты, p и ρ - давление и плотность равновесного (невозмущенного) газа.

2) *Продольная волна в жидкости* при тех же предположениях, что и для газа, имеет фазовую скорость

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (4.30)$$

где K - модуль всестороннего сжатия (модуль объемной упругости), ρ - плотность невозмущенной жидкости.

3) *Продольная волна в неограниченной изотропной твердой среде* распространяется с фазовой скоростью, равной

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.31)$$

где E - модуль Юнга, ρ - плотность.

Аналогичное выражение имеет место для скорости продольной волны в тонком твердом стержне, длина которого значительно больше размеров его поперечного сечения.

4) *Для поперечных волн*, распространяющихся в *изотропной твердой среде*, фазовая скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4.32)$$

где G - модуль сдвига.

В частности, в тонкой натянутой струне фазовая скорость поперечных волн равна

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (4.33)$$

где F - сила натяжения, S и ρ - площадь поперечного сечения и плотность материала струны соответственно.

Выводы

В упругих средах могут распространяться механические (звуковые) волны. Тип волны и ее фазовая скорость определяется упругими свойствами среды и ее невозмущенной плотностью.

Контрольные вопросы

- 4.24. Опишите процессы, приводящие к распространению механической продольной волны в упругой среде.
- 4.25. Какими свойствами должна обладать упругая среда, чтобы в ней могла распространяться поперечная механическая волна?
- 4.26. Какие основные физические параметры среды определяют величину фазовой скорости упругих волн?
- 4.27. Определите скорость звука в воздухе ($\gamma = 1,4$, $\mu = 29$ г/моль) при нормальных условиях.

4.6. Электромагнитные волны

4.6.1. Существование электромагнитных волн

В пункте 4.1 этой части пособия уже обсуждался механизм распространения электромагнитных волн в пространстве. Напомним, что в основе этого механизма лежат такие фундаментальные физические явления, как электромагнитная индукция и наличие токов смещения.

Здесь будет показано, что существование электромагнитных волн непосредственно следует из фундаментальных уравнений Максвелла.

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.34)$$

$$(\nabla \vec{B}) = 0, \quad (4.35)$$

$$[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.36)$$

$$(\nabla \vec{D}) = \rho. \quad (4.37)$$

Для простоты будем считать, что в среде, в которой рассматривается электромагнитное поле, выполняются следующие условия.

1) Среда является *однородной, изотропной, линейной*. Это означает, что ее электрические и магнитные свойства определяются постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями, т.е. $\epsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$. В этом случае справедливы материальные уравнения

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (4.38)$$

2) Среда является идеальным диэлектриком, т.е. в ней отсутствуют токи проводимости $\vec{j} = 0$.

3) Среда является электрически нейтральной, т.е. в ней отсутствуют сторонние заряды $\rho = 0$.

При учете указанных условий уравнения Максвелла (4.34)-(4.37) примут симметричный вид:

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (4.39)$$

$$(\nabla \vec{H}) = 0, \quad (4.40)$$

$$[\nabla \times \vec{H}] = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.41)$$

$$(\nabla \vec{E}) = 0. \quad (4.42)$$

Поддействуем на левую и правую части уравнения (4.39) векторно оператором ∇ , изменив в правой части порядок дифференцирования по времени и координатам,

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] = -\mu \mu_0 \left[\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{H}].$$

Учтя теперь, что $[\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ (бац минус цаб), а также (4.42) и (4.41), получим

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Вспомнив, что $\nabla^2 = \Delta$ - оператор Лапласа, а $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, последнее уравнение запишем в виде

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4.43)$$

Выполняя аналогичные преобразования над уравнением (4.41), легко получить подобное (4.43) равенство для напряженности \vec{H} :

$$\Delta \vec{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (4.44)$$

Таким образом, получены идентичные *волновые уравнения* для электрической \vec{E} (4.43) и магнитной \vec{H} (4.44) компонент электромагнитного поля (см.(4.17)). Уравнения (4.43) и (4.44) свидетельствуют о том, что переменные электромагнитные поля могут распространяться в среде в виде электромагнитных волн. При указанных выше условиях фазовая скорость таких волн определяется равенством

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (4.45)$$

Выводы

Возможность существования электромагнитных волн доказывается волновыми уравнениями (4.43) и (4.44), которые являются следствиями уравнений Максвелла. В непроводящей нейтральной среде фазовая скорость электромагнитных волн определяется диэлектрическими и магнитными свойствами среды.

Контрольные вопросы

- 4.28. Перечислите и поясните смысл условий, при которых получены уравнения (4.43) и (4.44).
- 4.29. Учитывают ли уравнения (4.43) и (4.44) поглощение энергии электромагнитной волны?
- 4.30. При каком условии энергия волны будет поглощаться средой? Может ли это происходить в вакууме?
- 4.31. Попробуйте получить из уравнений Максвелла волновое уравнение при наличии поглощения.

4.6.2. Волновое уравнение для плоской электромагнитной волны

Как и ранее, будем считать, что среда, в которой распространяется электромагнитная волна, однородна, изотропна, линейна ($\epsilon, \mu = \text{const}$), электрически нейтральна ($\rho = 0$), и в ней отсутствуют токи проводимости ($\vec{j} = 0$).

При этих условиях запишем уравнения Максвелла (4.39) - (4.42) в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (4.47)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (4.49)$$

Будем рассматривать плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси ОХ. Волновые поверхности такой волны - система плоскостей, перпендикулярных оси ОХ. Электрическое \vec{E} и магнитное \vec{H} поля такой волны не зависят от поперечных координат у и z, а поэтому все частные производные по этим координатам в уравнениях (4.46)-(4.49) равны нулю.

С учетом этих условий из (4.46) - (4.49) имеем

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \text{ а) } \boxed{\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}}, \text{ б) } \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}}, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \text{ в) } \boxed{\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}}, \text{ г) } \boxed{\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}}, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (4.53)$$

Из уравнений (4.50) - (4.53) видно, что компоненты поля H_x и E_x не зависят от x и t, а так как отсутствует их зависимость от y и z, то H_x и E_x могут быть только постоянными

величинами, т.е. описывать стационарные поля. Но, с другой стороны, мы рассматриваем однородную среду, в которой отсутствуют токи и заряды, в отрыве от которых стационарные электрическое и магнитное поля существовать не могут, т.е.

$$E_x = 0 \text{ и } H_x = 0.$$

Следовательно, при рассматриваемых условиях электромагнитное поле содержит только компоненты E_y, E_z, H_y, H_z .

Теперь легко показать, что эти компоненты имеют волновой характер. Действительно, дифференцируя (4.50,а) по x, а (4.52,г) по t, получим

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Из-за независимости переменных x и t смешанные производные $\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t}$ и $\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x}$ равны друг другу. Поэтому из последних равенств имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \quad (4.54)$$

Если теперь уравнение (4.52,г) продифференцировать по x, а (4.50,а) по t, то для компоненты H_y получим такое же уравнение

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}. \quad (4.55)$$

Аналогичные уравнения могут быть получены для компонент поля E_y и H_z .

Уравнения (4.54) и (4.55) являются типичными волновыми уравнениями для плоской волны, распространяющейся в однород-

ной изотропной среде вдоль оси OX (см. формулу (4.16)) с фазовой скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ (4.45).

В заключение этого пункта следует отметить, что компоненты поля E_z, H_y и E_y, H_z описываются *независимыми парами уравнений* (4.50,а), (4.52,г) и (4.50,б), (4.52,в) соответственно. В самом деле возбужденное где-либо переменное поле E_z порождает только компоненту поля H_y (4.52,г), которая, в свою очередь, возбуждает только компоненту поля E_z (4.50,а). Аналогичная ситуация реализуется и для компонент E_y и H_z (4.52,в) и (4.50,б).

Независимость указанных пар уравнений означает, что в изотропной среде одновременно вдоль одного направления могут распространяться *две плоские электромагнитные волны*, не оказывая при этом влияния друг на друга. Различия этих волн заключаются лишь в том, что соответствующие их компоненты E_z и E_y , H_y и H_z взаимно перпендикулярны друг другу, т.е. *указанные волны обладают взаимно перпендикулярной поляризацией*.

Выводы

Электрическая и магнитная компоненты поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся в изотропной, линейной среде описываются одинаковыми волновыми уравнениями. Фазовые скорости этих компонент равны друг другу. Вдоль одного направления одновременно могут распространяться две независимые плоские волны с взаимно перпендикулярной поляризацией.

Контрольные вопросы

- 4.32. Запишите уравнения Максвелла для случая плоской волны, распространяющейся вдоль оси OY , вдоль оси OZ .
- 4.33. Почему в плоской электромагнитной волне отсутствуют продольные компоненты электромагнитного поля?

4.34. Получите волновые уравнения для компонент поля E_y и H_z .

4.6.3. Свойства плоской гармонической электромагнитной волны

Как уже указывалось в предыдущем пункте, вдоль выделенного направления в однородной изотропной среде могут распространяться независимо друг от друга две плоские электромагнитные волны с взаимно перпендикулярной поляризацией. Поэтому достаточно исследовать свойства одной из таких волн, например, описываемой уравнениями (4.50,а) и (4.52,г) или, соответственно, (4.54) и (4.55). Будем полагать в дальнейшем, что, кроме волны (4.50,а), (4.52,г), других полей нет. Поэтому вектор \vec{E} волны имеет ориентацию вдоль оси OZ , а вектор \vec{H} - вдоль оси OY , т.е.

$$\vec{E} = E_z \vec{e}_z = E \vec{e}_z, \quad \vec{H} = H_y \vec{e}_y = H \vec{e}_y, \quad (4.56)$$

где \vec{e}_y и \vec{e}_z - орты осей координат OY и OZ , и опущены индексы у компонент полей $E_z = E$ и $H_y = H$.

Другими словами, *колебания полей \vec{E} и \vec{H} в плоской волне происходят во взаимно перпендикулярных направлениях ($\vec{E} \perp \vec{H}$)*. Кроме того, \vec{E} и \vec{H} *колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения (OX) волны, т.е. $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$* .

Таким образом, плоская электромагнитная волна в однородной, изотропной среде является *поперечной*.

Ниже будем исследовать свойства плоской *гармонической* волны, записав ее уравнения для компонент поля в виде

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}), \quad (4.57)$$

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{02}), \quad (4.58)$$

где E_0 и H_0 - амплитудные значения электрического и магнитного полей волны.

Функции (4.57) и (4.58) являются самыми простыми решениями волновых уравнений (4.54) и (4.55) соответственно. Они должны удовлетворять и исходным уравнениям (4.50,а) и (4.52,г), из которых были получены уравнения (4.54) и (4.55).

Продифференцировав (4.57) и (4.58) по x и t и подставив полученные выражения в (4.50,а) и (4.52,г), запишем равенства

$$E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}) = -\mu \mu_0 H_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}),$$

$$H_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}) = -\varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}).$$

Используя тождество $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, перепишем последнее равенства в виде

$$\begin{cases} -E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{01} + \pi) = -\mu \mu_0 H_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}), \\ H_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}) = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_{01} + \pi). \end{cases} \quad (4.59)$$

Уравнения (4.59) должны выполняться в любой момент времени t и в любой точке пространства x . Это возможно при одновременном соблюдении условий

$$\varphi_{01} + \pi = \varphi_{02}, \quad (4.60)$$

и

$$\begin{cases} E_0 k = \mu \mu_0 H_0 \omega, \\ H_0 k = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega. \end{cases} \quad (4.61)$$

Рассмотрим вначале смысл условия (4.60). Оно означает, что колебания полей \vec{E} и \vec{H} происходят в противофазе *синхронно*. Другими словами, если рассматривать электромагнитную волну в некоторый фиксированный момент времени, то, согласно (4.60) (см. также (4.56)-(4.58)), в той области пространства вдоль Ox , где поле \vec{E} ориентировано вдоль Oz , поле \vec{H} ориентировано против Oy , и наоборот. Причем поля волны \vec{E} и \vec{H} в некоторой фиксированной точке пространства одновременно обраща-

ются в нуль, и также одновременно достигают наибольших по модулю значений.

На рис. 4.4 изображена взаимная ориентация компонент \vec{E} и \vec{H} электромагнитной волны. Причем рис.4.4,а соответствует некоторому фиксированному моменту времени (как бы «моментальная фотография» волны), а рис.4.4,б дает картину колебаний полей \vec{E} и \vec{H} в некоторой точке пространства ($x = \text{const}$) в зависимости от времени.

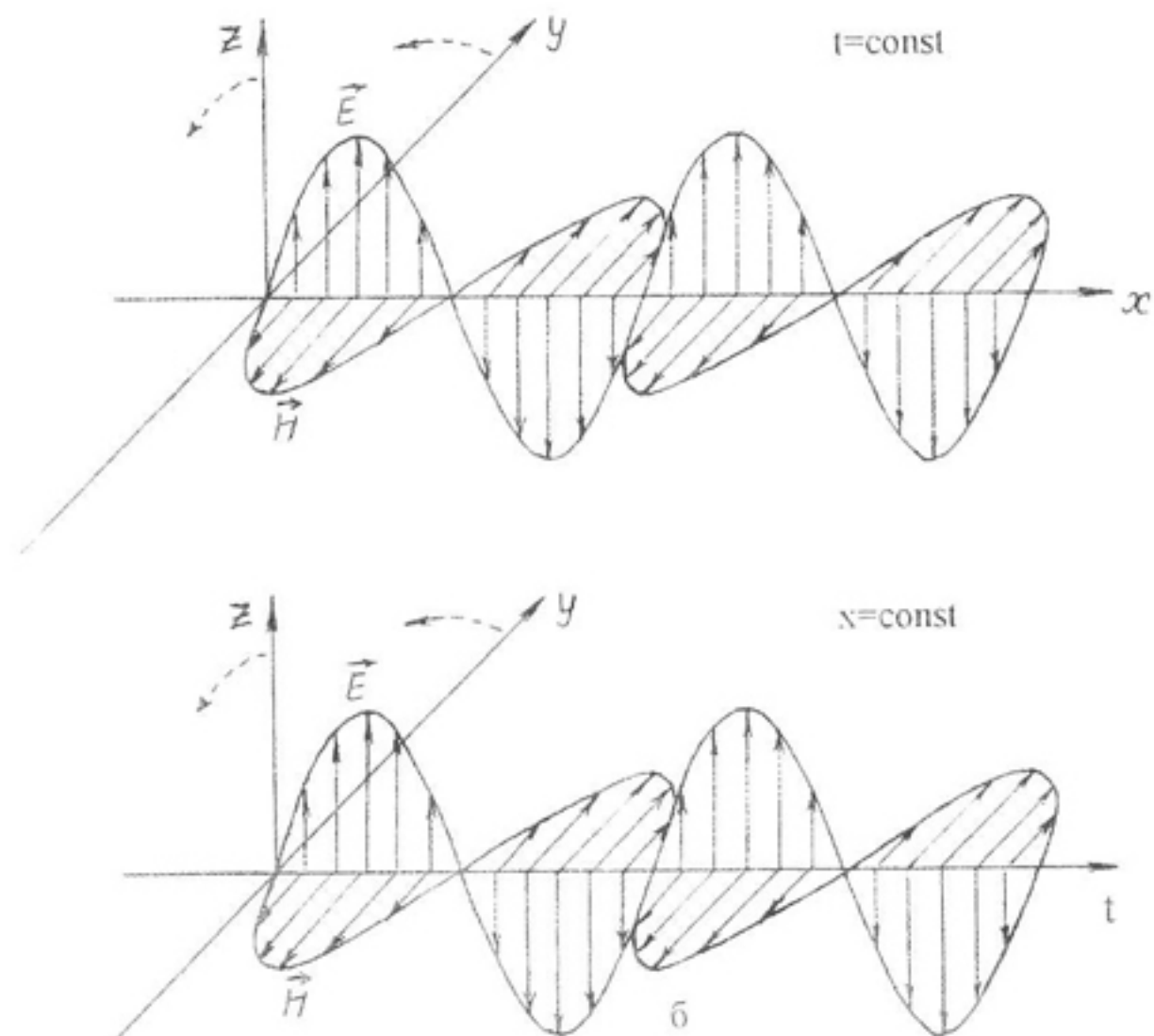


Рис.4.4

Заметим, что при одновременном повороте осей Oy и Oz на угол $\pi/2$ относительно оси Ox (на рис.4.4,а направление поворота указано пунктирными стрелками) волна будет иметь компоненты поля $\vec{E} = E_y \vec{e}_y = E \vec{e}_y$ и $\vec{H} = H_z \vec{e}_z = H \vec{e}_z$. В этом случае та же самая волна будет описываться уравнениями (4.50,б)

и (4.52,в), а условие (4.60) примет вид $\varphi_{01} = \varphi_{02}$, т.е. колебания полей \vec{E} и \vec{H} будут происходить *синфазно*.

Таким образом, *фазовые соотношения* для полей \vec{E} и \vec{H} в плоской электромагнитной волне $\varphi_{01} + \pi = \varphi_{02}$ или $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ являются в достаточной мере условными и зависят от выбора ориентации поперечных осей координат относительно *физически выделенных направлений колебаний полей \vec{E} и \vec{H}* .

Важно здесь лишь отметить, что в одиночной плоской электромагнитной волне при *соответствующем выборе направлений поперечных координат* векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются *синфазно* и образуют с направлением распространения \vec{k} волны правовинтовую систему. Поэтому, умножая равенства (4.57) и (4.58) на орты соответствующих координат и полагая $\varphi_0 = \varphi_{01} = \varphi_{02}$, запишем уравнения для компонент поля волны в векторном виде:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \end{cases} \quad (4.62)$$

Теперь обратим внимание на условия (4.61). Легко видеть, что из них следует равенство

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 = \mu \mu_0 H_0^2, \quad (4.63)$$

определяющее связь между амплитудными значениями E_0 и H_0 полей волны.

Отметим здесь, что подобная связь справедлива и для мгновенных значений полей E и H , т.е.

$$\varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2. \quad (4.64)$$

Равенства (4.63) и (4.64) имеют глубокий физический смысл. Действительно, запишем, например, (4.64) в виде

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (4.65)$$

Откуда можно сделать заключение, что в любой момент времени и в любой точке пространства объемные плотности энергии электрического поля $\omega_E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}$ и магнитного поля волны

$$\omega_H = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}$$

равны между собой, т.е.

$$\omega_E = \omega_H. \quad (4.65)$$

Этот результат является, на наш взгляд, одним из проявлений закона равномерного распределения энергии по степеням свободы в классической теории электромагнетизма.

Выводы

Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в однородной, изотропной, непроводящей, нейтральной среде обладает следующими свойствами.

- 1) *Волна является поперечной. Колебания компонент \vec{E} и \vec{H} происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения \vec{k} .*
- 2) *Поля \vec{E} и \vec{H} колеблются во взаимно перпендикулярных направлениях и составляют с вектором \vec{k} правовинтовую систему векторов.*
- 3) *Поля \vec{E} и \vec{H} колеблются синхронно, одновременно обращаясь в нуль и достигая наибольших по величине значений.*
- 4) *Фазовая скорость волны определяется электрическими и магнитными свойствами (ε, μ) среды.*
- 5) *Объемные плотности энергии электрической и магнитного полей волны в любой момент времени и в любой точке пространства равны между собой.*

Контрольные вопросы

- 4.35. Запишите условие поперечности плоской электромагнитной волны. Когда оно выполняется?

- 4.36. Покажите, что в волне, описываемой уравнениями (4.50,б) и (4.52,в), колебания полей \vec{E} и \vec{H} происходят в одинаковой фазе.
- 4.37. Докажите справедливость (4.63).
- 4.38. Перечислите основные свойства плоской электромагнитной волны.
- 4.39. Вычислите значение E_0 / H_0 в случае вакуума.

4.6.4. Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга

Как уже указывалось в п.4.1, волновой процесс сопровождается переносом энергии. Опишем перенос энергии электромагнитной волной. Для этого в поле волны выделим малую площадку dS , ориентированную относительно направления распространения волны \vec{k} произвольным образом, и вычислим энергию δW , которую переносит волна через эту площадку за время δt . Для этого на площадке dS , как на основании, построим косой цилиндр с образующими,

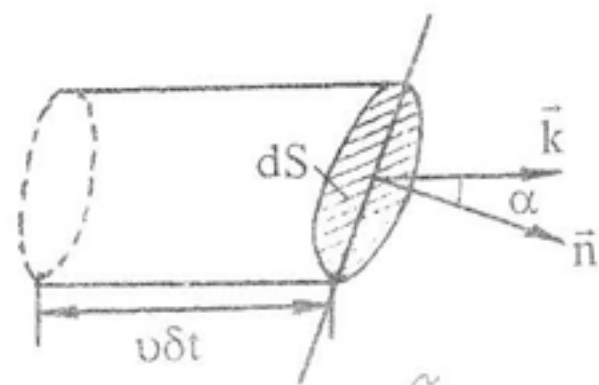


Рис.4.5

параллельными \vec{k} и равными $v\delta t$, где v - фазовая скорость волны (рис.4.5). Через площадку dS за время δt пройдет энергия δW , заключенная в объеме $dV = dSv\delta t \cos\alpha$, где α - угол между нормалью \vec{n} к площадке dS

и волновым вектором \vec{k} . Зная объемную плотность энергии поля ω электромагнитной волны, энергию δW можно записать в виде равенства

$$\delta W = \omega dV = \omega dSv\delta t \cos\alpha. \quad (4.66)$$

Объемная плотность ω складывается из энергии электрического поля $\omega_E = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$ и энергии магнитного поля $\omega_H = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ волны:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Последнее выражение с помощью (4.65) можно записать в различных формах:

$$\omega = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0} EH = \frac{EH}{v}, \quad (4.67)$$

где учтено, что $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1/c$ и (4.45). Теперь равенство (4.66) с учетом (4.67) примет вид

$$\delta W = EHdS\delta t \cos\alpha. \quad (4.68)$$

Введем вектор плотности потока энергии с помощью равенства

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (4.69)$$

Вектор \vec{P} называется вектором Пойнтинга. Направление вектора \vec{P} совпадает с направлением распространения волны, так как \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} взаимно перпендикулярны и образуют праввинтовую систему. Модуль вектора Пойнтинга определяет энергию, переносимую за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Теперь из (4.68) с учетом (4.69) можно получить равенство для скорости переноса энергии волной сквозь площадку dS :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = EHdS \cos\alpha = PdS \cos\alpha = P_n dS = (\vec{P}d\vec{S}), \quad (4.70)$$

где $P_n = P \cos \alpha$ - проекция вектора Пойнтинга на направление нормали \vec{n} к площадке dS . Анализируя (4.70), можно сделать заключение, что *скорость переноса энергии волной сквозь площадку dS равна потоку вектора Пойнтинга через эту площадку*, т.е.

$$d\Phi_P = \frac{\delta W}{\delta t} = (\vec{P} d\vec{S}). \quad (4.71)$$

Через произвольную поверхность S , находящуюся в поле электромагнитной волны, будет переноситься в единицу времени энергия (поток электромагнитной энергии), равная

$$\Phi_P = \int_S (\vec{P} d\vec{S}). \quad (4.72)$$

Выводы

Электромагнитной волной переносится энергия в направлении распространения. Скорость переноса энергии через произвольную поверхность (поток энергии) определяется потоком вектора Пойнтинга через эту поверхность.

Контрольные вопросы

- 4.40. Дайте определение вектора Пойнтинга. Каково направление этого вектора и почему? Каков смысл вектора Пойнтинга?
- 4.41. Чему равно среднее значение вектора Пойнтинга в случае плоской электромагнитной волны (4.62)?
- 4.42. Определите направление вектора Пойнтинга в точках на боковой поверхности цилиндрического проводника с постоянным током \vec{j} . Что означает этот результат?

5. Ответы на контрольные вопросы

Электромагнитная индукция

- 1.1. а) Движение проводника или отдельных его частей в магнитном поле.
б) Изменение магнитного поля, в котором находится неподвижный проводник.
- 1.2. Действие магнитной составляющей силы Лоренца на свободные носители заряда в проводнике.
- 1.3. Истинное направление действия \mathcal{E}_i определяется вектором \vec{E}^* , т.е. направлением \vec{F}_M (1.6), которое не зависит от направления \vec{n} .

При изменении направления \vec{n} на противоположное, что соответствует изменению направления обхода контура (рис.1.2), знак \mathcal{E}_i становится положительным, а знак $d\Phi$ отрицательным, так как $d\Phi = (\vec{B} \vec{n} dS)$ и $\cos(\vec{B} \vec{n}) = -1$. Поэтому (см.(1.9)) соотношение знаков \mathcal{E}_i и $d\Phi$ остается прежним.

- 1.4. Действие силы $\vec{F}_{||} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ приводит к возникновению направленного движения носителя заряда q со скоростью \vec{u} и дополнительной силой \vec{F}_{\perp} (рис.5.1)

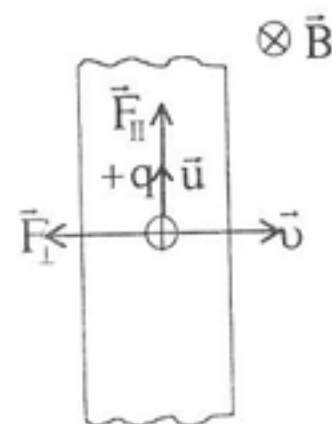


Рис.5.1

$$\vec{F}_{\perp} = q[\vec{u} \times \vec{B}].$$

Полная магнитная сила $\vec{F}_M = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}$ работы над зарядом q не совершает:

$$A = (\vec{F}_{||} \vec{u} dt) + (\vec{F}_{\perp} \vec{u} dt) = F_{||} u dt - F_{\perp} u dt = qvB u dt - qvB u dt = 0.$$

1.5. Собственный магнитный поток контура L с током J

$$\Phi_c = \int_S (\vec{B}_c d\vec{S}),$$

где интегрирование ведется по координатам точек любой поверхности S, ограниченной контуром L. На основании закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции имеем

$$\vec{B}_c = \oint_L \frac{\mu\mu_0 J [d\vec{\ell} \times \vec{r}]}{r^3},$$

где интегрирование ведется по координатам точек контура L. Объединяя два интеграла для Φ_c и \vec{B}_c , получим

$$\Phi_c \sim J.$$

1.7.
$$\Phi_1 = J_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \left(\left(\oint_{\ell_2} \frac{\mu [d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right) d\vec{S}_1 \right),$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \left(\left(\oint_{\ell_2} \frac{\mu [d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right) d\vec{S}_1 \right),$$

где внутреннее интегрирование ведется по координатам точек контура ℓ_2 , а внешнее - по координатам точек поверхности S_1 , ограниченной контуром ℓ_1 .

1.9. $L_{12} = L_{21}$, если среда является изотропным линейным магнетиком ($\mu = \text{const}$).

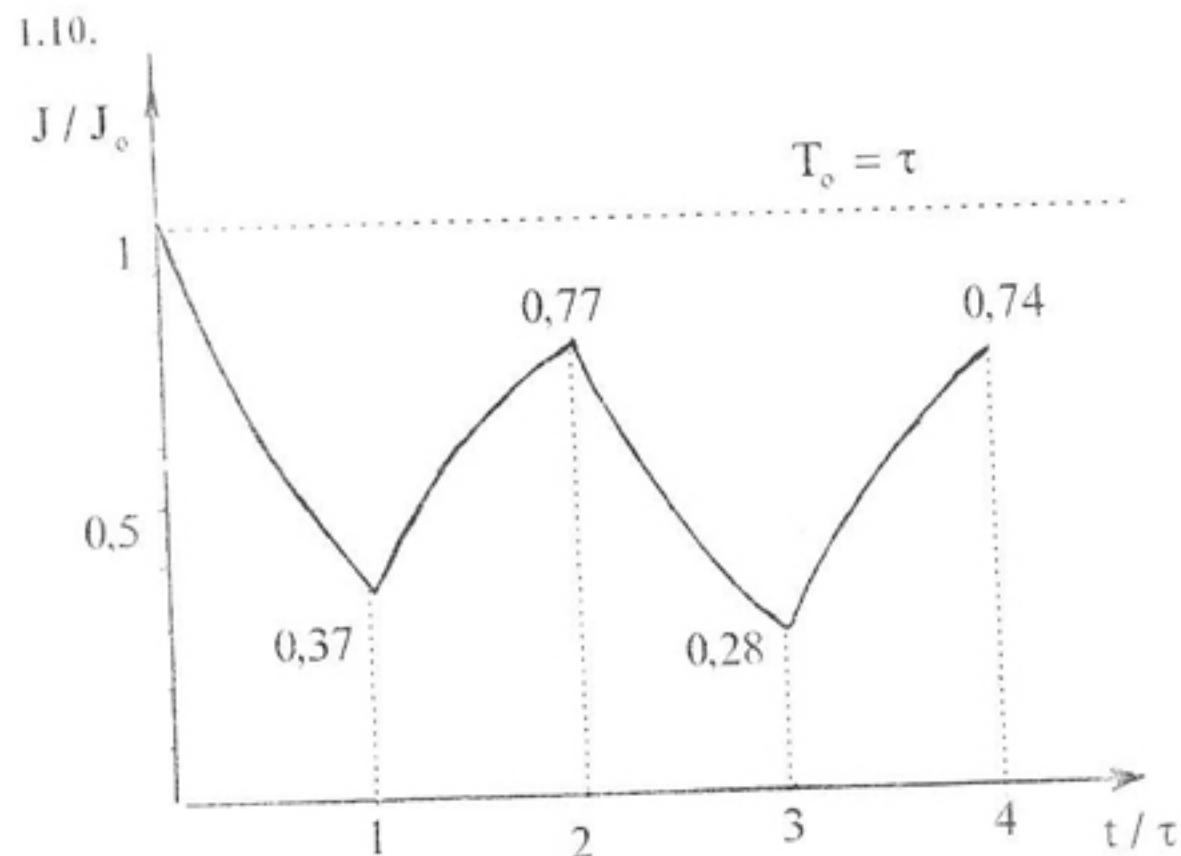


Рис.5.2

1.11. При $T_0 > \tau$, пульсации тока наблюдаются реже, а их размах увеличивается по сравнению со случаем, изображенным на рис.5.2.

При $T_0 \ll \tau$, частота пульсаций тока резко возрастает, а их размах очень мал.

1.12.
$$W = \frac{LJ_0^2}{2}.$$

1.13. Формулы (1.40), (1.41) справедливы в изотропных средах ($\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{H}$), для которых $\mu = \text{const}$. Общей формулой для ω является равенство (1.42), которое применимо и в анизотропных средах, но при $\mu \neq \mu(H)$.

1.14. Так как $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, то из (1.41) следует

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{B_1^2}{2\mu\mu_0} + \frac{B_2^2}{2\mu\mu_0} + \frac{\vec{B}_1 \vec{B}_2}{\mu\mu_0} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_{12},$$

где $\omega_{12} = \frac{\vec{B}_1 \vec{B}_2}{\mu\mu_0}$ - объемная плотность энергии взаимодействия контуров. Таким образом, ω - неаддитивная величина.

Электромагнитное поле. Уравнение Максвелла

2.3. Вихревое электрическое поле непотенциально и не имеет источников, подобных электрическим зарядам. Эти свойства математически описываются теоремой о циркуляции \vec{E}_B (2.4), (2.5) и теоремой Гаусса (2.6), (2.7), соответственно.

$$2.6. \oint_S (\vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}) = 0 \text{ или } (\nabla \vec{j}_{\text{полн}}) = 0.$$

Линии плотности полного тока замкнуты, т.е. источников не имеют.

2.7. Плотность тока смещения имеет в этом случае две составляющие:

а) собственно плотность тока смещения, обусловленную переменным электрическим полем;

б) плотность тока поляризации, обусловленную изменяющимся во времени смещением связанных зарядов диэлектрика.

2.11. Простейшие материальные уравнения определяются равенствами (2.40). Они связывают параметры двух форм материи: поля и вещества, и справедливы для линейных изотропных сред.

2.12. Система уравнений Максвелла линейна и релятивистски инвариантна.

$$2.13. \text{ Так как } (\nabla[\nabla \times \vec{H}]) = \left(\nabla \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right) = 0, \text{ то}$$

$$(\nabla \vec{j}) = - \left(\nabla \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{D}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

$$2.14. \quad [\nabla \times \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\nabla \vec{D}) = 0,$$

$$[\nabla \times \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\nabla \vec{B}) = 0.$$

$$3.2. \quad v = \frac{d\xi}{dt}; a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2};$$

$$v_{\text{max}} = A\omega_0; a_{\text{max}} = A\omega_0^2.$$

Колебания скорости опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ сами колебания (3.5). Колебания ускорения происходят в противофазе колебаниям ξ (3.7).

3.3. См. равенство (3.9). Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

3.4. Воздействие имеет квазиупругий характер, т.е. $F = -k\xi$.

3.5. См. равенство (3.10).

3.6. а) Полная энергия гармонического колебания постоянна (3.18).

б) Полная энергия содержит две компоненты: кинетическую и потенциальную энергии.

в) Компоненты полной энергии гармонически колеблются в противофазе друг другу с частотой, в два раза превышающей частоту самого гармонического процесса. Амплитуды этих колебаний одинаковы и равны полной энергии.

3.8. Малые колебания приближенно гармонические, линейные. Произвольные колебания относятся к классу нелинейных, так как описываются нелинейным дифференциальным уравнением (3.25).

3.9. а) $A \ll \ell$, где A - амплитуда колебаний, ℓ - длина нити маятника.

б) $h_{\text{max}} \ll \ell$ где h_{max} - максимальная высота подъема маятника над равновесным положением.

в) $W \ll mg\ell$, где W - полная энергия колебаний.

3.10. См. формулу (3.34).

3.11.

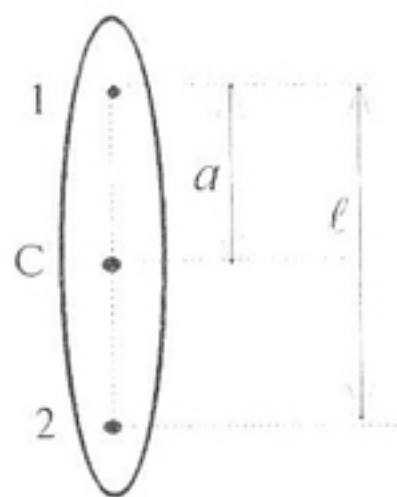


Рис.5.3

Для оси 1:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}},$$

где J_1 - момент инерции относительно оси 1, J_0 - относительно центра инерции С.

Для оси 2:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mg(\ell - a)}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m(\ell - a)^2}{mg(\ell - a)}}, \text{ где}$$

$\ell = \frac{J_1}{ma} = \frac{J_0 + ma^2}{ma}$ - приведенная длина. Подставляя ℓ в полнокоренное выражение для T_2 , после элементарных преобразований получим

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}} = T_1.$$

3.12. См. уравнение (3.37), которое является следствием закона Ома.

3.13. За счет явления самоиндукции.

3.14. В произвольный момент времени

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LJ^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} = \text{const}, \text{ где учтены равенства (3.38),}$$

$$(3.39) \text{ и } J = \frac{dq}{dt}.$$

3.15. $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$ - разность потенциалов на обкладках конденсатора.

$$3.16. J_{\text{max}} = q_0 \omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}, \quad \mathcal{E}_{S\text{max}} = Lq_0 \omega_0^2 = \frac{q_0^2}{C}.$$

3.17. Как гармонический осциллятор.

3.18. Это гармоническое колебание той же частоты, что и складываемых колебаний.

3.19. Указания: 1) использовать тождество

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta;$$

2) принять обозначения:

$$A \cos\varphi_0 = A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02},$$

$$A \sin\varphi_0 = A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}.$$

3.20. $\Delta\omega \ll \omega$.

3.21. См. рис. 3.10. а) линейно поляризованное колебание при $\Delta\varphi = 0, \pi$; б) эллиптически поляризованное при $\Delta\varphi \neq 0, \pi$.

3.23. $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_2}{N_1}$, где N_2 и N_1 - числа пересечений фигуры Лиссажу с осями координат у и х соответственно.

3.24. См. уравнения (3.65), (3.67) и (3.68).

3.25. При условии $\omega_0 > \beta$ решение уравнения (3.65) имеет вид (3.73) и описывает затухающие колебания с эквипотенциально убывающей амплитудой (3.76).

При условии $\omega_0 < \beta$ решение имеет вид (3.84) и описывает апериодический режим установления равновесия. В этом случае колебаний в системе не происходит.

3.27. Для пружинного маятника

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad Q = \sqrt{\left(\frac{k}{r}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

Для колебательного контура

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}}$$

3.28. Так как полная энергия W прямо пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$W = W_0 e^{-2\beta t}; \quad W' = W_0 e^{-2\beta(t+T)}$$

Относительная убыль полной энергии равна

$$\frac{(-\Delta W)}{W} = \frac{W - W'}{W} = 1 - e^{-2\beta T} \approx 2\beta T, \text{ если затухание мало}$$

($2\beta T \ll 1$). Формула (3.80) с учетом (3.79) и последнего равенства дает (3.81).

3.30. См. равенства (3.92), (3.89) и (3.91).

3.31. Общее решение при слабом затухании $\beta < \omega_0$ определяется суммой (3.93) и (3.94), при сильном затухании $\beta > \omega_0$ - суммой (3.84) и (3.94). Установившиеся колебания описываются формулами (3.94), (3.96) и (3.97).

3.32. 1) Резонанс смещения может существовать в двух ситуациях.

а) $\omega_0 = \text{const}, \Omega$ - изменяется. См. равенства (3.100) и (3.101).

б) ω_0 - изменяется, $\Omega = \text{const}$. См. равенства (3.102) и (3.103).

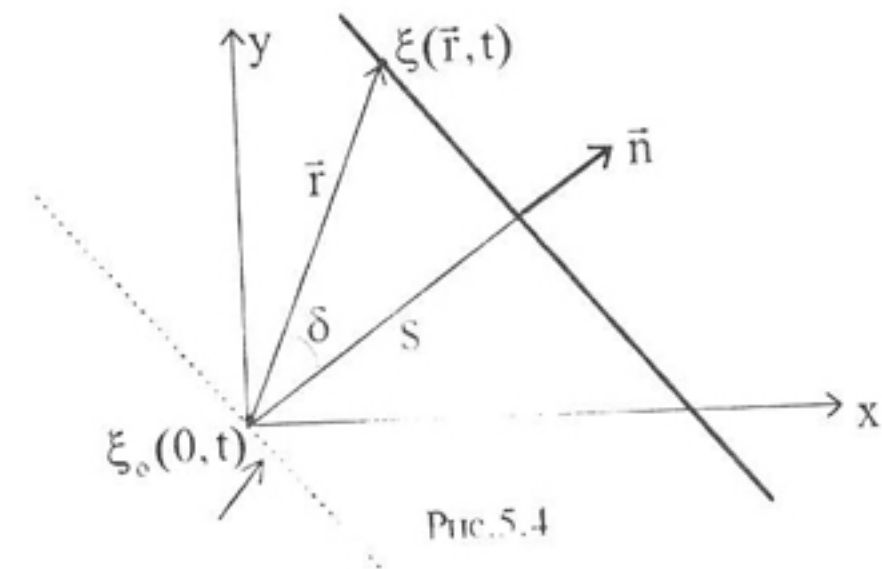
2) Резонанс скорости. Случаи а) и б) реализуются при одинаковых условиях. См. формулы (3.105) и (3.106).

3.33. Условия (3.105) получаются с учетом (3.104) непосредственно из равенств

$$\frac{d(v_{\max})}{d\Omega} = 0 \text{ и } \frac{d(v_{\max})}{d\omega_0} = 0.$$

Волновые процессы

4.7. Уравнение (4.9). Смысл поясняется рис.5.4.



4.8. Для $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_x$, $\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$,

для $\vec{k} \uparrow \downarrow \vec{e}_x$, $\xi = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$,

для $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_y$, $\xi = A \cos(\omega t - ky + \varphi_0)$.

для $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$, $\xi = A \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$.

4.13. Сферические волны могут существовать в однородной и изотропной среде при наличии «точечного» источника. Если источник имеет конечные размеры, то волна становится практически сферической на расстояниях, значительно превышающих размеры источника.

4.14. $\xi = \frac{a_0}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$, где $a_0 = A(r_0)\sqrt{r_0}$,

$A(r_0)$ - амплитуда волны на расстоянии r_0 от источника.

$$4.15. \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \text{ где } k = \frac{\omega}{v}.$$

4.16. В сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

В цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

4.18. Для сферической волны отсутствуют зависимости от θ и φ , поэтому волновое уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ или } \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Тот факт, что функция (4.15) является решением последнего уравнения, проверяется непосредственной подстановкой при условии $k = \omega / v$.

4.23. Стоячая сферическая волна образуется при наложении расходящейся $\xi_1 = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr)$ и сходящейся к центру

$$\xi_2 = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t + kr) \text{ волн. Здесь принято, что } \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0.$$

Уравнение стоячей сферической волны имеет вид

$$\xi = \left(\frac{2a_0}{r} \cos kr \right) \cos \omega t.$$

Положения узлов и пучностей определяются условиями:

$$kr = \begin{cases} (2m+1)\frac{\pi}{2} - \text{узлы,} \\ 2m\frac{\pi}{2} - \text{пучности,} \end{cases} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$4.27. \quad v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \approx 330 \text{ м/с.}$$

4.29 Нет, не учитывают.

4.30 Энергия волны поглощается средой при условии конечной электропроводности $\sigma \neq 0$. В вакууме поглощения энергии не происходит.

4.31 В проводящей линейной среде $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, при соблюдении остальных условий п.4.6.1 вместо уравнения (4.41) следует записать

$$[\nabla \times \vec{H}] = \sigma \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Выполняя далее те же действия, что и в п.4.6.1 после системы (4.39)-(4.42), можно получить уравнение

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Для поля \vec{H} получается в точности такое же уравнение.

4.32. При распространении вдоль оси OY нет зависимости \vec{E} и \vec{H} от x и z . Поэтому из (4.46) - (4.49) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= 0, \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= 0, \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right.$$

4.33. Если продольные компоненты \vec{E} и \vec{H} существуют, то они описывают стационарную составляющую электромагнитного поля, т.е. не имеют волнового характера.

4.35. $\vec{E} \perp \vec{k}, \vec{H} \perp \vec{k}$.

4.36. Записав решение уравнений (4.50,б) и (4.52,в) в виде

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_{01}), \\ H_z &= H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{02}) \end{aligned}$$

и подставив их в эти уравнения, получим равенства

$$\begin{aligned} E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}) &= \mu\mu_0 \omega H_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}), \\ H_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}) &= \varepsilon\varepsilon_0 \omega E_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}), \end{aligned}$$

которые выполняются для произвольных t и x при условии

$$\varphi_{01} = \varphi_{02}.$$

4.37. Равенство (4.63) получается при умножении левых частей (4.61) на правые части.

4.39. Из (4.63) имеем ($\varepsilon, \mu = 1$)

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 120\pi \approx 377 \text{ (В/А)}.$$

4.41. Мгновенное значение вектора Пойнтинга равно

$$P = EH = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Усредняя это значение по времени и учитывая (4.63)

и $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$, получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2.$$

4.42. Направление \vec{P} ясно из рис.5.5. Таким образом, энергия электромагнитного поля проникает в проводник из окружающего пространства перпендикулярно боковой поверхности проводника.

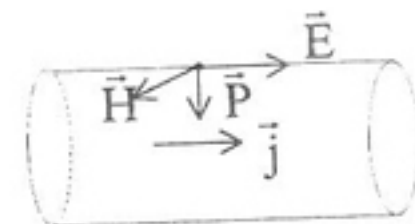


Рис.5.5

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Электромагнитная индукция.....	3
1.1. Явление электромагнитной индукции.....	3
1.2. Причины возникновения ЭДС индукции.....	4
1.3. Явление самоиндукции и взаимной индукции.....	9
1.4. Токи при замыкании и размыкании цепи.....	15
1.5. Энергия проводника с током. Энергия магнитного поля.....	19
1.6. Работа по перемагничиванию ферромагнетика.....	22
2. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла.....	24
2.1. Вихревое электрическое поле.....	24
2.2. Бетатрон.....	27
2.3. Ток смещения.....	30
2.4. Уравнения Максвелла.....	34
3. Колебательные процессы.....	40
3.1. Колебания и их общая классификация.....	40
3.2. Гармонические колебательные процессы.....	41
3.2.1. Описание гармонических колебаний и их общие свойства.....	41
3.2.1. Гармонические осцилляторы.....	48
3.2.2.1. Пружинный маятник.....	48
3.2.2.2. Физический и математический маятники.....	50
3.2.2.3. Идеальный колебательный контур.....	53
3.2.2.4. Малые колебания около положения устойчивого равновесия.....	56
3.2.3. Сложение гармонических колебаний.....	57
3.2.3.1. Сложение колебаний одного направления. Биения.....	57
3.2.3.2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.....	62
3.3. Затухающие колебания.....	66
3.4. Вынужденные колебания.....	73
4. Волновые процессы.....	82
4.1. Общие сведения о волнах.....	82
4.2. Гармонические волны.....	85
4.2.1. Плоская гармоническая волна.....	85
4.2.2. Сферическая гармоническая волна.....	90
4.3. Волновое уравнение.....	92
4.4. Стоячие волны.....	94
4.5. Упругие волны и механизмы их образования.....	98
4.6. Электромагнитные волны.....	100

4.6.1. Существование электромагнитных волн.....	100
4.6.2. Волновое уравнение для плоской электромагнитной волны.....	103
4.6.3. Свойства плоской гармонической электромагнитной волны.....	107
4.6.4. Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга.....	112
5. Ответы на контрольные вопросы.....	115

Уколов Александр Сергеевич
Лекции по общему курсу физики
Часть V

Электромагнитное поле. Колебания и волны

Ответственный за выпуск Уколов А.С.
Редактор - Кочергина Т.Ф.
Корректор - Пономарева Н.В., Селезнева Н.И.

Л.Р. № 020565
Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Тираж 1500

Подписано к печати 1.12.01

Усл. п.л. - 8,1
Уч. - изд.л. - 8,0
Заказ № 474

<< С >>

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического
университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного радиотехнического
университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1.