

## Задания для самостоятельной работы студентов для модуля 9

Тема 1. Уравнение Шредингера. Свободная микрочастица.....	3
Тема 2. Частица в потенциальной яме с бесконечными стенками. Вероятность обнаружения частицы .....	3
Тема 3. Частица в потенциальной яме с бесконечными стенками. Квантование энергии .....	5
Тема 4. Квантовый гармонический осциллятор. Частица на скачке потенциальной энергии .....	6
Тема 5. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект.....	8
Тема 6. Теория атома водорода по Бору. Энергетические состояния электрона.....	9
Тема 7. Теория атома водорода по Бору. Стационарные орбиты .....	12
Тема 8. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева.....	14

*Таблица вариантов*

№ вар	Номера задач										
1	9.1	9.15	9.32	9.38	9.55	9.71	9.117	9.153	9.22	9.32	9.91
2	9.2	9.16	9.33	9.39	9.56	9.72	9.118	9.154	9.23	9.33	9.92
3	9.3	9.17	9.34	9.40	9.57	9.73	9.119	9.155	9.24	9.34	9.141
4	9.4	9.18	9.35	9.41	9.58	9.74	9.120	9.156	9.25	9.35	9.142
5	9.5	9.19	9.36	9.42	9.59	9.75	9.121	9.157	9.26	9.36	9.143
6	9.6	9.20	9.37	9.43	9.60	9.76	9.122	9.158	9.27	9.37	9.144
7	9.7	9.21	9.32	9.44	9.61	9.77	9.123	9.159	9.28	9.32	9.145
8	9.8	9.22	9.33	9.45	9.62	9.78	9.124	9.160	9.29	9.33	9.146
9	9.9	9.23	9.34	9.46	9.63	9.79	9.125	9.161	9.30	9.34	9.147
10	9.10	9.24	9.35	9.47	9.64	9.80	9.126	9.162	9.31	9.35	9.148
11	9.11	9.25	9.36	9.48	9.65	9.81	9.127	9.163	9.15	9.36	9.149
12	9.12	9.26	9.37	9.49	9.66	9.82	9.128	9.164	9.16	9.37	9.150
13	9.13	9.27	9.32	9.50	9.67	9.83	9.129	9.165	9.17	9.32	9.151
14	9.14	9.28	9.33	9.51	9.68	9.84	9.130	9.166	9.18	9.33	9.152
15	9.1	9.29	9.34	9.52	9.69	9.85	9.131	9.167	9.19	9.34	9.117
16	9.2	9.30	9.35	9.53	9.70	9.86	9.132	9.168	9.20	9.35	9.118
17	9.3	9.31	9.36	9.54	9.55	9.87	9.133	9.169	9.21	9.36	9.119
18	9.4	9.15	9.37	9.38	9.56	9.88	9.134	9.170	9.22	9.37	9.120
19	9.5	9.16	9.32	9.39	9.57	9.89	9.135	9.171	9.23	9.32	9.121
20	9.6	9.17	9.33	9.40	9.58	9.90	9.136	9.172	9.24	9.33	9.122
21	9.7	9.18	9.34	9.41	9.59	9.91	9.137	9.173	9.25	9.34	9.123
22	9.8	9.19	9.35	9.42	9.60	9.92	9.138	9.174	9.26	9.35	9.124
23	9.9	9.20	9.36	9.43	9.61	9.93	9.139	9.175	9.27	9.36	9.125
24	9.10	9.21	9.37	9.44	9.62	9.94	9.140	9.176	9.28	9.37	9.126
25	9.11	9.22	9.32	9.45	9.63	9.95	9.141	9.153	9.29	9.32	9.127
26	9.12	9.23	9.33	9.46	9.64	9.96	9.142	9.154	9.30	9.33	9.128
27	9.13	9.24	9.34	9.47	9.65	9.97	9.143	9.155	9.15	9.95	9.129
28	9.14	9.25	9.35	9.48	9.66	9.98	9.144	9.156	9.16	9.96	9.130
29	9.1	9.26	9.36	9.49	9.67	9.99	9.145	9.157	9.17	9.97	9.117
30	9.2	9.27	9.37	9.50	9.68	9.100	9.146	9.158	9.18	9.98	9.118
31	9.3	9.28	9.32	9.51	9.69	9.101	9.147	9.159	9.19	9.99	9.119
32	9.4	9.29	9.33	9.52	9.70	9.102	9.148	9.160	9.20	9.100	9.120
33	9.5	9.30	9.34	9.53	9.55	9.103	9.149	9.161	9.21	9.101	9.121
34	9.6	9.31	9.35	9.54	9.56	9.104	9.150	9.162	9.22	9.102	9.122
35	9.7	9.15	9.36	9.38	9.57	9.105	9.151	9.163	9.23	9.103	9.123
36	9.8	9.16	9.37	9.39	9.58	9.106	9.152	9.164	9.24	9.104	9.124
37	9.9	9.17	9.32	9.40	9.59	9.107	9.117	9.165	9.25	9.105	9.125
38	9.10	9.18	9.33	9.41	9.60	9.108	9.118	9.166	9.26	9.106	9.126
39	9.11	9.19	9.34	9.42	9.61	9.109	9.119	9.167	9.27	9.107	9.127
40	9.12	9.20	9.35	9.43	9.62	9.110	9.120	9.168	9.28	9.108	9.128
41	9.13	9.21	9.36	9.44	9.63	9.111	9.121	9.169	9.29	9.109	9.129
42	9.14	9.22	9.37	9.45	9.64	9.112	9.122	9.170	9.30	9.110	9.130
43	9.1	9.23	9.32	9.46	9.65	9.113	9.123	9.171	9.31	9.111	9.131
44	9.2	9.24	9.33	9.47	9.66	9.114	9.124	9.172	9.15	9.112	9.132
45	9.3	9.25	9.34	9.48	9.67	9.115	9.125	9.173	9.16	9.113	9.133
46	9.5	9.26	9.35	9.49	9.68	9.116	9.126	9.174	9.17	9.114	9.134
47	9.6	9.27	9.36	9.50	9.69	9.89	9.127	9.175	9.18	9.115	9.135
48	9.7	9.28	9.37	9.51	9.70	9.90	9.128	9.176	9.19	9.116	9.136
49	9.8	9.29	9.32	9.52	9.55	9.91	9.129	9.161	9.20	9.89	9.137
50	9.9	9.30	9.33	9.53	9.56	9.92	9.130	9.162	9.21	9.90	9.138

## Тема 1. Уравнение Шредингера. Свободная микрочастица

- 9.1. Написать уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора. Учесть, что сила, возвращающая частицу в положение равновесия,  $f = -\beta x$  (где  $\beta$  – коэффициент пропорциональности,  $x$  – смещение.)
- 9.2. Написать уравнение Шредингера для свободного электрона, движущегося в положительном направлении оси  $X$  со скоростью  $v$ . Найти решение этого уравнения.
- 9.3. Чем обусловлено требование конечности  $\psi$  – функции?
- 9.4. Может ли  $|\psi(x)|^2$  быть больше единицы?
- 9.5. Доказать, что если  $\psi$ -функция циклически зависит от времени [т.е.  $\Psi(x,t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} Et)\psi(x)$ ], то плотность вероятности есть функция только координаты.
- 9.6. Исходя из общей формулы для фазовой скорости ( $v_{\text{фаз}} = \omega/k$ ), определить фазовую скорость волн де Бройля свободно движущейся с постоянной скоростью  $v$  частицы в нерелятивистском случае..
- 9.7. Доказать, что групповая скорость волн де Бройля равна скорости свободно движущейся частицы. Рассмотреть нерелятивистский случай.
- 9.8. Доказать, что для свободно движущейся с постоянной скоростью  $v$  частицы выполняется соотношение  $v_{\text{фаз}} u = c^2$  ( $u$  – групповая скорость).
- 9.9. Вывести закон дисперсии волн де Бройля, т.е. зависимость фазой скорости волн де Бройля от их длины волны.
- 9.10. Записать общее уравнение Шредингера для свободной частицы, движущейся вдоль оси  $x$ , и решить это уравнение.
- 9.11. Записать выражение для вероятности  $W$  обнаружения частицы в конечном объеме  $V$ , если известна координатная пси-функция частицы  $\psi(x, y, z)$ .
- 9.12. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, может быть представлена в виде  $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i(E/\hbar)t}$ . Показать, что плотность вероятности нахождения частицы определяется только координатной  $\varphi$ -функцией.
- 9.13. Известно, что свободная квантовая частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Плотность вероятности (вероятность, отнесенная к единице объема) обнаружения свободной частицы  $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = |A|^2 = \text{const}$ . Объяснить, что означает постоянство этой величины.
- 9.14. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний для свободной частицы, движущейся вдоль оси  $x$ , а также определить посредством его решения собственные значения энергии. Что можно сказать об энергетическом спектре свободной частицы?

## Тема 2. Частица в потенциальной яме с бесконечными стенками.

### Вероятность обнаружения частицы

- 9.15. Электрон находится в бесконечно глубоком прямоугольном одномерном потенциальном ящике шириной  $l$  (см. рис). Написать уравнение Шредингера и его решение (в тригонометрической форме) для области  $\Pi$  ( $0 < x < l$ ).

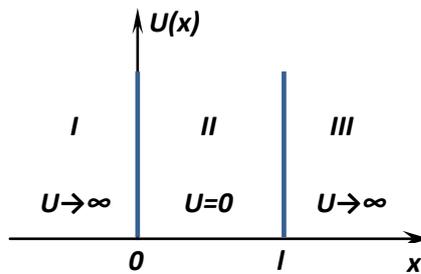


Рис. к задаче 9.15.

9.16. Известна волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике шириной  $l$ :  $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ . Используя граничные условия  $\psi(0) = 0$  и  $\psi(l) = 0$ , определить коэффициент  $C_2$  и возможные значения волнового вектора  $k$ , при котором существуют решения.

9.17. Собственная функция, описывающая состояние частицы в потенциальном ящике, имеет вид  $\psi_n(x) = C \sin \frac{\pi n}{l} x$ . Используя условия нормировки, определить постоянную  $C$ .

9.18. Решение уравнения Шредингера для бесконечно глубокого одномерного прямоугольного потенциального ящика можно записать в виде  $\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$ , где  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ . Используя граничные условия и нормировку  $\psi$ -функции, определить: 1) коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ ; 2) собственные значения энергии  $E_n$ . Найти выражение для собственной нормированной  $\psi$ -функции.

9.19. Изобразить на графике вид первых трех собственных функций  $\psi_n(x)$ , описывающих состояние электрона в потенциальном ящике шириной  $l$ , а также вид  $|\psi_n(x)|^2$ . Установить соответствие между числом  $N$  узлов волновой функции (т.е. числом точек, где волновая функция обращается в нуль в интервале  $0 < x < l$ ) и квантовым числом  $n$ . Функцию считать нормированной на единицу.

9.20. Частица в потенциальном ящике шириной  $l$  находится в возбужденном состоянии ( $n = 2$ ). Определить, в каких точках интервала ( $0 < x < l$ ) плотность вероятности  $|\psi_2(x)|^2$  нахождения частицы максимальна и минимальна.

9.21. Электрон находится в потенциальном ящике шириной  $l$ . В каких точках в интервале ( $0 < x < l$ ) плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек. Решение пояснить графически.

9.22. Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность  $W$  нахождения частицы: 1) в средней трети ящика; 2) в крайней трети ящика?

9.23. В одномерном потенциальном ящике шириной  $l$  находится электрон. Вычислить вероятность  $W$  нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале  $l/4$ , равноудаленном от стенок ящика.

9.24. Частица в потенциальном ящике шириной  $l$  находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность  $W$  нахождения частицы в интервале  $l/8$ , равноудаленном от стенок ящика.

9.25. Вычислить отношение вероятности  $W_1/W_2$  нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале  $l/4$ , равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной  $l$ .

9.26. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками». Записать уравнение Шредингера в пределах «ямы» ( $0 \leq x \leq l$ ) и решить его.

9.27. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», имеет вид  $\psi(x) = A \sin kx$ . Определить: 1) вид собственной волновой функции  $\psi_n(x)$ ; 2) коэффициент  $A$ , исходя из условия нормировки вероятностей.

9.28. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками» находится в основном состоянии. Определить вероятность обнаружения частицы в левой трети «ямы».

9.29. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками» находится в возбужденном состоянии ( $n = 2$ ). Определить вероятность обнаружения частицы в области  $\frac{3}{8}l \leq x \leq \frac{5}{8}l$ .

9.30. Электрон находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками». Определить вероятность  $W$  обнаружения электрона в средней трети «ямы», если электрон находится в возбужденном состоянии ( $n = 3$ ). Пояснить физический смысл полученного результата, изобразив графически плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии.

9.31. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками» находится в возбужденном состоянии ( $n = 3$ ). Определить, в каких точках «ямы» ( $0 \leq x \leq l$ ) плотность вероятности обнаружения частицы: 1) максимальна; 2) минимальна. Пояснить полученный результат графически.

### **Тема 3. Частица в потенциальной яме с бесконечными стенками.**

#### **Квантование энергии**

9.32. Электрону в потенциальном ящике шириной  $l$  отвечает волновое число  $k = \pi n/l$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Используя связь энергии  $E$  электрона с волновым числом  $k$ , получить выражение для собственных значений энергии  $E_n$ .

9.33. Частица находится в потенциальном ящике. Найти отношение разности соседних энергетических уровней  $\Delta E_{n+1,n}$  к энергии  $E_n$  частицы в трех случаях: 1)  $n = 3$ ; 2)  $n = 10$ ; 3)  $n \rightarrow \infty$ . Пояснить полученные результаты.

9.34. Электрон находится в потенциальном ящике шириной  $l = 0,5$  нм. Определить наименьшую разность  $\Delta E$  энергетических уровней электрона. Ответ выразите в электрон-вольтах.

9.35. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками». Вывести выражение для собственных значений энергии  $E_n$ .

9.36. Определить, при какой ширине одномерной прямоугольной «потенциальной ямы» с бесконечно высокими «стенками» дискретность энергетического спектра электрона сравнима с его средней кинетической энергией при температуре  $T$ .

9.37. Частица находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». Определить, во сколько раз изменяется отношение разности соседних энергетических уровней  $\Delta E_{n+1,n}/\Delta E_n$  частицы при переходе от  $n = 3$  к  $n' = 30$ . Объяснить физическую сущность полученного результата.

## Тема 4. Частица на скачке потенциальной энергии. Квантовый гармонический осциллятор

9.38. Написать уравнение Шредингера для электрона с энергией  $E$ , движущегося в положительном направлении оси  $X$  для областей  $I$  и  $II$  (см. рис.), если на границе этих областей имеется низкий потенциальный барьер высотой  $U_0$ .

9.39. Написать решения уравнений Шредингера (см. рис) для областей  $I$  и  $II$ . Какой смысл имеют коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  для  $\psi_I(x)$  и  $A_2$  и  $B_2$  для  $\psi_{II}(x)$ ? Чему равен коэффициент  $B_2$ ?

9.40. Зная решение уравнений Шредингера для областей  $I$  и  $II$  потенциального барьера  $\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$ ,  $\psi_{II}(x) = A_2 e^{ikx}$ , определить из условий непрерывности  $\psi$ -функций и их первых производных на границе барьера отношение амплитуд вероятности  $B_1/A_1$  и  $A_2/A_1$ .

9.41. Электрон с энергией  $E = 25$  эВ встречает на своем пути потенциальный барьер высотой  $U_0 = 9$  эВ (см. рис.). Определить коэффициент преломления  $n$  волн де Бройля на границе барьера.

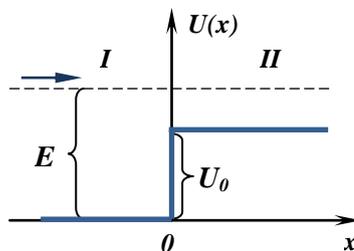


Рис. к задачам 9.38-9.41, 9.43

9.42. Определить коэффициент преломления  $n$  волн де Бройля для протонов на границе потенциальной ступени (см. рис.). Кинетическая энергия протонов равна 16 эВ, а высота  $U_0$  потенциальной ступени равна 9 эВ.

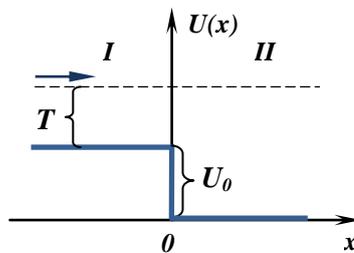


Рис. к задаче 9.42

9.43. Электрон обладает энергией  $E = 10$  эВ. Определить, во сколько раз изменятся его скорость  $v$ , длина волны Бройля  $\lambda$  и фазовая скорость при прохождении через потенциальный барьер (см. рис.) высотой  $U_0 = 6$  эВ.

9.44. Протон с энергией  $E = 1$  МэВ изменил при прохождении потенциального барьера дебройлевскую длину волны на 1 %. Определить высоту  $U_0$  потенциального барьера.

9.45. На пути электрона с дебройлевской длиной волны  $\lambda_1 = 0,1$  нм находится потенциальный барьер высотой  $U_0 = 120$  эВ. Определить длину волны де Бройля  $\lambda_2$  после прохождения барьера.

9.46. Электрон с энергией  $E = 100$  эВ попадает на потенциальный барьер высотой  $U_0 = 64$  эВ. Определить вероятность  $W$  того, что электрон отразится от барьера.

9.47. Написать уравнение Шредингера и найти его решение для электрона, движущегося в положительном направлении оси  $x$  для областей  $I$  и  $II$  (см. рис.), если на границе этих областей имеется потенциальный барьер высотой  $U_0$ .

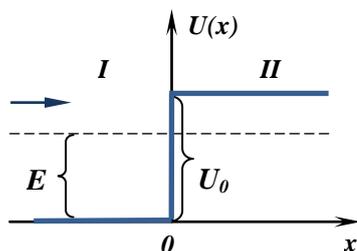


Рис. к задаче 9.47, 9.48

9.48. Для областей  $I$  и  $II$  высокого потенциального барьера (см. рис.)  $\psi$  – функции имеют вид  $\psi_I = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$  и  $\psi_{II}(x) = A_2 e^{-kx}$ . Используя непрерывность  $\psi$  – функций и их первых производных на границе барьера, найти отношение амплитуд  $A_2/A_1$ .

9.49. Частица с энергией  $E = 10$  эВ движется в положительном направлении оси  $x$ , встречая на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U = 5$  эВ (см. рис.). Определить коэффициент преломления  $n$  волн де Бройля на границе потенциального барьера.

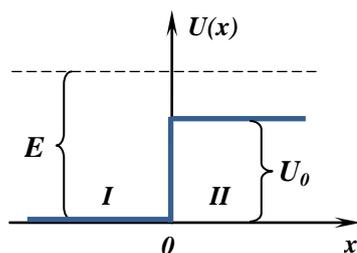


Рис. к задаче 9.49

9.50. Электрон с длиной волны де Бройля  $\lambda_I = 100$  пм, двигаясь в положительном направлении оси  $x$ , встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный барьер высотой  $U = 100$  эВ. Определить длину волны де Бройля после прохождения барьера.

9.51. Частица с энергией  $E$  движется в положительном направлении оси  $x$  и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U$  (см. рис.), причем  $E < U$ . Записать уравнение Шредингера для областей 1 и 2.

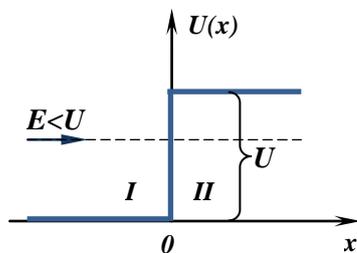


Рис. к задаче 9.51

9.52. Объяснить физический смысл существования энергии нулевых колебаний для квантового гармонического осциллятора. Зависит ли наличие нулевых колебаний от формы «потенциальной ямы»?

9.53. Математический маятник можно рассматривать в качестве гармонического осциллятора. Определить в электрон–вольтах энергию нулевых колебаний для маятника длиной  $l = 1$  м, находящегося в поле тяготения Земли.

9.54. Рассматривая математический маятник массой  $m = 100$  г и длиной  $l = 0,5$  м в виде гармонического осциллятора, определить классическую амплитуду  $A$  маятника, соответствующую энергии нулевых колебаний этого маятника.

## Тема 5. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект

9.55. Написать уравнение Шредингера для частицы с энергией  $E$ , движущейся в положительном направлении оси  $X$  для областей  $I$ ,  $II$  и  $III$  (см. рис.), если на границах этих областей имеется прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0$  и шириной  $d$ .

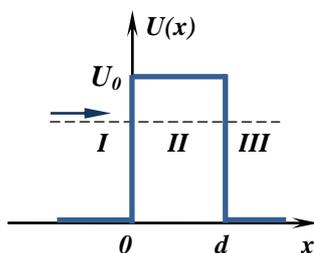


Рис. к задаче 9.55 - 9.70

9.56. Найти вероятность  $W$  прохождения электрона через прямоугольный потенциальный барьер при разности энергии  $U_0 - E = 1$  эВ, если ширина барьера: 1)  $d = 0,1$  нм; 2)  $d = 0,5$  нм.

9.57. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной  $d = 0,5$  нм. Высота  $U_0$  барьера больше энергии  $E$  электрона на 1 %. Вычислить коэффициент прозрачности  $D$ , если энергия электрона: 1)  $E = 10$  эВ; 2)  $E = 100$  эВ.

9.58. Ширина  $d$  прямоугольного потенциального барьера равна  $0,2$  нм. Разность энергий  $U_0 - E = 1$  эВ. Во сколько раз изменится вероятность  $W$  прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастает в  $n = 10$  раз?

9.59. Электрон с энергией  $E = 9$  эВ движется в положительном направлении оси  $X$ . При какой ширине  $d$  потенциального барьера равна  $10$  эВ? Изобразите на рисунке примерный вид волновой функции (ее действительную часть) в пределах каждой из областей  $I$ ,  $II$ ,  $III$  (см. рис.).

9.60. При какой ширине  $d$  прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности  $D$  для электронов равен  $0,01$ ? Разность энергий  $U_0 - E = 10$  эВ.

9.61. Электрон с энергией  $E$  движется в положительном направлении оси  $X$ . При каком значении  $U_0 - E$ , выраженном в электрон–вольтах, коэффициент прозрачности  $D = 10^{-3}$ , если ширина  $d$  барьера равна  $0,1$  нм?

9.62. Электрон с энергией  $E = 9$  эВ движется в положительном направлении оси  $X$ . Оценить вероятность  $W$  того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если его высота  $U_0 = 10$  эВ и ширина  $d = 0,1$  нм.

9.63. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину  $d = 0,1$  нм. При какой разности энергий  $U_0 - E$  вероятность  $W$  прохождения электрона через барьер равна  $0,99$ ?

- 9.64. Ядро испускает  $\alpha$ -частицы с энергией  $E = 5$  МэВ. В грубом приближении можно считать, что  $\alpha$ -частицы проходят через прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0 = 10$  МэВ и шириной  $d = 5$  фм. Найти коэффициент прозрачности  $D$  барьера для  $\alpha$ -частиц.
- 9.65. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\varphi = 10$  кВ. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности  $D_e$  для электрона и  $D_p$  для протона, если высота  $U_0$  барьера равна 20 кэВ и ширина  $d = 0,1$  пм?
- 9.66. Частица с энергией  $E$  движется в положительном направлении оси  $x$  и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U$  и конечной шириной  $l$  причем  $E < U$ . Записать уравнение Шредингера для областей 1, 2 и 3.
- 9.67. Электрон с энергией  $E = 4$  эВ движется в положительном направлении оси  $x$ , встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U = 10$  эВ и шириной  $l = 0,1$  нм. Определить коэффициент  $D$  прозрачности потенциального барьера.
- 9.68. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину  $l = 0,1$  нм. Определить в электрон-вольтах разность энергий  $U - E$ , при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,5.
- 9.69. Протон с энергией  $E = 5$  эВ движется в положительном направлении оси  $x$ , встречая на своём пути прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U = 10$  эВ и шириной  $l = 0,1$  нм. Определить: 1) вероятность прохождения протоном этого барьера; 2) во сколько раз надо сузить барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном была такой же, как для электрона при вышеприведенных условиях.
- 9.70. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину  $l = 0,1$  нм. Разность между высотой потенциального барьера и энергией движущегося в положительном направлении оси  $x$  электрона  $U - E = 5$  эВ. Определить, во сколько раз изменится коэффициент  $D$  прозрачности потенциального барьера для электрона, если разность  $U - E$  возрастает в 4 раза.

## Тема 6. Теория атома водорода по Бору. Энергетические состояния электрона

- 9.71. Определить потенциальную  $U$ , кинетическую  $T$  и полную  $E$  энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.
- 9.72. Определить длину волны  $\lambda$ , соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.
- 9.73. Найти наибольшую  $\lambda_{max}$  и наименьшую  $\lambda_{min}$  длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).
- 9.74. Вычислить энергию  $\varepsilon$  фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.
- 9.75. Определить наименьшую  $\varepsilon_{min}$  и наибольшую  $\varepsilon_{max}$  энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).
- 9.76. Фотон с энергией  $\varepsilon = 16,5$  эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость  $v$  будет иметь электрон вдали от ядра атома?
- 9.77. Найти энергию  $E_i$  и потенциал  $U_i$  ионизации ионов  $\text{He}^+$  и  $\text{Li}^{++}$ .
- 9.78. Определить первый потенциал  $U_1$  возбуждения атома водорода.

- 9.79. Найти кинетическую  $W_k$ , потенциальную  $W_n$  и полную  $W$  энергии электрона на второй боровской орбите.
- 9.80. Найти кинетическую энергию  $W_k$  электрона, находящегося на  $n$ -й орбите атома водорода, для  $n = 1, 2, 3$  и  $\infty$ .
- 9.81. Найти наименьшую  $\lambda_{min}$  и наибольшую  $\lambda_{max}$  длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.
- 9.82. Найти наименьшую длину волны  $\lambda_{min}$  в ультрафиолетовом спектре водорода. Какую наименьшую скорость  $v_{min}$  должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?
- 9.83. Найти потенциал ионизации  $\varphi_i$  атома водорода.
- 9.84. Найти первый потенциал возбуждения  $\varphi_I$  атома водорода.
- 9.85. Какую наименьшую энергию  $W_{min}$  (в электрон-вольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость  $v_{min}$  должны иметь эти электроны?
- 9.86. В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?
- 9.87. Какую наименьшую энергию  $W_{min}$  (в электрон-вольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн  $\lambda$  этих линий.
- 9.88. На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны  $\lambda = 486$  нм?
- 9.89. Найти первый потенциал возбуждения  $\varphi_I$ : а) однократно ионизованного гелия; б) двукратно ионизованного лития.
- 9.90. Найти потенциал ионизации  $\varphi_i$ : а) однократно ионизованного гелия; б) двукратно ионизованного лития.
- 9.91. Электрон, пройдя разность потенциалов  $U = 4,9$  В, сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Какую длину волны  $\lambda$  имеет фотон, соответствующий переходу атома ртути в нормальное состояние?
- 9.92. Определить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.
- 9.93. Определить длину волны  $\lambda$ , соответствующую второй спектральной линии в видимой серии спектра водорода (серии Бальмера).
- 9.94. Определить длину волны  $\lambda$ , соответствующую второй спектральной линии в серии Пашена.
- 9.95. Максимальная длина волны в серии Лаймана равна  $0,12$  мкм. Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определить максимальную длину волны в серии Бальмера.
- 9.96. Определить длину волны спектральной линии, соответствующую переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия и которая она по счету?
- 9.97. Определить длины волн, соответствующие: 1) границе серии Лаймана; 2) границе серии Бальмера; 3) границе серии Пашена. Проанализировать результаты.

- 9.98. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантом числом  $n = 4$ . Определить возможные спектральные линии в спектре водорода, появляющиеся при переходе атома из возбужденного состояния в основное.
- 9.99. Определить, насколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны  $\lambda = 4,86 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .
- 9.100. Определить длину волны  $\lambda$  спектральной линии, излучаемой при переходе электрона с более высокого уровня энергии на более низкий уровень, если при этом энергия атома уменьшилась на  $\Delta E = 10 \text{ эВ}$ .
- 9.101. Доказать, что энергетические уровни атома водорода могут быть описаны выражением  $E_n = -\frac{2\pi\hbar^2}{n^2}R$ , где  $R$  – постоянная Ридберга.
- 9.102. Электрон находится на первой боровской орбите атома водорода. Определить для электрона: 1) потенциальную энергию  $E_p$ ; 2) кинетическую энергию  $E_k$ ; 3) полную энергию  $E$ .
- 9.103. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода  $E_i = 13,6 \text{ эВ}$ , определить первый потенциал возбуждения  $\varphi_1$  этого атома.
- 9.104. Определить первый потенциал возбуждения атома водорода.
- 9.105. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода  $E_i = 13,6 \text{ эВ}$ , определить в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Бальмера.
- 9.106. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода  $\varphi_1 = 10,2 \text{ В}$ , определить в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую второй линии серии Бальмера.
- 9.107. Электрон выбит из атома водорода, находящийся в основном состоянии, фотоном энергии  $\varepsilon = 17,7 \text{ эВ}$ . Определить скорость  $v$  электрона за пределами атома.
- 9.108. Фотон с энергией  $E = 12,12 \text{ эВ}$ , поглощенный атомом водорода, находящимся в основном состоянии, переводит атом в возбужденное состояние. Определить главное квантовое число этого состояния.
- 9.109. Определить, какая энергия требуется для полного отрыва электрона от ядра однократно ионизованного атома гелия, если: 1) электрон находится в основном состоянии; 2) электрон находится в состоянии, соответствующем главному квантовому числу  $n = 3$ .
- 9.110. Определите кинетическую, потенциальную и полную энергию электрона, находящегося на третьей орбите в атоме водорода, если известен радиус первой орбиты  $r_1 = 53 \text{ пм}$ .
- 9.111. Определите, возможна ли ионизация невозбужденного атома водорода внешним электрическим полем напряженностью  $E = 10^8 \text{ В/м}$ .
- 9.112. Определите потенциал ионизации атома водорода и первый потенциал возбуждения атома водорода, если известен радиус первой орбиты  $r_1 = 53 \text{ пм}$ .
- 9.113. Резерфорд и Бор предложили модель атома водорода, в которой электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого положительного заряженного ядра. При переходе с одной орбиты на другую, расположенную ближе к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса  $r_2 = 210 \text{ пм}$  на орбиту радиуса  $r_1 = 53 \text{ пм}$ ? Заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

- 9.114. Определить энергию  $W$  ионизации атома водорода и радиус  $r_1$  первой орбиты.
- 9.115. Атом водорода переведен из нормального состояния в возбужденное, характеризуемое главным квантовым числом 2. Найти энергию  $W$  возбужденного атома.
- 9.116. Фотон с энергией  $E = 16,5$  эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода;  $m$  – масса,  $e$  – заряд электрона. Какую скорость  $v$  будет иметь электрон вдали от ядра атома?

## Тема 7. Теория атома водорода по Бору. Стационарные орбиты

- 9.117. Вычислить радиусы  $r_2$  и  $r_3$  второй и третьей орбит в атоме водорода.
- 9.118. Определить скорость  $v$  электрона на второй орбите атома водорода
- 9.119. Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.
- 9.120. Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только три спектральные линии. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.
- 9.121. Вычислить длину волны  $\lambda$ , которую испускают ион гелия  $\text{He}^+$  при переходе со второго энергетического уровня на первый. Сделать такой же подсчет для иона  $\text{Li}^{++}$ .
- 9.122. Вычислить частоты  $f_1$  и  $f_2$  вращения электрона в атоме водорода на второй и третьей орбитах. Сравнить эти частоты с частотой  $\nu$  излучения при переходе электрона с третьей на вторую орбиту.
- 9.123. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны  $\lambda = 121,5$  нм. Определить радиус  $r$  электронной орбиты возбужденного атома водорода.
- 9.124. Найти радиусы  $r_k$  трех первых боровских орбит в атоме водорода и скорости  $v_k$  электрона на них.
- 9.125. Найти период  $T$  обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода.
- 9.126 В каких пределах должны лежать длины волн  $\lambda$  монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода фотонами этого света наблюдались три спектральные линии?
- 9.127. Найти длину волны де Бройля  $\lambda$  для электрона, движущегося на первой боровской орбите атома водорода.
- 9.128. Найти радиус  $r_1$  первой боровской орбиты для однократно ионизованного гелия и скорость  $v_1$  электрона на ней.
- 9.129. Найти длину волны  $\lambda$  фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизованном атоме гелия.
- 9.130. Используя теорию Бора для атома водорода, определить: 1) радиус ближайшей к ядру орбиты (первый боровский радиус); 2) скорость движения электрона по этой орбите.
- 9.131. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по третьей орбите атома водорода.
- 9.132. Определить изменение орбитального механического момента электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны  
 $\lambda = 1,02 \cdot 10^{-7}$  м.
- 9.133. Определить скорость  $v$  электрона по третьей орбите атома водорода.

- 9.134. Определить частоту  $f$  вращения электрона по третьей орбите атома водорода.
- 9.135. Определить: 1) частоту  $f$  вращения электрона, находящегося на первой боровской орбите; 2) эквивалентный ток.
- 9.136. Определить частоту света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом  $n = 2$ , если радиус орбиты электрона изменился в  $k = 9$  раз.
- 9.137. Определить потенциал ионизации атома водорода.
- 9.138. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить электрон со второй боровской орбиты атома водорода за пределы притяжения его ядром.
- 9.139. Определить, какие спектральные линии появятся в видимой области спектра излучения атомарного водорода под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны  $\lambda = 0,1$  мкм.
- 9.140. В изучении звезды обнаружен водородоподобный спектр, длины волн которого в 9 раз меньше, чем у атомарного водорода. Определить элемент, которому принадлежит данный спектр.
- 9.141. Определить максимальную и минимальную длины волн  $\lambda$  в ультрафиолетовой серии спектра атома водорода (серии Лаймана).
- 9.142. Сколько возможных квантов с различной энергией может испустить атом водорода, если электрон находится на третьей стационарной орбите?
- 9.143. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией  $W = 12,1$  эВ?
- 9.144. Во сколько раз увеличится радиус орбиты электрона у атома водорода, находящегося в основном состоянии, при возбуждении его квантом с энергией 12,09 эВ?
- 9.145. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны  $\lambda = 121,5$  нм. Определить радиус  $r$  электронной орбиты возбужденного атома водорода.
- 9.146. Пользуясь теорией Бора, определите для атома водорода радиус первой орбиты электрона и его скорость на ней.
- 9.147. Определите напряженность и потенциал электрического поля ядра атома водорода на первой боровской орбите.
- 9.148. При переходе электрона в атоме водорода с третьей стационарной орбиты на вторую излучаются фотоны, соответствующие длине волны  $\lambda = 0,625$  мкм (красная линия водородного спектра). Какую энергию теряет при этом атом водорода?
- 9.149. При переходе электрона в атоме водорода с одной стационарной орбиты на другую его энергия уменьшается на  $\Delta E = 3 \cdot 10^{-19}$  Дж. Какова длина волны света, испущенного при этом атомом?
- 9.150. Полная энергия ионизации атома водорода  $E = 13,6$  эВ. Определите минимальную энергию фотона, излученного атомом водорода в области видимого света, при переходе с третьей орбиты на вторую.
- 9.151. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с  $\lambda = 121,5$  нм. Определите круговую частоту обращения электрона в возбужденном атоме водорода и энергию этого стационарного состояния.
- 9.152. Определите энергию и импульс фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьей орбиты на первую.

## Тема 8. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева

9.153. Атом водорода находится в основном состоянии. Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид  $\psi(r) = Ce^{-r/a}$ , где  $C$  – некоторая постоянная. Найти из условия нормировки постоянную  $C$ .

9.154. Собственная функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид  $\psi(r) = Ce^{-r/a}$ , где  $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(e^2m)$  (боровский радиус). Определить расстояние  $r$ , на котором вероятность нахождения электрона максимальна.

9.155. Зная, что нормированная собственная волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид  $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$ , найти среднее расстояние  $\langle r \rangle$  электрона от ядра.

9.156. Вычислить момент импульса  $L_l$  орбитального движения электрона, находящегося в атоме: 1) в  $s$ -состоянии; 2) в  $p$ -состоянии.

9.157. Определить возможные значения проекции момента импульса  $L_{lz}$  орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в  $d$ -состоянии.

9.158. Момент импульса  $L_l$  орбитального движения электрона в атоме водорода равен  $1,83 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Определить магнитный момент  $\mu_l$ , обусловленный орбитальным движением электрона.

9.159. Вычислить полную энергию  $E$ , орбитальный момент импульса  $L_l$  и магнитный момент  $\mu_l$  электрона, находящегося в  $2p$ -состоянии в атоме водорода.

9.160. Вычислить спиновый момент импульса  $L_s$  электрона и проекцию  $L_{sz}$  этого момента на направление внешнего магнитного поля.

9.161. Вычислить спиновый магнитный момент  $\mu_s$  электрона и проекцию магнитного момента  $\mu_{sz}$  на направление внешнего поля.

9.162. Какое максимальное число  $s$ -,  $p$ -, и  $d$ -электронов может находиться в электронных  $K$ -,  $L$ - и  $M$ -слоях атома?

9.163. Используя принцип Паули, указать, какое максимальное число  $N_{max}$  электронов в атоме могут иметь одинаковыми следующие квантовые числа: 1)  $n, l, m, m_s$ ; 2)  $n, l, m$ ; 3)  $n, l$ ; 4)  $n$ .

9.164. Заполненный электронный слой характеризуется квантовым числом  $n = 3$ . Указать число  $N$  электронов в этом слое, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1)  $m_s = +1/2$ ; 2)  $m = -2$ ; 3)  $m_s = -1/2$  и  $m = 0$ ; 4)  $m_s = +1/2$  и  $l = 2$ .

9.165. Волновая функция  $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$ , описывающая атом водорода, определяется главным квантом числом  $n$ , орбитальным квантом числом  $l$  и магнитным квантом числом  $m_l$ . Определить, чему равно число различных состояний, соответствующих данному  $n$ .

9.166. Записать возможные значения орбитального квантового числа  $m_l$  для главного квантового числа  $n = 4$ .

9.167. Определить, сколько различных волновых функций соответствует главному квантовому числу  $n = 3$ .

- 9.168. Учитывая число возможных состояний, соответствующих данному главному квантовому числу  $n$ , а также правила отбора, представить на энергетической диаграмме спектральные линии атома водорода, образующие серии Лаймана и Бальмера.
- 9.169. Показать возможные энергетические уровни атома с электроном в состоянии с главным квантовым числом  $n = 6$ , если атом помещен во внешнее магнитное поле.
- 9.170. Волновая функция, описывающая  $1s$ -состояние электрона в атоме водорода, имеет вид  $\psi = Ce^{-r/a}$ , где  $r$  – расстояние электрона от ядра;  $a$  – первый борковский радиус. Определить нормированную волновую функцию отвечающую этому состоянию.
- 9.171. Электрон в атоме находится в  $d$ -состоянии. Определить: 1) момент импульса (орбитальный)  $L_l$  электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса  $(L_{lz})_{\max}$  на направление внешнего магнитного поля.
- 9.172.  $1-s$  электрон атома водорода, поглотив фотон с энергией  $E = 12,1$  эВ, перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным квантовым числом. Определить изменение момента импульса  $\Delta L_l$  орбитального движения электрона.
- 9.173. Определить числовое значение: 1) собственного механического момента импульса (спина)  $L_s$ ; 2) проекцию спина  $L_{sz}$  на направление внешнего магнитного поля.
- 9.174. Учитывая принцип Паули, определить максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых главным квантовым числом  $n$ .
- 9.175. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число  $n = 3$ . Определить число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1)  $m_s = -1/2$ ; 2)  $m_l = 0$ ; 3)  $m_l = -1$ ,  $m_s = 1/2$ .
- 9.176. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число  $n = 3$ . Определить число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1)  $m_l = -3$ ; 2)  $m_l = 1/2$ ,  $l = 2$ ; 3)  $m_s = -1/2$ ,  $m_l = 1$ .