№ 2616-1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Технологический институт
Федерального государственного
образовательного
учреждения высшего профессионального
образования
"Южный федеральный университет"
ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ "ОБРАЗОВАНИЕ"

СБОРНИК ВОПРОСОВ, УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "ФИЗИКА"

Часть 1

Для студентов направлений:
654200, 654700, 654500, 654100, 654200,
654400, 653700, 654300, 650500, 664400,
651900, 654600, 653800, 654000, 653100,
653100, 653700, 653900, 653800, 075300,
075400, 075600,
обучающихся по образовательным программам
(бакалаврнат) основного образования

Кафедра физики

ЕГФ

Таганрог 2007

УДК 53(076)

Сапогин В.Г., Третьякова А.В., Фатеева В.А. Сборник вопросов, упражнений и задач по дисциплине "Физика". Часть I. Издание 3-е, исправленное и дополненное. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. – 144 с.

В сборнике приводятся содержание теории, вопросы, упражнения и задачи по разделам курса общей физики, изучаемого на практических занятиях во втором семестре. Каждый раздел, помимо базовых соотношений, необходимых для решения задач, содержит три группы задач: А, Б, С, выстроенных в порядке растущей трудоемкости их решения. Задачи групп А и Б являются обязательными задачами программного минимума.

Сборник предназначен для студентов 1 курса очного обучения по перечисленным направлениям, а также для преподавателей кафедры и филиалов ТТИ ЮФУ, ведущих занятия по курсу общей физики.

Табл. 3. Ил. 23. Библиогр.: 6 назв.

Рецензент А.С. Богатин, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой общей физики ТТИ ЮФУ.

1

Предисловие

... предлагается первая часть сборника вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики.

Сборник предназначен для студентов первого курса второго семестра обучения по направлениям, в которых запланировано изучение курса общей физики в течение трех семестров в объеме 440 часов.

Важнейшее, на наш взгляд, отличие предлагаемого учебного пособия от уже изданных заключается в его конкретном содержании. Подбор материала соответствует полному перечню практических занятий, на которых изучается курс общей физики, по темам: механика, СТО, молекулярная физика и термодинамика, электростатика.

Каждый раздел сборника структурно разбит по занятиям, проводимым в учебных группах по календарному плану. Каждое занятие состоит из подразделов: содержание теории, основные формулы для решения задач, справочный материал, вопросы и упражнения, задачи групп А, Б, С, расположенные в порядке возрастания трудоемкости их решения.

Содержание теории приводится для ориентации студента в вопросах, знание которых необходимо для решения задач по конкретной теме.

Основные формулы позволяют сконцентрировать изучаемую часть материала в соотношениях, наиболее часто встречающихся при решении задач.

Для каждого занятия дан справочный материал.

Приводимые вопросы и упражнения позволяют студенту самостоятельно проверить свой уровень подготовки теоретического материала, необходимого для применения на практике.

Задачи групп А и Б представляют собой задачи программного минимума, решение которых в полном объеме обязательно для каждого студента. В группу С включены задачи, уровень трудоемкости которых выходит за рамки утвержденной программы и требует от студента более глубокой проработки курса физики. Эти задачи предназначены для студентов, желающих самостоятельно углубить изучаемый курс. С ними необходимо, на наш взгляд, проводить практические занятия по индивидуальному плану, стимулируя тем самым предлагаемое углубление курса.

В группу А включены задачи из сборника (1,2). В группу Б включены задачи, взятые из пособий (3,4). Задачи группы С взяты , в основном, из задачников (5,6). Условия некоторых задач отредактированы по усмотрению составителей. Оригинальных задач в сборнике нет.

Первый модуль был подготовлен В.А.Фатеевой, второй – В.Г.Сапогиным, третий- А.В.Третьяковой и В.Г.Сапогиным. Общая редакция сборника выполнена В.Г.Сапогиным.

В сборнике отсутствуют примеры решения задач. В связи с этим мы отсылаем студентов к известным «толстым» задачникам и «решебникам», по которым они смогли бы самостоятельно изучить методы решения того или иного класса задач. Перечислим некоторые рекомендуемые пособия по решению задач:

- Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.: Высшая школа. 1990.

- Методическое пособие к решению задач по курсу физики в системе РИТМ. Часть 1. - Таганрог: Изд-во ТРТУ.2002. (№3126-1).

Составители признательны всем своим коллегам, советы и замечания которых были учтены при подготовке сборника и, несомненно, обогатили его.

Понимая всю сложность качественного издания подобных сборников, мы и впредь будем благодарны всем за замечания и пожелания по его дальнейшему улучшению.

1. Механика

Занятие 1. Входная контрольная работа

Занятие 2. Кинематика

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Кинематическое уравнение движения.
2. Средние скорость и ускорение.
3. Скорость и ускорение – дифференциальные характеристики движения.
4. Угловая скорость, угловое ускорение. Связь между угловыми и линейными величинами.
5. Кинематическое уравнение вращательного движения материальной точки.
6. Ускорение в плоском криволинейном движении. Нормальная и тангенциальная компоненты ускорения.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы декартовой системы координат (орты); x, y, z – координаты точки.

2. Средние скорость и ускорение

Средний вектор скорости

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k},$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение материальной точки за интервал времени Δt; $\langle\upsilon_x\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \langle\upsilon_y\rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \langle\upsilon_z\rangle = \frac{\Delta z}{\Delta t}$ – средние значения проекций скорости на координатные оси, $\Delta x = x(t) - x_0$; $\Delta y = y(t) - y_0$; $\Delta z = z(t) - z_0$ –

проекции перемещения материальной точки за интервал времени Δt; x_0, y_0, z_0 – начальное положение точки в пространстве.

Среднее значение скорости:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \upsilon dt,$$

где Δs – пройденный путь за интервал времени $\Delta t = t - t_0$.

Средний вектор ускорения

$$\langle a \rangle = \frac{Д\vec{\upsilon}}{Дt} = \frac{Дx_x}{Дt}\vec{i} + \frac{Дx_y}{Дt}\vec{j} + \frac{Дx_z}{Дt}\vec{k},$$

где $\Delta\vec{\upsilon}$ – приращение вектора скорости материальной точки за интервал времени Δt.

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}, \langle a_y \rangle = \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}, \langle a_z \rangle = \frac{\Delta\upsilon_z}{\Delta t}$$ – средние значения проекций ускорения на координатные оси.

Среднее ускорение $\langle a \rangle = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$,

где $\Delta\upsilon = \upsilon(t) - \upsilon(t_0)$.

3. Мгновенные скорость и ускорение

Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\upsilon_x + \vec{j}\upsilon_y + \vec{k}\upsilon_z,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты осей декартовой системы координат); $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости на координатные оси.

Модуль скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

4. Кинематические уравнения движения

Кинематическое уравнение движения материальной точки в векторной форме

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon} dt,$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор материальной точки в начальный момент времени t_0; $\vec{r}$ – радиус-вектор в произвольный момент времени t, $\upsilon(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ – закон изменения скорости точки со временем.

Векторное уравнение движения эквивалентно трем скалярным:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon_x dt, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon_y dt,$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon_z dt.$$

Кинематическое уравнение равномерного прямолинейного движения материальной точки вдоль оси x

$$x = x_0 + \upsilon t.$$

Кинематическое уравнение равнопеременного прямолинейного движения (a=const) вдоль оси x

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + at^2/2.$$

Скорость точки при равнопеременном движении вдоль оси x

$$\upsilon = \upsilon_0 + at.$$

Связь скорости и ускорения

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2ax.$$

5. Средние угловая скорость и ускорение

Средний вектор угловой скорости

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

где $\Delta\vec{\varphi}$ – приращение угла поворота за интервал времени Δt.

Средний вектор углового ускорения

$$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{\omega}$ – приращение угловой скорости за интервал времени Δt.

Средняя угловая скорость

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \text{ где } \Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0).$$

Среднее угловое ускорение

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \text{ где } \Delta\omega = \omega(t) - \omega(t_0).$$

6. Мгновенные угловая скорость и ускорение

Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \omega_z = \frac{d\varphi}{dt},$$

где ω_z – проекция угловой скорости на ось вращения.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$,

где ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения.

Угловая скорость и угловое ускорение являются аксиальными векторами, их направления совпадают с неподвижной в пространстве осью вращения.

Связь между линейными и угловыми величинами:

$$S=R\varphi; \qquad \upsilon=\omega R; \qquad a_\tau=\varepsilon_z R; \qquad a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\omega^2 R,$$

где R – радиус окружности, по которой движется точка; S – длина дуги окружности; φ – угол поворота, υ – линейная скорость; ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения; ω – угловая скорость, a_τ – тангенциальное ускорение; a_n – нормальное ускорение.

При постоянной угловой скорости $\omega=2\pi/T$, $\omega=2\pi\nu$, где T – период (время одного полного оборота); ν – частота вращения (число оборотов, совершаемых движущейся точкой в единицу времени).

7. Кинематическое уравнение вращательного движения материальной точки относительно неподвижной оси

$$\varphi = \int_0^t \omega_z dt,$$

где φ – угол поворота; ω_z – проекция угловой скорости на ось вращения. Если ω_z=const, то $\varphi=\omega_z t$. Если угловое ускорение ε=const, то $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$, где ω_0 – начальная угловая скорость. Угловая скорость при таком вращении

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t.$$

8. Ускорение в плоском криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \text{ или}$$

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

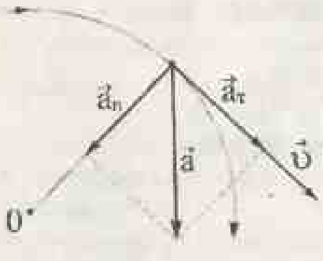

Рис. 1.1

где $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ – характеризует быстроту изменения модуля скорости (см. рис. 1.1);

$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ - характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению (см. рис. 1.1).

Соответствие линейных и угловых величин показано в табл.1.

Таблица №1

Линейные величины	*Угловые величины*
S,x	φ
υ	ω
a_τ	ε
$a_n=\frac{\upsilon^2}{R}$	$a_n=\omega^2 R$
$\upsilon_x=\upsilon_{0x}+a_x t$	$\omega_z=\omega_{0z}+\varepsilon_z t$
$s_x = x - x_0 = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$\varphi_z - \varphi_{0z} = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$
$2a_x s_x=\upsilon_x^2-\upsilon_{0x}^2$	$2\varepsilon_z\varphi_z=\omega_z^2-\omega_{0z}^2$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.
Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что изучает механика как один из разделов физики?
2. Почему при изучении реальных физических явлений и объектов приходится использовать модельные представления и абстрагированные понятия? Дайте определение: а) материальной точке (частице); б) системе материальных точек; в) абсолютно твердому телу.
3. Каково содержание понятий пространства и времени в классической механике? Что означают понятия "однородность и изотропность пространства", "однородность времени"?
4. Какие существуют способы описания движения материальной точки? Что представляет собой система отсчета, система координат? Что называется радиусом-вектором $\vec{r}$?

5. Покажите, что задание кинематического закона движения в координатной форме x=x (t), y=y (t), z=z (t) эквивалентно заданию его в векторной форме $\vec{r}=\vec{r}(t)$, где x, y, z – декартовы координаты положения материальной точки, $\vec{r}$ – ее радиус-вектор. Каковы преимущества векторного описания движения?
6. Дайте определение кинематических величин: а) перемещения $\Delta\vec{r}$; б) скорости $\vec{\upsilon}$; в) ускорения $\vec{a}$. В каких единицах измеряются эти величины? Как ориентированы векторы скорости и ускорения относительно траектории и друг друга?
7. Частица движется по закону $\vec{r} = (\upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2})\vec{k}$, где υ_0 и g – известные постоянные; $\vec{k}$ – орт координатной оси z. Найдите скорость $\vec{\upsilon}$ частицы и ее ускорение $\vec{a}$, а также их проекции $\upsilon_z = \frac{dz}{dt}$ и $a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}$ как функции времени.
8. Ускорение движущейся частицы $\vec{a} = A\vec{i}$, где A – известная постоянная; $\vec{i}$ – орт координатной оси x. В момент времени t=0 $x=x_0$ и $\upsilon_x=\upsilon_{0x}$, где x_0 и υ_0 – известные постоянные (начальные условия). Найдите проекцию скорости $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$ и координату x как функции времени.
9. Какое движение абсолютно твердого тела называется: а) поступательным; б) вращательным? Приведите примеры таких движений.
10. Что называется тангенциальным a_τ и нормальным a_n ускорениями? Чему они равны? От чего зависит угол между векторами скорости $\vec{\upsilon}$ и полного ускорения $\vec{a}$ движущейся материальной точки?
11. Какие векторы называют аксиальными? Дайте определение: а) угла поворота $d\vec{\varphi}$ твердого тела; б) угловой скорости $\vec{\omega}$; в) углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ относительно неподвижной в пространстве оси вращения. В каких единицах измеряются эти величины?
12. Колесо вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс. Обладает ли любая точка на ободе тангенциальным и нормальным ускорениями, если вращение происходит: а) с постоянной угловой скоростью; б) с постоянным угловым ускорением? Изменяются ли при этом модули этих величин?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(1.25) Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где $C=0,14$ м/с^2 и $D=0,01$ м/с^3. Через какое время t после начала движения тело будет иметь ускорение $a=1$ м/с^2? Найти среднее ускорение $\langle a\rangle$ тела за этот промежуток времени.

Ответ: $t=12$ с, $\langle a\rangle=0,64$ м/с^2.

2.(1.27) Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время $t=0,5$ с на расстоянии $l=5$ м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью υ_x он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит вектор скорости камня с горизонтом в точке его падения на землю.

Ответ: $h=1,22$ м; $\upsilon_x=10$ м/с; $\upsilon=11,1$ м/с; $\varphi=26^0 12'$.

3.(1.30) Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0=15$ м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время $t=1$ с после начала движения.

Ответ: $a_\tau=5,4$ м/с^2; $a_n=8,2$ м/с^2.

4.(1.31) Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0=10$ м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время $t=3$ с после начала движения.

Ответ: $R=305$ м.

5.(1.39) С башни высотой $h_0=25$ м брошен камень со скоростью $\upsilon_0=15$ м/с вверх под углом $\alpha=30^0$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Ответ: $t=3,16$ с; $l=41,1$ м; $\upsilon=26,7$ м/с; $\varphi=61^0$.

6.(1.49) Вентилятор вращается с частотой $n=900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N=75$ об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Ответ: $t=10$ с.

7.(1.52) Точка движется по окружности радиусом $R=20$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $\upsilon=79,2$ см/с.

Ответ: $a_\tau=0,05$ м/с^2.

8.(1.55) Колесо радиусом $R=10$ см вращается с угловым ускорением ε 3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после

начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость υ; в) тангенциальное ускорение a_τ; г) нормальное ускорение a_n; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Ответ: а) $\omega=3,14$ рад/с; б) $\upsilon=0,314$ м/с; в) $a_\tau=0,314$ м/с^2; г) $a_n=0,986$ м/с^2; д) $a=1,03$ м/с^2; е) $\alpha=17^0 46'$.

9.(1.57) Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s=A-Bt+Ct^2$, где $B=2$ м/с и $C=1$ м/с^2. Найти линейную скорость υ точки, ее тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения через время $t=3$ с после начала движения, если известно, что при $t'=2$ с нормальное ускорение точки $a'_n=0,5$ м/с^2.

Ответ: $\upsilon=4$ м/с; $a_\tau=2$ м/с^2, $a_n=2$ м/с^2; $a=2,83$ м/с^2.

10.(1.64) Во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол $\alpha=30^0$ с вектором ее линейной скорости?

Ответ: $a_n/a_\tau=0,58$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(1.4) По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям: $x_1=A_1+B_1t+C_1t^2$ и $x_2=A_2+B_2t+C_2t^2$, где $A_1=5$ м, $B_1=1$ м/с, $C_1=2$ м/с^2, $A_2=-6$ м, $B_2=4$ м/с, $C_2=0,8$ м/с^2. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковы? Найти скорости υ_1, υ_2 и ускорения a_1, a_2 этих точек в момент времени $t_1=1$с.

Ответ: $t=1,25$ с; $\upsilon_1=5$ м/с; $\upsilon_2=5,6$ м/с; $a_1=4$ м/с^2; $a_2=1,6$ м/с^2.

2.(1.23) Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1=A_1t+B_1t^2+C_1t^3$ и $x_2=A_2t+B_2t^2+C_2t^3$, где $B_1=4$ м/с^2, $C_1=-3$ м/с^3, $B_2=-2$ м/с^2, $C_2=1$ м/с^3. Определить момент времени, для которого ускорение этих точек будут равны.

Ответ: $t=0,5$ с.

3.(1.5) Движение материальной точки задано уравнением $x=At+Bt^2$, где $A=4$ м/с, $B=-0,05$ м/с^2. Определить момент времени t, в который скорость точки $\upsilon=0$. Найти координату x и ускорение точки a в этот момент.

Ответ: $t=40$ с; $x=80$ м; $a=-0,1$ м/с^2.

4.(1.6) Точка движется по окружности радиусом $R=2$ м. Уравнение движения точки $\varphi=At+Bt^3$, где $A=1$ с$^{-1}$, $B=0,4$ с$^{-3}$. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точки в момент времени $t=2$с.

0

Ответ: a_τ=9,6 м/с^2; a_n=67,3 м/с^2; a=68,0 м/с^2.

5.(1.9) Колесо радиусом R=0,2 м вращается так, что зависимость от времени линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, дается уравнением $\upsilon=At+Bt^2$, где A=0,06 м/с^2, B=0,02 м/с^3. Найти угол α, который составляет вектор полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени t_1=1 с, t_2=2с после начала движения.

Ответ: $\alpha_1=72{,}2^0$; $\alpha_2=35^0$.

6. (1.34) Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε= 3 рад/с^2. Определить радиус колеса, если через t=1с после начала движения полное ускорение колеса a=7,5 м/с^2.

Ответ: R=79 см.

7. На вал радиусом R=10 см намотана нить, к концу которой привязана гиря. Двигаясь равноускоренно, гиря за t=20 с от начала движения опустилась на h=2 м. Найти угловую скорость и угловое ускорение вала для этого момента времени.

Ответ: $\omega=2h/(Rt)$=2 рад/с; $\varepsilon=2h/(Rt^2)$=0,1 рад/с^2.

8.(1.66) При выстреле пуля вылетела со скоростью υ_0=200 м/с под углом α=60^0 к горизонту. Определить наибольшую высоту подъема h, дальность полета S и радиус кривизны R траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: h=1531 м; S=3535 м; R=1020 м.

9.(1.69) Тело брошено со скоростью υ_0=20 м/с под углом α=30^0 к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость υ тела, а также его нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения через t=1,5 с после начала движения. На какое расстояние x переместится за это время тело по горизонтали и на какой высоте y оно окажется?

Ответ: υ=17,9 м/с; a_n=9,72 м/с^2; a_τ=2,67 м/с^2; x=26 м; y=4 м.

10.(1.73) Электроны, обладающие кинетической энергией E_k=1,6 кэВ, влетают посередине между пластинами плоского конденсатора параллельно им. Какое минимальное напряжение U_m необходимо подвести к пластинам, чтобы электроны не вышли за пределы пластин? Длина пластин l=2 см, расстояние между ними d=1 см (1 кэВ=1,6$\cdot$10^{-16} Дж).

Ответ: U_m=800 В.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Скорость течения реки по ее ширине меняется по закону $\upsilon=Ax^2+Bx+C$, где $x=\frac{a}{b}$ (a – расстояние от берега, b – ширина реки), A=–4 м/с, B=–A, C=0,5 м/с. На какое расстояние снесет лодку течением при переправе, если скорость ее относительно стоячей воды равна υ_1=2 м/с и направлена прямо к противоположному берегу? Ширина реки b=420 м.

Ответ: S=245 м.

2. В момент t=0 частица вылетает из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость изменяется со временем по закону $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0\left(1-\frac{t}{\tau}\right)$, $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость, модуль которой υ_0=10 см/с, τ=5 с. Найти зависимость координаты частицы от времени. Рассчитать: а) координату x частицы в моменты времени 6, 10, 20 с; б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии 10 см от начала координат.

Ответ: а) $x=\upsilon_0 t(1-t/2\tau)$; 0,24; 0 и –4 м; б) 1,1; 9 и 11 с.

3. Радиус-вектор движущейся точки A изменяется со временем t по закону $\vec{r}=\alpha t\vec{i}+\beta t^2\vec{j}$, где α и β – постоянные, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y. Найти: а) уравнение траектории точки; б) зависимости от времени скорости $\vec{\upsilon}$, ускорения $\vec{a}$ и модули этих величин; в) зависимость от времени угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}$.

Ответ: а) $y=x^2\dfrac{\beta}{\alpha^2}$;

б) $\vec{\upsilon}=\alpha\vec{i}+2\beta t\vec{j}, \vec{a}=2\beta\vec{j}, \upsilon=\sqrt{\alpha^2+4\beta^2t^2}$, a=2β;

в) $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{\alpha}{2\beta t}$.

4. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом R=4 м, изменяется по закону $a_n=a+bt+ct^2$, где a, b, c – постоянные величины. Найти тангенциальное ускорение точки, путь, пройденный точкой за время t_1=6 с после начала движения, и полное ускорение в момент времени t_2=2/3 с, если a=1 м/с^2, b=3 м/с^3, c=2,25 м/с^4.

Ответ: a_τ=3 м/с^2, s=66 м; a=5 м/с^2.

5. Частица движется в плоскости xy со скоростью $\vec{\upsilon}=a\vec{i}+bx\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты осей x и y соответственно, a и b – постоянные. В начальный момент частица находилась в точке x=y=0. Найти: а) уравнение траектории частицы y(x); б) радиус кривизны траектории в зависимости от координаты x.

Ответ: а) $y=\frac{b}{2a}x^2$; б) $R=\frac{\upsilon^2}{a_n}=\frac{\upsilon^2}{\sqrt{a^2-a_\tau^2}}=\frac{(a^2+b^2x^2)^{3/2}}{a^2b}$.

6. Два тела бросили одновременно: одно – вертикально вверх со скоростью υ_1=25 м/с, другое – под углом $\alpha=30^0$ к горизонту со скоростью υ_2=30 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти их относительную скорость во время движения.

Ответ: $\upsilon_{12}=\sqrt{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2-2\upsilon_1\upsilon_2\sin\alpha}$=28 м/с.

7. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью υ_0=250 м/с: первый – под $\vartheta_1=60^0$ к горизонту, второй – под углом $\vartheta_2=45^0$ (азимут один и тот же). Найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

Ответ: $\Delta t=\frac{2\upsilon_0}{g}\cdot\frac{\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2}$=11 с.

8. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси, неподвижной в пространстве, по закону $\varphi=at-bt^3$, где a=6 рад/с, b=2 рад/с^3. Найти: а) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от t=0 до остановки; б) угловое ускорение в момент остановки тела.

Ответ: а) $\langle\omega\rangle=2a/3=4$ рад/с; б) $\langle\varepsilon\rangle=\sqrt{3ab}=6$ рад/с^2.

9. При вращении махового колеса его угловое ускорение изменяется по закону $\varepsilon=-ab\omega$, a и b – постоянные. Найти: а) чему равна угловая скорость маховика через t_c после начала притормаживания, если в момент t=0 она была равна ω_0? б) какой вид движения у маховика при $t\to\infty$? в) как зависит от времени его угловое ускорение?

Ответ:

а) $\omega=\frac{a}{b}-\left(\frac{a}{b}-\omega_0\right)\cdot e^{-bt}$; б) $\omega=\frac{a}{b}=const$; в) $\varepsilon=(a-b\omega_0)\cdot e^{-bt}$.

10. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec\omega=At\,\vec i+Bt^2\vec j$, где A=0,5 рад/с^2, B=0,06 рад/с^3. Найти для момента t=10 с: а) модули угловой скорости и углового ускорения; б) угол между этими векторами.

Ответ: а) $\omega=At\sqrt{1+B^2t^2/A^2}$=8 рад/с;

$\varepsilon=A\sqrt{1+\left(\frac{2Bt}{A}\right)^2}$=1,3 рад/с; б) $\varphi=\arccos\frac{A^2t+2B^2t^3}{\omega\varepsilon}=17^0$.

Занятие 3. Динамика материальной точки

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Уравнение движения материальной точки в дифференциальной форме.
2. Силы в механике. Принцип суперпозиции сил.
3. Сила, действующая на заряд в электрическом и магнитном полях.
4. Динамика материальной точки, движущейся по окружности.
5. Импульс тела. Закон сохранения импульса.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Уравнение движения материальной точки в дифференциальной форме (второй закон Ньютона)

$$\frac{d\vec p}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i;\ \text{или}\ m\vec a=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i\ \text{при}\ m=const,$$

где $\vec p=m\vec\upsilon$ – импульс материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec\upsilon$ ($\upsilon<<c$), где c – скорость света в вакууме; $\sum_{i=1}^{n}\vec F_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; n – число сил, действующих на точку.

В проекциях

$$ma_x=\sum_{i=1}^{n}F_{xi};\qquad ma_y=\sum_{i=1}^{n}F_{yi};\qquad ma_z=\sum_{i=1}^{n}F_{zi},$$

где под знаком суммы стоят проекции сил F_i на соответствующие оси координат.

2. Силы в механике

а) сила гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m и M, расположенных на расстоянии r друг от друга

$$\vec F=-G\frac{mM}{r^3}\vec r,\ |\vec F|=G\frac{mM}{r^2},$$

где $\vec F$ – сила, действующая на материальную точку массой m со стороны точки массой M; $\vec r$ – радиус-вектор, направленный от материальной точки массой M к точке массой m; $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная.

Напряженность гравитационного поля g, создаваемого массой M, определяется соотношением

$$\vec{E}_g=\frac{\vec{F}}{m}=-G\frac{M}{r^3}\vec{r},\quad g=G\frac{M}{r^2},$$

где M – масса источника гравитационного поля; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, в которой определяется напряженность поля. У поверхности Земли $g=9{,}8$ м/с². (Совпадает по величине с ускорением силы тяжести);

б) сила упругости (закон Гука)

$$F_x=-kx,$$

где k – коэффициент упругости тела; x – смещение при деформации (растяжение $x>0$, сжатие $x<0$); F_x – проекция силы упругости;

в) сила трения скольжения

$$F=\mu N,$$

где μ – коэффициент трения; N – нормальная реакция опоры;

г) сила вязкого трения для малых скоростей движения

$$\vec{F}_1=-k_1\vec{\upsilon};$$

д) сила вязкого трения для больших скоростей движения

$$F_2=-k_2\upsilon^2.$$

3. Силы, действующие на заряд в электрическом и магнитном полях

Сила Лоренца $\vec{F}=q\vec{E}+q[\vec{\upsilon}\vec{B}]$;

- сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле

$$\vec{F}_э=q\vec{E},$$

где q – заряд частицы, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля;

- магнитная составляющая силы Лоренца, действующая на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле

$$\vec{F}_м=q[\vec{\upsilon}\vec{B}],F_м=q\upsilon B\sin\alpha,$$

где q – заряд частицы; $\vec{\upsilon}$ – скорость частицы; $\vec{B}$ – индукция магнитного поля; α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

4. Принцип суперпозиции сил

Если к телу (материальной точке) приложено несколько сил, то результирующая сила, действующая на тело, находится их геометрическим сложением

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i.$$

5. Динамика материальной точки, движущейся по окружности

Уравнение динамики материальной точки, движущейся по окружности, в проекциях

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{d\upsilon}{dt};F_n=ma_n=\frac{m\upsilon^2}{R}=m\omega^2R,$$

где индексом τ помечена проекция силы и ускорения на касательную, проведенную к траектории движения точки (см. рис. 1.1), а индексом n – проекция силы и ускорения на нормаль, восстановленную в этой же точке; m – масса тела; a_τ – тангенциальное ускорение; a_n – нормальное ускорение; υ – модуль линейной скорости; R – радиус окружности; ω – угловая скорость движения точки.

6. Импульс тела. Закон сохранения импульса

Если на механическую систему не действуют внешние силы, либо их действие скомпенсировано, суммарный импульс системы при взаимодействиях остается неизменным

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=\text{const}\ \text{или}\ \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i=\text{const},$$

где n – количество частиц системы. При взаимодействии двух тел (n=2) для абсолютно упругого удара закон принимает вид

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2,$$

где m_1, m_2 – массы частиц; $\vec{\upsilon}_1,\vec{\upsilon}_2$ – их скорости до взаимодействия; $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ – их скорости после взаимодействия.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^6$ м.
Масса Земли $M=5{,}98\cdot10^{24}$ кг.
Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2
(если в задаче не приводится другое значение).
Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Нм^2/кг^2
Масса электрона $m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.
Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В чём заключается основная задача ньютоновской динамики?
2. Как в динамике определяются сила $\vec{F}$ и масса m? Каковы характерные свойства этих физических величин? В каких единицах они измеряются?
3. Как строится системы единиц в механике? Какова роль формул размерностей?
4. Что называется импульсом $\vec{p}$ материальной точки?
5. Сформулируйте законы Ньютона. Какие утверждения содержат эти законы? Какова их взаимосвязь? Дайте определение понятий "инерция" и "инертность".
6. Какие системы отсчета называются инерциальными и неинерциальными? Являются ли инерциальными системы отсчета: а) связанная с Солнцем и звездами (гелиоцентрическая); б) жестко связанная с Землей (лабораторная)?
7. Получите из общей формулировки второго закона Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ основное уравнение динамики материальной точки $m\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$.
8. Спроецировав уравнение динамики на оси x, y и z декартовой системы координат, получите три эквивалентных ему дифференциальных уравнения.
9. Каково содержание закона независимости действия сил? Сформулируйте принцип суперпозиции сил.
10. Введите понятие импульса силы. Объясните, почему пуля, вылетев из ружья, пробивает отверстие в стекле, не разбивая его, а надавливанием стержня на стекло этого сделать нельзя.

11. Назовите четыре типа фундаментальных взаимодействий. Какие силы рассматриваются в рамках ньютоновской механики?
12. Каковы границы применимости законов ньютоновской механики?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(2.16) Молекула массой $m=4{,}65\cdot10^{-26}$ кг, летящая со скоростью $\upsilon=600$ м/с, ударяется о стенку сосуда под углом $\alpha=60^0$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой за время удара.

Ответ: $F\Delta t=2{,}8\cdot10^{-23}$ Н·с.

2.(2.17) Шарик массой $m=0{,}1$ кг, падая с некоторой высоты, ударяется о закрепленную наклонную плоскость и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30^0$. За время удара шарик получает приращение импульса, модуль которого $\Delta p=1{,}73$ кг·м/с. Какое время t пройдет от момента удара шарика о плоскость до момента, когда он будет находиться в наивысшей точке траектории?

Ответ: $t=0{,}51$ с.

3.(2.34) Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha=30^0$ и $\beta=45^0$ (рис. 1.2). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1=m_2=1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь 1 и 2 о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

Ответ: $a=1{,}03$ м/с^2; $T_1=T_2=5{,}9$ Н.

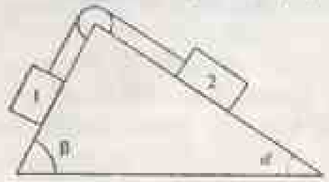

Рис 1.2

4.(2.35) Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициенты трения гирь 1 и 2 о наклонные плоскости $k_1=k_2=0{,}1$. Показать, что из формул, дающих решение этой задачи, можно получить, как частный случай, решение задачи 2.34.

Ответ: $a=0{,}244$ м/с^2; $T_1=T_2=6{,}0$ Н.

5.(2.61) На рельсах стоит платформа массой $m_1=10$ т. На платформе закреплено орудие массой $m_2=5$ т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда $m_3=100$ кг; его начальная скорость относительно орудия $\upsilon_0=500$ м/с. Найти скорость u платформы в первый момент после выстрела, если: а) платформа стояла неподвижно; б) платформа двигалась со скоростью $\upsilon=18$ км/ч и выстрел был произведен в направлении ее

10

движения; в) платформа двигалась со скоростью υ=18 км/ч и выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению ее движения.

Ответ: а) υ=–3.3 м/с, б) υ= 1.7 м/с, в) υ=8.3 м/с.

6.(2.65) Граната, летящая со скоростью υ=10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0,6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью u_1=25 м/с. Найти скорость u_2 меньшего осколка.

Ответ: u_2=–12,5 м/с.

7.(2.99) Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки ΔT=10 Н.

Ответ: m=0,5 кг.

8.(2.100) Гирька, привязанная к нерастяжимой нити длиной l=30 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом R=15 см. С какой частотой ν вращается гирька?

Ответ: ν=59 об/мин.

9.(2.103) Самолет, летящий со скоростью υ=900 км/ч, делает "мертвую петлю". Каким должен быть ее радиус R, чтобы сила реакции опоры была равна: а) пятикратной силе тяжести, действующей на летчика; б) десятикратной силе тяжести, действующей на летчика?

Ответ: а) R=1594 м; б) R=709 м.

10.(2.147) Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. На какой высоте h от поверхности Земли должен находиться этот спутник, чтобы он был неподвижен по отношению к наблюдателю, находящемуся на поверхности Земли у экватора?

Ответ: h=35800 км.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(1.12) Определить модуль приращения импульса Δp шарика массой m=200 г, если он двигается со скоростью υ=4 м/с под углом α=30^0 к плоскости стенки, ударяется о стенку и упруго отскакивает от нее.

Ответ: Δp=0,8 кгм/с.

2.(1.13) На полу покоится тележка в виде длинной доски с легкими колесами. На одном ее конце стоит человек массой M=70 кг. С какой скоростью υ будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со

0

скоростью u=1 м/с (относительно доски). Масса тележки m=25 кг, массой колес пренебречь, трение не учитывать.

Ответ: υ=0,737 м/с.

3.(1.15) На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием M=25 т. Орудие стреляет вверх под углом α=30^0 к горизонту в направлении пути. С какой скоростью υ_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда m=20 кг и вылетает он со скоростью υ_0=600 м/с. Платформа перед выстрелом покоилась.

Ответ: υ_1=0,42 м/с.

4.(1.35) Определить жесткость системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении. Жесткость пружин k_1=3 кН/м и k_2=4 кН/м.

Ответ: k'_1=1,71 кН/м, k'_2=7 кН/м

5.(1.61) Спутник движется по круговой орбите вокруг Земли на расстоянии h=3400 км от поверхности Земли. Определить скорость спутника υ, нормальное ускорение a_n и период его вращения T вокруг Земли.

Ответ: υ=6,38 км/с, a_n=4,17 м/с^2, T=9,62$\cdot$10^3 с.

6.(1.65) Определить, на каком расстоянии l от центра Земли находится точка, в которой напряженность g результирующего гравитационного поля Земли и Луны равна нулю. Масса Земли в 81 раз больше массы Луны. Среднее расстояние от Земли до Луны r=38,4$\cdot$10^4 км.

Ответ: l=36,4$\cdot$10^4 км.

7.(1.72) Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью υ_0=10^7 м/с, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора, если расстояние между пластинами d=16 мм, их длина l=60 мм, а разность потенциалов на конденсаторе U=30 В?

Ответ: y=6 мм.

8.(1.74) Электрон влетает в плоский конденсатор со скоростью υ_0=10^7 м/с, направленной параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол α=35^0 с первоначальным направлением. Определить разность потенциалов между пластинами, если длина пластин l=10 см, а расстояние между ними d=2 см.

Ответ: U=79,6 В.

9.(1.75) Определить величину отклонения луча у на экране осциллографа, если напряжение на отклоняющих пластинах U=150 В, их длина l_1=4 см, а расстояние между пластинами d=1 см. Расстояние от экрана до ближайшего края отклоняющих пластин l_2=15 см. Электроны ускоряются напряжением $U_0=10^3$ В.

Ответ: $y=51\cdot10^{-3}$ м.

10.(1.79) Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=8\pi\cdot10^{-3}$ Тл со скоростью $\upsilon=5\cdot10^6$ м/с, направленной под углом $\alpha=30^0$ к направлению поля. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле.

Ответ: $R=5{,}66\cdot10^{-2}$ м, h=0,616 м.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Скорость частицы массой m, движущейся в плоскости xy, изменяется по закону $\vec{\upsilon} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$, где A и B – постоянные. Найти зависимость модуля результирующей силы, действующей на частицу, от времени.

Ответ: $F = m\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}$.

2. Два соприкасающихся бруска лежат на горизонтальном столе, по которому они могут скользить без трения (рис. 1.3). Масса первого бруска m_1 равна 2 кг, масса второго m_2 равна 3 кг. Один из брусков толкают с силой F_0=10 Н.
а) найти силу F, с которой бруски давят друг на друга в случае, если сила F_0 приложена: к бруску 1, к бруску 2;
б) что примечательного в полученных результатах?

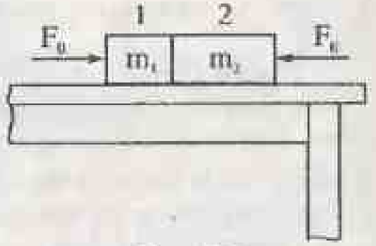

Рис. 1.3

Ответ: а) F_1=6 Н; F_2=4 Н;
б) сумма результатов в случаях а и б равна F_0.

3. Два соприкасающихся бруска скользят по наклонной плоскости (см. рис.1.4). Масса первого бруска m_1=2 кг, масса второго m_2=3 кг. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ_1=0,1 для первого бруска и μ_2=0,2 для второго. Угол наклона плоскости $\alpha=45^0$.
а) Определить: ускорение а, с которым движутся бруски, силу F, с которой бруски давят друг на друга; б) Что происходило бы в случае $\mu_1>\mu_2$?

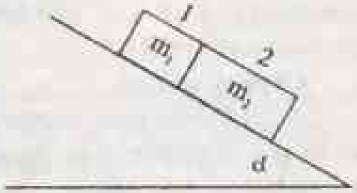

Рис.1.4

Ответ: а) a=5,8 м/с², F=0,83 Н; б) второй брусок скользил бы с большим ускорением, чем первый. В результате зазор между брусками увеличивается со временем.

4. Шарик массы m помещен в высокий сосуд с некоторой жидкостью и отпущен без толчка. При движении шарика возникает сила сопротивления среды, пропорциональная скорости движения: $\vec{F} = -k\vec{\upsilon}$. Найти:
а) зависимость скорости шарика υ от времени t;
б) установившуюся скорость движения шарика; в) зависимость координаты x шарика от времени t. Выталкивающей силой пренебречь.

Ответ: а) $\upsilon = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$, б) $\upsilon = \dfrac{mg}{k}$,

в) $x = \dfrac{mg}{k}\left[t - \dfrac{m}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)\right]$.

5. В установке, представленной на рис. 1.5, известны угол α наклона плоскости к горизонту и коэффициент трения μ между телом m_1 и наклонной плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент оба тела неподвижны, найти отношение масс m_2 к m_1, при котором тело m_2: а) начнет опускаться; б) начнет подниматься; в) будет оставаться в покое.

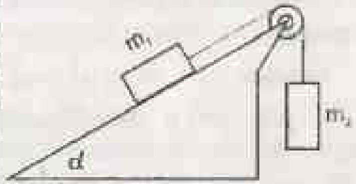

Рис.1.5

Ответ: а) $\dfrac{m_2}{m_1} > \sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha$; б) $\dfrac{m_2}{m_1} < \sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha$;

в) $(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) < \dfrac{m_2}{m_1} < (\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)$.

6. Шар массой m_1 движется со скоростью υ_1 и упруго сталкивается с шаром массой m_2, который движется под углом α к траектории первого шара. На какой угол β_1 отклонится первый шар после соударения, если второй отклонился на угол β_2 по отношению к первоначальной траектории первого шара, а его скорость стала равной υ_2'?

Ответ: $\beta_1 = \mathrm{arctg}\dfrac{m_2\cdot(\upsilon_2\cdot\sin\alpha - \upsilon_2'\cdot\sin\beta_2)}{m_1\upsilon_1 + m_2\cdot(\upsilon_2\cdot\cos\alpha - \upsilon_2'\cdot\cos\beta_2)}$.

7. Мотоциклист с постоянной скоростью υ=20 м/с едет по окружности внутренней поверхности цилиндра, ось которого расположена вертикально

Радиус цилиндра R=4 м. Найти коэффициент трения шин мотоцикла о стенки цилиндра. Размерами мотоцикла и человека пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ: $\mu=0{,}1$.

8. Тело массой m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Спустя время τ тело упало на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) приращение импульса тела $\Delta\vec{p}$ за время полета; б) среднее значение импульса $<\vec{p}>$ за время τ.

Ответ: $\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau$, $<\vec{p}_\tau> = \vec{p}_0 + \dfrac{m\vec{g}\tau}{2}$.

9. Снаряд, выпущенный со скоростью $\upsilon_0=100$ м/с под углом $\alpha=45^0$ к горизонту, разорвался в верхней точке O траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на Землю под точкой O со скоростью $\upsilon_1=97$ м/с. С какой скоростью упал на Землю второй осколок? Сопротивления воздуха нет.

Ответ: $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = 120$ м/с.

10. На краю покоящейся тележки массой M стоят два человека, масса каждого из которых равна m. Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью u относительно тележки: а) одновременно; б) друг за другом. В каком случае скорость тележки будет больше и во сколько раз?

Ответ: а) $\vec{\upsilon}_1 = -\dfrac{2m}{M+2m}\vec{u}$; б) $\vec{\upsilon}_2 = -\dfrac{m\cdot(2M+3m)}{(M+m)\cdot(M+2m)}\vec{u}$;

в) $\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 1 + \dfrac{m}{2}/(M+m) > 1$.

Занятие 4. Работа. Законы сохранения

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.
2. Связь работы с изменением кинетической энергии.
3. Связь работы с убылью потенциальной энергии.
4. Потенциальная энергия, ее виды.
5. Связь силы с потенциальной энергией.
6. Закон сохранения полной механической энергии.
7. Задачи на совместное применение законов сохранения энергии и импульса.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Работа постоянной и переменной силы. Мощность.

Работа, совершаемая силой $\vec{F}$ при перемещении тела по произвольной траектории между точками 1 и 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S} = \int_1^2 F\cos\alpha dS,$$

где $d\vec{S}$ – элементарное перемещение; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{S}$.

В случае постоянной силы $\vec{F}$=const выражение для работы имеет вид

$$A_{12} = \vec{F}\vec{S}_{12} = F_s S_{12} = FS_{12}\cos\alpha,$$

где $\vec{S}_{12}$ – перемещение тела между точками 1 и 2; F_s – проекция силы на направление перемещения; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}_{12}$.

Средняя мощность за интервал времени Δt

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = F\upsilon\cos\alpha,$$

где dA – элементарная работа, совершаемая за интервал времени dt.

2. Связь работы с изменением кинетической энергии

Работа всех сил, действующих на тело, идет на приращение кинетической энергии тела

$$A_{12}=E_{k2}-E_{k1},\ E_k=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{p^2}{2m},$$

где m – масса тела; υ – скорость, p – импульс тела, индексом 1 и 2 помечены начальное и конечное значение кинетической энергии.

3. Потенциальная энергия и ее виды.

Потенциальная энергия – это энергия взаимного расположения тел или частей тела, убыль которой равна работе, совершаемой потенциальными (консервативными) силами над телом в силовом поле

$$A_{12}=U_1-U_2=-\Delta U,$$

где индексом 1 и 2 помечены начальное и конечное значение потенциальной энергии.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия точечных или сферически симметричных тел

$$U=-G\frac{m_1m_2}{r},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между центрами масс.

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном гравитационном поле (поле силы тяжести)

$$U=mgh,$$

где m – масса тела; g – ускорение свободного падения; h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой для отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$U=\frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости тела; x – смещение при деформации тела.

4. Связь силы с потенциальной энергией

Потенциальная энергия тела и сила, действующая на тело в данной точке силового поля, связаны соотношением

$$\vec F=-\mathrm{grad}U \text{ или } \vec F=-\left(\vec i\frac{\partial U}{\partial x}+\vec j\frac{\partial U}{\partial y}+\vec k\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

где $\vec i,\vec j,\vec k$ – единичные векторы (орты). В частном случае, когда поле сил обладает сферической симметрией (как, например, гравитационное)

$$F_r=-\frac{dU}{dr}.$$

5. Закон сохранения энергии в механике

Для консервативной системы полная механическая энергия остается постоянной

$$E_k+U=E=\mathrm{const},$$

где E – полная механическая энергия системы.

6. Совместное применение законов сохранения энергии и импульса

к прямому центральному удару шаров дает соотношения:

- для скорости движения шаров после неупругого удара

$$u=(m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2)/(m_1+m_2),$$

- для скорости движения шаров после абсолютно упругого удара

$$\upsilon_1=\frac{\upsilon_1(m_1-m_2)+2m_2\upsilon_2}{m_1+m_2},$$

$$\upsilon_2=\frac{\upsilon_2(m_2-m_1)+2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2},$$

где m_1 и m_2 – массы шаров, а υ_1 и υ_2 – их скорости до удара.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Плотность воды $\rho_0=1\cdot10^3$ кг/м^3.

Плотность льда $\rho=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какими фундаментальными свойствами пространства и времени обусловлены законы сохранения?
2. Какие силы называются внешними, внутренними? Какие системы материальных точек называются замкнутыми, незамкнутыми? Может ли система вести себя как замкнутая в одном определенном направлении?
3. Покажите, что для системы материальных точек $\frac{d\vec p}{dt}=\vec F$, где $\vec p=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec\upsilon_i$ – импульс системы; $\vec F=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i$ – результирующая всех внешних сил.

4. Что называется центром масс системы материальных точек и каковы его свойства?
5. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы материальных точек, указав на его связь с однородностью пространства. Приведите примеры проявления закона сохранения импульса, сохранения проекции импульса.
6. Дайте определение: а) механической работы A; б) мощности N. Каковы свойства этих физических величин? В каких единицах они измеряются?
7. Какие силы называются консервативными, неконсервативными? Какие поля являются потенциальными, непотенциальными?
8. Получите выражение для кинетической энергии движущейся материальной точки. Выведите формулу для потенциальной энергии: а) тела, поднятого над землей; б) упругодеформированной пружины.
9. Для каких систем тел справедлив закон сохранения механической энергии и как он формулируется? Укажите на его связь с однородностью времени.
10. Какое взаимодействие называется ударом? Приведите примеры абсолютно упругого и неупругого ударов.
11. Какими законами сохранения определяется соотношение между начальным и конечным состоянием тел, участвующих в соударении?
12. В какие виды энергии может переходить кинетическая энергия соударяющихся тел? Позволяют ли законы сохранения определить, что происходит в процессе соударения?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(2.44) Найти работу A, которую нужно совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой $m=1$ т от $\upsilon_1=2$ м/с до $\upsilon_2=6$ м/с на пути $S=10$ м. На всем пути действует сила трения $F_{тр}=2$ Н.

Ответ: $A=16$ кДж.

2.(2.50) Камень падает с некоторой высоты без начальной скорости в течение времени $t=1{,}43$ с. Найти кинетическую E_k и потенциальную U энергии камня в средней точке пути. Масса камня $m=2$ кг.

Ответ: $E_k=U=98{,}1$ Дж.

3.(2.57) Тело массой $m=3$кг, имея начальную скорость $\upsilon_0=0$, скользит по наклонной плоскости высотой $h=0{,}5$ м и длиной склона $l=1$ м и приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью $\upsilon=2{,}45$ м/с. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость и количество теплоты Q, выделившееся при трении.

Ответ: $\mu=0{,}22$; $Q=5{,}7$ Дж.

4.(2.67) Конькобежец массой $M=70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=3$ кг со скоростью $\upsilon=8$ м/с. На какое расстояние s откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}02$?

Ответ: $s=0{,}3$ м.

5.(2.68) Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=2$ кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания ее скорость была $\upsilon=0{,}1$ м/с. Масса тележки с человеком $M=100$ кг. Найти кинетическую энергию E_k брошенного камня через время $t=0{,}5$ с после начала его движения.

Ответ: $E_k=49$ Дж.

6.(2.80) Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня $l=1$ м. Найти скорость υ пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha=10^0$.

Ответ: $\upsilon=550$ м/с.

7.(2.80) Стальной шарик массой $m=20$ г, падая с высоты $h_1=1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2=81$ см. Найти импульс p, полученный плитой за время удара, и количество теплоты Q, выделившейся при ударе.

Ответ: $p=0{,}17$ кг·м/с; $Q=37{,}2$ мДж.

8.(2.110) Акробат прыгает в сетку с высоты $H=8$ м. На какой предельной высоте h над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $h_0=0{,}5$ м, если акробат прыгает в нее с высоты $H_0=1$ м.

Ответ: $h=1{,}23$ м.

9.(2.118) Гиря массой $m=0{,}5$ кг, привязанная к резиновому шнуру длиной l_0, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гири $\nu=2$ об/с. Угол отклонения резинового шнура от вертикали $\alpha=30^0$. Жесткость шнура $k=0{,}6$ кН/м. Найти длину l_0 нерастянутого резинового шнура.

Ответ: $l_0=6{,}3$ см.

10.(2.123) Льдина площадью поперечного сечения $S=1$ м^2 и высотой $h=0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу A нужно совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

Ответ: $A=7{,}84$ Дж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(1.18) Шар массой $m=4$ кг движется со скоростью $\upsilon=1{,}5$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $M=6$ кг. Определить работу A по деформации шара. Удар считать неупругим, центральным.

Ответ: $A=2{,}7$ Дж.

2.(1.19) Шар массой $M=4$ кг движется со скоростью $\upsilon=2$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m=3$ кг. Определить скорости шаров u_1 и u_2 после удара. Удар считать упругим, прямым, центральным.

Ответ: $u_1=0{,}286$ м/с, $u_2=2{,}28$ м/с.

3.(1.21) Шар массой $M=3$ кг сталкивается с покоящимся шаром меньшей массы и теряет при этом 45% первоначальной кинетической энергии. Определить массу m меньшего шара. Удар считать упругим, прямым, центральным.

Ответ: $m=0{,}45$ кг.

4.(1.22) Два шара массами $M=2$ кг и $m=1$ кг подвешены в одной точке на нитях длиной $l=0{,}8$ м так, что шары соприкасаются между собой. Шар меньшей массы отклоняют на угол $\alpha=45^0$ и отпускают. Определить высоты h_1 и h_2, на которые поднимутся шары после соударения: 1) если удар упругий, 2) удар неупругий.

Ответ: 1) $h_1=3$ см, $h_2=11$ см; 2) $h_1=h_2=3$ см.

5.(1.24) Деревянный шарик массой $m=0{,}1$ кг падает вертикально вниз с высоты $h=3$ м без начальной скорости. Коэффициент восстановления (отношение скорости тела после удара к скорости тела до удара) при ударе шарика об пол равен 0,5. Найти: 1) высоту h, на которую поднимется шарик после удара об пол; 2) количество теплоты Q, которое выделится при ударе; 3) приращение импульса Δp, полученное шариком при ударе.

Ответ: $h=0{,}75$ м, $Q=2{,}2$ Дж, $\Delta p=1{,}66$ кгм/с.

6.(1.25) Ящик массой $m=25$ кг соскальзывает по идеально гладкому лотку длиной $l=2$ м на неподвижную тележку с песком и застревает в нем. Тележка с песком массой $M=80$ кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость υ тележки, если лоток наклонен под углом $\alpha=30^0$ к горизонту.

Ответ: $\upsilon=0{,}917$ м/с.

7.(1.27) Из ствола автоматического пистолета вылетает пуля массой $m=15$ г со скоростью $\upsilon=100$ м/с. Затвор пистолета массой $M=200$ г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой $k=30$ кН/м. На какое расстояние l отойдет затвор после выстрела? Считать, что пистолет жестко закреплен.

Ответ: $l=1{,}94$ см.

8.(1.28) Определить работу A растяжения двух соединенных последовательно пружин с жесткостями $k_1=300$ Н/м и $k_2=200$ Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $x_1=3$ см.

Ответ: $A=0{,}34$ Дж.

9.(1.32) Если на верхний конец вертикально расположенной пружины положить груз, то она сожмется на $x_0=4$ мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты $h=10$ см?

Ответ: $x_1=32{,}6$ мм.

10.(1.34) Налетев на пружинный буфер, вагон массой $M=15$ т, движущийся со скоростью $\upsilon=0{,}5$ м/с, остановился, сжав пружину на $x=10$ см. Определить жесткость k пружины буфера.

Ответ: $k=375$ кН/м.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Тонкая стальная цепочка с очень мелкими звеньями, имеющая длину $l=1$ м и массу $m=10$ г, лежит на горизонтальном столе. Цепочка вытянута в прямую линию, перпендикулярно к краю стола. Конец цепочки свешивается с края стола. Когда длина свешивающейся части составляет $\eta=0{,}275$ части всей длины, цепочка начинает соскальзывать со стола вниз. Считая цепочку однородной по длине, найти: а) коэффициент трения μ между цепочкой и столом; б) работу A сил трения цепочки об стол за время соскальзывания; в) скорость υ цепочки в конце соскальзывания.

Ответ: а) $\mu=\dfrac{\eta}{1-\eta}=0{,}38.$

б) $A=-\dfrac{mgl}{2}(1-\eta)\cdot\eta=-0.0098$ Дж.

в) $\upsilon=\sqrt{gl(1-\eta)}=2{,}7$ м/с.

2. Тело массой m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) мгновенную мощность $P(t)$, развиваемую при полете тела, приложенной к нему силой; б) значение мощности P в вершине траектории; в) среднее значение мощности $\langle P_{под}\rangle$ за время подъема тела; г) среднее значение мощности $\langle P_{пол}\rangle$ за время полета (точка бросания и точка падения находятся на одном уровне).

Ответ: а) $P(t)=mg(gt-\upsilon_0\sin\alpha)$; б) $P=0$;

в) $\langle P_{под}\rangle=-\dfrac{1}{2}mg\upsilon_0\sin\alpha$; г) $\langle P_{пол}\rangle=0$.

3. Небольшое тело начинает скользить без трения с вершины сферы вниз (см. рис. 1.6). На какой высоте h над центром сферы тело отделится от поверхности сферы и полетит свободно? Радиус сферы равен R. Сопротивлением воздуха пренебречь.

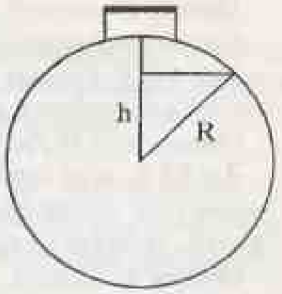

Рис 1.6

Ответ: $h = \frac{2}{3}R$.

4. Для определения коэффициента трения можно воспользоваться установкой, представляющей собой вогнутую цилиндрическую поверхность с нанесенными градусными метками. Тело устанавливают на поверхность цилиндра так, чтобы радиус, проведенный в его центр тяжести, составлял с вертикалью угол α, после чего тело отпускают и оно начинает скользить поперек образующей цилиндра. Как определить коэффициент трения, если сила нормального давления значительно больше центробежной силы? Угол подъема тела, прошедшего положение равновесия, равен β.

Ответ: $k = tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

5. Два шара претерпевают центральный неупругий удар. До удара шар массой m_2 – неподвижен, шар массой m_1 – движется с некоторой скоростью. Какая часть η первоначальной кинетической энергии теряется при ударе, если: а) $m_1=m_2$; б) $m_1=0{,}1m_2$; в) $m_1=10m_2$.

Ответ: а)$\eta = \frac{1}{2}$;б)$\eta = \frac{10}{11} \approx 0.91$;в)$\eta = \frac{1}{11} \approx 0.091$.

6. Водометный двигатель катера забирает воду из реки и выбрасывает ее со скоростью u=10 м/с относительно катера назад. Масса катера M=1000 кг. Масса ежесекундно выбрасываемой воды постоянна и равна m_t=10 кг/с. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить: а) скорость катера υ спустя время t=1 мин после начала движения; б) какой предельной скорости υ_{max} может достичь катер?

Ответ:

$$\text{а) } \upsilon = u\left(1 - e^{-\frac{m_t t}{M}}\right) = 4{,}5 \text{ м / с}$$

$$\text{б) } \upsilon_{max} = u = 10 \text{ м / с}$$

7. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиусом R, зависит от пройденного пути s по закону $T=\alpha s^2$, где α – постоянная. Найти модуль силы, действующей на частицу, в зависимости от s.

Ответ: $F = 2\alpha s\sqrt{1+\left(\frac{s}{R}\right)^2}$.

8. Небольшое тело массой m медленно втащили на горку, действуя силой F, которая в каждой точке направлена по касательной траектории. Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания *l* и коэффициент трения μ.

Ответ: $A=mg(h+\mu l)$.

9. Частица массой m_1 испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массой m_2. Какую относительную часть кинетической энергии потеряла налетающая частица, если: а) она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения; б) столкновение лобовое.

Ответ: а)$\eta = \frac{2m_1}{m_1+m_2}$;б)$\eta = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$.

10. Какой минимальной скоростью должен обладать нейтрон массой m, чтобы при неупругом столкновении с покоившимся ядром массой M увеличить его внутреннюю энергию на ΔE.

Ответ: $\upsilon_{min} = \sqrt{\frac{2\Delta E}{\mu}}$, где $\mu = \frac{mM}{m+M}$.

11. Снаряд, летящий со скоростью υ=500 м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы увеличивается в η=1,5 раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

Ответ: $\upsilon_{max} = \upsilon\left(1+\sqrt{2(\eta-1)}\right) = 1$км/с.