Занятие 5. Динамика вращательного движения

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Момент силы, момент импульса, момент инерции материальной точки и твердого тела.
2. Уравнение динамики вращательного движения.
3. Закон сохранения момента импульса.
4. Работа внешних сил при вращении твердого тела.
5. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Момент силы, момент инерции материальной точки и твердого тела

а) моментом силы $\vec{F}$ относительно точки О называется векторная величина $\vec{M}$, определяемая выражением

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], M = Fr\sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$; α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$;

б) Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z, неподвижной в пространстве, называют векторную величину $\vec{M}_z$ (проекцию вектора $\vec{M}$ на ось Z), определяемую соотношением

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки О, находящейся на оси z, в точку приложения силы $\vec{F}$;

в) момент инерции материальной точки относительно оси вращения

$$I=mr^2,$$

где m – масса точки; r – ее расстояние от оси вращения;

г) момент инерции твердого тела

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2,$$

где Δm_i – масса i-го элемента тела; r_i – расстояние элемента массой Δm_i от оси вращения; n – число элементов тела;

момент инерции твердого тела в интегральной форме

$$I = \int r^2 dm.$$

Если тело однородно, т.е. его плотность ρ одинакова по всему объему, то $dm=\rho dV$ и

$$I = \rho \int r^2 dV,$$

где V – объем тела.

2. Момент инерции однородных тел правильной геометрической формы

а) диска (цилиндра) массой m и радиусом R относительно оси, совпадающей с осью диска (цилиндра)

$$I = \frac{1}{2} mR^2;$$

б) обруча (тонкостенного цилиндра) массой m и радиусом R относительно оси, совпадающей с осью обруча (цилиндра)

$$I=mR^2;$$

в) шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр шара

$$I = \frac{2}{5} mR^2;$$

г) стержня массой m и длиной *l* относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину

$$I = \frac{1}{12} ml^2;$$

д) момент инерции однородного тонкого стержня массой m и длиной *l*, относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно стержню $I = \frac{1}{3} ml^2$.

Теорема Штейнера

Момент инерции тела I относительно заданной оси равен

$$I=I_0+md^2,$$

где I_0 – момент инерции того же тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; m – масса тела; d – расстояние между осями.

3. Моментом импульса $\vec{p}$ относительно точки О

называют векторную величину $\vec{L}$, определяемую выражением

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], L = pr\sin\alpha,$$

где $\vec{p}=m\vec{v}$ – импульс материальной точки; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения импульса $\vec{p}$; α – угол между веторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Момент импульса тела относительно неподвижной в пространстве оси вращения z

$L_z=I\omega_z$,

где I – момент инерции тела относительно оси z; L_z и ω_z – проекции момента импульса и угловой скорости на ось вращения z.

Момент импульса системы материальных точек

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i.$$

4. Уравнения динамики вращательного движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} \quad \text{(уравнения моментов)},$$

где $\vec{L}$ – момент импульса системы относительно точки; $\vec{M}$ – момент сил относительно этой же точки.

Это же уравнение относительно неподвижной в пространстве оси z имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt}=M_z.$$

С учетом пункта 3 уравнение принимает вид

$$M_z=I\varepsilon_z,$$

где M_z – проекция результирующего момента сил на ось вращения z; I – момент инерции системы относительно оси вращения; ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения.

Уравнение динамики вращательного движения для системы материальных точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=\vec{M},$$

где $\vec{M}$ – результирующий момент внешних сил, действующий на систему материальных точек.

5. Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой (изолированной) системы материальных точек $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0$ и ее момент импульса остается постоянным для n взаимодействующих материальных точек.

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}'_i=\text{const}.$$

Для замкнутой системы, состоящей из n взаимодействующих тел с осью вращения, неподвижной в пространстве,

$$\sum_{i=1}^{n}I_i\omega_{zi}=\sum_{i=1}^{n}I'_i\omega'_{zi}=\text{const},$$

где I_i – момент импульса i-го тела относительно оси вращения z; ω_{zi} – проекция угловой скорости i-го тела на ту же ось до взаимодействия, а помеченные штрихом – те же величины после взаимодействия.

Закон сохранения момента импульса для двух взаимодействующих тел относительно неподвижной оси

$$I_1\omega_1+I_2\omega_2=I'_1\omega'_1+I'_2\omega'_2,$$

где I_1, I_2, ω_1, ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия, а I'_1, I'_2, ω'_1, ω'_2 – те же величины после взаимодействия.

Закон сохранения момента импульса для одного тела, момент инерции которого изменяется при взаимодействии

$$I_1\omega_1=I_2\omega_2,$$

где индексом 1 и 2 помечены величины моментов импульсов и угловых скоростей до и после взаимодействия.

6. Работа и мощность момента силы

Работа, совершаемая внешней силой при вращении твердого тела, вокруг неподвижной оси

$$A=\int_0^{\varphi}M_z d\varphi,$$

где M_z – проекция момента сил на неподвижную ось вращения; $d\varphi$ – элементарный угол поворота.

Работа постоянного момента силы M, вращающего тело вокруг неподвижной оси

$$A=M\varphi.$$

где φ – полный угол поворота тела.

Мгновенная мощность момента силы M, развиваемая при вращении вокруг неподвижной оси

$$N = M\omega,$$

где ω – угловая скорость.

7. Кинетическая энергия вращательного движения

$$T = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где $\frac{m\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия его поступательного движения, а $\frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения.

8. Связь работы с изменением вращательной кинетической энергии

Работа момента сил, действующего на тело, идет на приращение вращательной кинетической энергии тела

$$A = \Delta T = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Исходя из основного закона динамики в форме $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, получите уравнение динамики вращательного движения для материальной точки $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.
2. Дайте определение момента силы $\vec{M}$ и момента импульса $\vec{L}$ относительно: а) точки, б) оси вращения. Каковы свойства этих физических величин? Какие у них размерности?

3. Покажите, что для системы материальных точек $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, где $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right]$ – момент импульса системы, $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$ – результирующий момент внешних сил.
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса для системы материальных точек, указав на его связь с изотропностью пространства. Приведите примеры сохранения момента импульса.
5. Получите уравнение моментов для материальной точки, движущейся по окружности, относительно неподвижной оси вращения: $I\varepsilon_z = M_z$.
6. Чему равен момент инерции I материальной точки относительно оси вращения?
7. Запишите уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Чему равен момент инерции I твердого тела относительно оси вращения? Является ли эта величина аддитивной?
8. Запишите и сформулируйте теорему Штейнера.
9. Приведите соотношения для моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы.
10. Запишите выражение для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Чему равна кинетическая энергия твердого тела при плоском движении?
11. Как определить работу внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси? Чему равна мощность при вращательном движении?
12. Как приращение вращательной кинетической энергии связано с работой момента силы?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(3.9) Маховое колесо, момент инерции которого $I = 245$ кгм^2, вращается с частотой $\nu = 20$ об/с. Через время $t = 1$ мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил M, оно остановилось. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

Ответ: $M_{тр} = 513$ Н·м; $N = 600$ об.

2.(3.13) На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $I = 0{,}1$ кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота груза над полом $h_0 = 1$ м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию E_k груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Ответ: t=1,1 с; E_k=0,81 Дж; T=4,1 Н.

3.(3.14) Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I=50 кг·м^2 и радиус R=20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$=98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити T_1–T_2 по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением ε=2,36 рад/с^2. Блок считать однородным диском. Нить не проскальзывает.

Ответ: T_1–T_2=1,08 кН.

4.(3.28) Найти линейные скорости υ движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h=0,5 м, начальная скорость всех тел υ_0=0. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Ответ: υ_1=2,65 м/с, υ_2=2,56 м/с, υ_3=2,21 м/с; υ=3,13 м/с.

5.(3.32) Маховое колесо, момент инерции которого I=245 кгм^2, вращается с частотой ν=20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N=1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

Ответ: $M_{тр}$=308 Н·м; t=100 с.

6.(3.34) Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением ε=0,5 рад/с^2 и через время t_1=15 с после начала движения приобретает момент импульса L=73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию T колеса через время t_2=20 с после начала движения.

Ответ: T=490 Дж.

7.(3.36) К ободу диска массой m=5 кг приложена касательная сила F=19,6 Н. Какую кинетическую энергию T будет иметь диск через время t=5 с после начала действия силы?

Ответ: T=1,92 кДж.

8.(3.38) Однородный стержень длиной l=85 см подвешен к горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость υ надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Ответ: υ=7,1 м/с.

9.(3.40) Горизонтальная платформа массой m=100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой ν_1=10 об/мин. Человек массой m_0=60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой. Трения в оси нет.

Ответ: ν_2=22 об/мин.

10.(3.42) Горизонтальная платформа массой m=80 кг и радиусом R=1 м вращается с частотой ν_1=20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1=2,94 кгм^2 до I_2=0,98 кг·м^2? Считать платформу однородным диском. Трения нет.

Ответ: ν_2=21 об/мин.

11.(3.44) Человек массой m_0=60 кг находится на неподвижной платформе массой m=100 кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек начнет движение по окружности радиусом r=5 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы υ_0=4 км/ч. Радиус платформы R=10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой. Трения в оси нет.

Ответ: ν=0,49 об/мин.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(1.43) Однородный диск радиусом R=0,2 м вращается с постоянным угловым ускорением ε=100 с$^{-2}$ под действием силы F=100 Н, приложенной по касательной к его ободу. Определить массу m диска, если при вращении на него также действует постоянный момент силы трения $M_{тр}$=5 Н·м.

Ответ: m=7,5 кг.

2.(1.44) Однородный цилиндр начинает вращение с постоянным угловым ускорением ε=0,3 с$^{-2}$ и через t_1=25 с после начала движения приобретает момент импульса L=75 кг·м^2/с. Определить кинетическую энергию T цилиндра через t_2=40 с после начала вращения.

Ответ: T=720 Дж.

3.(1.45) Диск массой m=0,8 кг и радиусом R=30 см вращается с частотой ν=10 об/с. Под действием внешних сил диск останавливается. Найти работу A внешних сил.

Ответ: A=71 Дж.

4.(1.46) На обод маховика диаметром d=40 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m=3 кг. Определить момент инерции I маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием груза, приобрел угловую скорость ω=9 с$^{-1}$ в течение t=3 с после начала движения.

Ответ: I=1,84 кг·м^2.

5.(1.49) Стержень массой m=2 кг и длиной l=1,2 м вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi=At+Bt^2$, (A=3 с$^{-1}$, B=0,2 с$^{-2}$). Определить вращающий момент M, действующий на стержень.

Ответ: M=0,096 Н·м.

6.(1.50) Стержень массой m=6 кг и длиной l=1,2 м вращается в горизонтальной плоскости под действием силы F=10 Н, приложенной перпендикулярно к одному из его концов. Ось вращения вертикальна и проходит через второй конец стержня. Определить угловое ускорение ε и частоту вращения ν стержня через t=5 с после начала действия силы.

Ответ: ε=4,17 с$^{-2}$, ν=3,32 об/с.

7.(1.51) Мяч массой m=200 г пролетает в горизонтальном направлении на расстоянии r=0,5 м от оси вращения неподвижной скамьи Жуковского, в центре которой стоит человек. После того , как человек поймал мяч, скамья стала вращаться с угловой скоростью ω=0,05 с$^{-1}$. Определить скорость пролета мяча υ, если суммарный момент инерции человека и скамьи I=20 кг·м^2. Трения в оси нет.

Ответ: υ=10 м/с.

8.(1.53) В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках конец стержня. Стержень расположен вертикально вдоль оси вращения скамьи, которая вращается при этом с угловой скоростью ω_1=5 с$^{-1}$. Длина стержня l=1,6 м, его масса m=4 кг. Суммарный момент инерции человека и скамьи I=7,5 кг·м^2. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение. Трения в оси нет.

Ответ: ω_2=3,42 с$^{-1}$.

9.(1.56) Платформа вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, с частотой ν_1=0,5 об/с. В центре ее стоит человек и держит на вытянутых руках гири массой m=5 кг каждая. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек сожмет руки и расстояние каждой гири от оси вращения уменьшится от r_1=80 см до r_2=25 см? Суммарный момент инерции человека и платформы относительно оси вращения I=2,4 кг·м^2.

Ответ: ν_2=1,45 об/с.

10.(1.57) Стержень длиной l=1,2 м и массой M=5 кг может вращаться около горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попадает пуля массой m=20 г, летящая горизонтально со скоростью υ=400 м/с, и застревает в нем. На какой угол φ отклонится стержень после попадания пули?

Ответ: φ=68,4^0.

11.(1.58) Через отверстие в горизонтальной поверхности пропущена нить длиной l_1=1,6 м. К другому концу нити прикреплен шарик массой m=50 г, который вращается с частотой ν_1=3 об/с, двигаясь по поверхности без трения. С какой частотой ν_2 будет вращаться шарик, если постепенно укоротить нить до длины l_2=0,8 м. Какую работу A совершит при этом сила, укорачивающая нить? Трения нет.

Ответ: ν_2=12 об/с, A=67,2 Дж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Вращение от двигателя к ведущим колесам автомобиля передается через ряд устройств, одно из которых, называемое сцеплением, позволяет в случае надобности отключить двигатель от остальных устройств. Сцепление, в принципе, состоит из двух одинаковых фрикционных накладок, прижимаемых друг к другу сильными пружинами. В автомобиле «Жигули» фрикционные накладки имеют форму колец с внутренним диаметром d_1=142 мм и наружным диаметром d_2=203 мм. Коэффициент трения накладки по накладке μ=0,35. Найти наименьшую силу F, с которой нужно прижимать накладки, чтобы передать вращательный момент M=100 Н·м.

Ответ: $F=\dfrac{3M}{\mu}\left(\dfrac{d_2^2-d_1^2}{d_2^3-d_1^3}\right)=3{,}3\cdot10^3$ Н

2. Тонкий стержень длиной l=1 м и массой m=0,6 кг может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к нему, и отстоящей от центра стержня на расстояние a=0,1 м. Стержень приводится в горизонтальное положение и отпускается без толчка. Определить: а) угловое ускорение стержня ε_0 и силу давления F_0 на ось в начальный момент времени; б) угловую скорость ω и силу давления F на ось в момент прохождения стержнем положения равновесия.

Ответ: а) $\varepsilon_0=\dfrac{12ag}{l^2+12a^2}$=11 рад/с^2,

$$F_0 = \frac{mgl^2}{l^2+12a^2} = 5{,}3\ \text{Н} = 0{,}89\ mg;$$

$$б)\ \omega = 2\sqrt{\frac{6ga}{l^2+12a^2}} = 4{,}6\ \text{рад/с},$$

$$F = mg\frac{l^2+36a^2}{l^2+12a^2} = 7{,}1\ \text{Н} = 1{,}21\ mg.$$

3. Тело массой m брошено в начале координат под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Траектория полета тела лежит в плоскости x, y (см. рис. 1.7, ось z направлена на нас). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти зависимость от времени: а) момента M силы, действующего на частицу; б) момента импульса частицы L. Оба момента рассчитывать относительно начала координат.

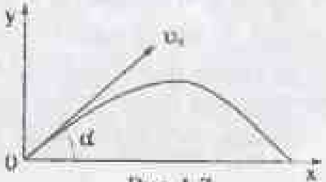


Рис.1.7

Ответ: а) $\vec{M} = -mg\upsilon_0 t\cos\alpha\ \vec{k}$, б) $\vec{L} = -\frac{1}{2}mg\upsilon_0 t^2\cos\alpha\ \vec{k}$,

где k – единичный вектор оси z.

4. В системе, показанной на рис. 1.8, известны масса m груза A, масса M ступенчатого шкива B, момент инерции I последнего относительно его оси и радиусы ступеней шкива R и 2R. Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорение a груза A.

Ответ: $a = g\dfrac{m-M}{m+M+\dfrac{I}{R^2}}$.

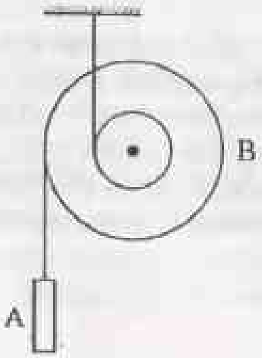


Рис.1.8

5. Сплошной однородный цилиндр A массой m_1 может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, которая укреплена на подставке B массой m_2. На цилиндр плотно намотана легкая нить, к концу K которой приложили постоянную горизонтальную силу F (см. рис. 1.9). Трения между подставкой и опорной горизонтальной плоскостью нет. Найти: а) ускорение точки K; б) кинетическую энергию T этой системы через t секунд после начала движения.

Ответ: а) $a = \dfrac{F(3m_1+2m_2)}{m_1(m_1+m_2)}$,

б) $T = \dfrac{F^2t^2(3m_1+2m_2)}{2m_1(m_1+m_2)}$.

6. Два одинаковых груза массой m подвешены в одной точке к вертикальной оси на нитях длиной l. Определить их кинетическую энергию T, если при вращении они отклонились на угол α.

Ответ: $E_k = mgl\sin\alpha\,tg\,\alpha$.

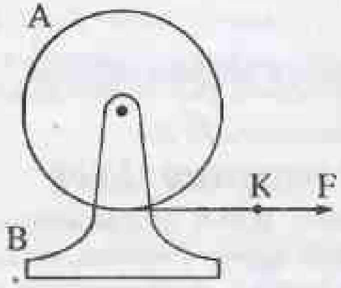


Рис.1.9

7. Шар и цилиндр, двигаясь с одинаковой начальной скоростью вкатываются без проскальзывания вверх по наклонной плоскости. Найти отношение высот подъема. Какое из тел поднимется выше?

Ответ: $\dfrac{h_2}{h_1} = 1{,}07$.

8. С какой скоростью должен въехать велосипедист в нижнюю точку мертвой петли радиусом R=10 м, чтобы не сорваться вниз в верхней ее точке? Масса велосипедиста с велосипедом M=90 кг, масса обоих колес m=6 кг. Трением пренебречь, момент инерции колеса рассчитывать как момент инерции обода.

Ответ: υ=21,2 м/с.

9. Однородный шар массой m=5 кг скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющий угол α=30° с горизонтом. Найти кинетическую энергию T шара через t=1,6 секунд после начала движения.

Ответ: $T = \dfrac{5}{14}mg^2t^2\sin^2\alpha = 0{,}11$ кДж.

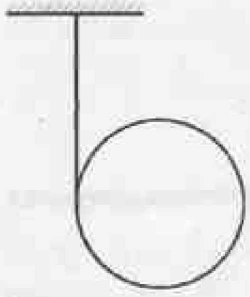


Рис.1.10

10. Однородный цилиндр массой m=8 кг и радиусом R=1,3 см в момент t=0 начинает опускаться под действием силы тяжести (см. рис 1.10). Пренебрегая массой нити, найти: а) угловое ускорение цилиндра ε; б) зависимость от времени мгновенной мощности N, которую развивает сила тяжести.

Ответ: а) $\varepsilon = 2g/(3R) = 5\cdot10^2$ рад/с²; б) $N = 2mg^2(t/3)$.

2. СТО, молекулярная физика и термодинамика

Занятие 6. Специальная теория относительности

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Элементы специальной теории относительности.
2. Преобразования Лоренца.
3. Следствия из преобразований Лоренца.
4. Сложение скоростей.
5. Интервал между событиями.
6. Основной закон релятивистской динамики материальной точки.
7. Взаимосвязь массы и энергии.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В специальной теории относительности (СТО) рассматриваются только инерциальные системы отсчета. Во всех задачах считается, что оси y,y' и z,z' сонаправлены, а относительная скорость υ_0 "штрихованной" системы координат K' относительно "нештрихованной" K направлена вдоль общей оси xx' (рис. 2.1).

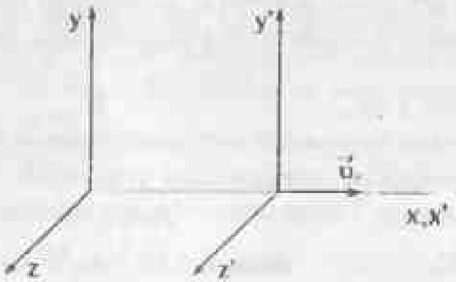


Рис. 2.1

1. Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\upsilon_0/c\right)^2},$$

где l_0 – длина стержня в системе координат K', относительно которой стержень покоится (собственная длина). Стержень параллелен оси x';

l – длина стержня, измеренная в системе K, относительно которой он движется со скоростью υ_0; c – скорость плоской электромагнитной волны в вакууме.

2. Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \Delta t_0/\sqrt{1-\left(\upsilon_0/c\right)^2},$$

где Δt_0 – интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы K', измеренный по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt – интервал времени между двумя событиями, измеренный по часам системы K.

3. Релятивистское сложение скоростей

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + \upsilon_0}{1+\upsilon_0\upsilon_x'/c^2};\quad \upsilon_y = \frac{\upsilon_y'\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}{1+\upsilon_0\upsilon_x'/c^2};\quad \upsilon_z = \frac{\upsilon_z'\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}{1+\upsilon_0\upsilon_x'/c^2},$$

где υ_x', υ_y', υ_z' – компоненты скорости тела относительно системы K'; υ_0 – переносная скорость (скорость системы K' относительно K), υ_x, υ_y, υ_z – компоненты абсолютной скорости тела (скорость тела относительно лабораторной системы K). В теории относительности абсолютной скоростью называется скорость тела в системе координат, условно принятой за неподвижную.

Из приведенных формул можно получить соотношения для скоростей в системе K', выраженные через скорости в системе K:

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - \upsilon_0}{1-\upsilon_0\upsilon_x/c^2};\quad \upsilon_y' = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}{1-\upsilon_0\upsilon_x/c^2};\quad \upsilon_z' = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}{1-\upsilon_0\upsilon_x/c^2}.$$

4. Релятивистская масса

$$m = m_0/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)},\ \text{или}\ m = m_0/\sqrt{1-\beta^2},$$

где m_0 – масса покоя; β – скорость частицы, выраженная в долях скорости света ($\beta=\upsilon/c$).

5. Релятивистский импульс

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon} = m_0\vec{\upsilon}/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}; P = m_0 c\beta/\sqrt{1-\beta^2}.$$

6. Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T,$$

где T – кинетическая энергия частицы; $m_0c^2 = E_0$ – ее энергия покоя. Частица называется релятивистской, если скорость частицы сравнима со скоростью света и классической, если $\upsilon \ll c$.

7. Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы

$$E^2 - P^2c^2 = m_0^2c^4.$$

8. Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы

$$P^2c^2 = T(2E_0 + T).$$

9. При неупругом столкновении релятивистских частиц с массой m_1 и m_2 выполняются два закона сохранения:

а) закон сохранения релятивистской массы

$$m_1 + m_2 = m,$$

где m – масса составной частицы;

б) закон сохранения релятивистского импульса

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P},$$

где $\vec{P}$ – импульс составной частицы,

$\vec{P}_1, \vec{P}_2$ – импульсы сталкивающихся частиц.

10. Связь между массой и энергией

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

Изменение массы системы на Δm соответствует изменению энергии системы на ΔE и наоборот.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1 эВ=$1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж; 1 Мэв=$1{,}6\cdot10^{-13}$ Дж;
c=$3\cdot10^8$ м/с; E_0 (электрона)=0,511 МэВ;
масса покоя электрона = $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг;
масса покоя протона = $1{,}67\cdot10^{-27}$ кг;
масса покоя нейтрона = $1{,}67\cdot10^{-27}$ кг;

Протон – ядро атома водорода, положительный заряд которого численно равен заряду электрона.

Нейтрон – элементарная нейтральная частица, входящая в состав сложных ядер.

α – частица (ядро атома гелия) состоит из двух протонов и двух нейтронов.

Мезон – нестабильная элементарная частица.

Дейтрон (дейтон) – ядро тяжелого изотопа водорода - дейтерия, содержит один протон и один нейтрон.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем заключается механический принцип относительности? В чем состоит ограниченность этого принципа?
2. Как записываются преобразования Галилея? Каким образом вводятся понятия движущейся K' (штрихованной) и неподвижной K (лабораторной) систем отсчета?
3. На основе преобразований Галилея: а) укажите относительные и инвариантные свойства пространства и времени; б) сравните показания движущихся и неподвижных часов; длины движущегося и неподвижного стержня. Получите правило сложения скоростей в нерелятивистской механике.
4. Покажите связь закона инерции с принципом относительности Галилея. Какие величины ньютоновской динамики инвариантны?
5. Сформулируйте постулаты специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна. В чем отличие первого постулата СТО от принципа относительности в механике? Отличаются ли постулаты об общих свойствах пространства и времени в СТО от соответствующих классических?
6. В чем заключается проблема одновременности в релятивистской физике?

7. Как в СТО определяется "длина движущегося тела"? Что называется собственной длиной; лоренцевым сокращением?
8. Запишите преобразования Лоренца. Покажите, что преобразования Галилея являются частным случаем преобразований Лоренца.
9. Рассмотрите следствия из преобразований Лоренца: относительность одновременности, сокращение масштаба, замедление времени. .
10. Получите на основе преобразований Лоренца релятивистский закон сложения скоростей.
11. Запишите релятивистское выражение: а) для массы; б) для импульса; в) для кинетической энергии. Каковы особенности основного уравнения релятивистской динамики?
12. Каково содержание закона $E=mc^2$ (c – скорость света в вакууме)?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(17.1) При какой относительной скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25%?

Ответ: $\beta=0{,}6615$

2.(17.2) Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

Ответ: $\upsilon=2{,}6\cdot10^8$ м/с.

3.(17.5) Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Какой промежуток времени по часам земного наблюдателя соответствует одной секунде "собственного времени" мезона?

Ответ: $\Delta t=3{,}2$ с.

4.(17.9) До какой энергии можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5%? Задачу решить для: 1) электронов, 2) протонов, 3) дейтонов.

Ответ: 1) Т=25,6 кЭВ; 2) Т=47 МэВ; 3) Т=94 МэВ.

5.(17.10) Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его скорость составила 95% скорости света?

Ответ: $U=1{,}1\cdot10^6$ В.

6.(17.12) Найти скорость мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Ответ: $\upsilon=2{,}985\cdot10^8$ м/с.

7.(17.18) Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию электрона.

Ответ: $T=8{,}2\cdot10^{-14}$ Дж.

8.(17.19) Какому изменению массы соответствует изменение энергии на 4,19 Дж?

Ответ: $\Delta m=4{,}6\cdot10^{-17}$ кг.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(1.81) α-частица имеет импульс $P=2{,}7\cdot10^{-19}$ кгм/с. Какую кинетическую энергию нужно дополнительно сообщить α-частице, чтобы ее релятивистский импульс увеличился вдвое?

Ответ: Т=100 Мэв.

2.(1.82) Ядро гелия, обладая кинетической энергией 50 Мэв, при торможении потеряло половину этой энергии. Во сколько раз изменился релятивистский импульс ядра в результате торможения?

Ответ: уменьшится в 1,42 раза.

3.(1.83) Найти величину ускоряющей разности потенциалов, пройдя которую, протон будет иметь такую же массу, что и альфа-частица с кинетической энергией 1000 Мэв.

Ответ: $U=3{,}79\cdot10^9$ В.

4.(1.84). Масса движущегося протона в два раза превышает его массу покоя. Найти полную и кинетическую энергию этого протона.

Ответ: Е=1876 МэВ, Т=938 МэВ.

5.(1.85) Определить скорость, при которой релятивистский импульс частицы в два раза превышает ее ньютоновский импульс.

Ответ: $\upsilon=2{,}6\cdot10^8$ м/с.

6.(1.86) До каких значений энергии можно ускорить частицы в циклотроне, чтобы увеличение масс частиц не превышало 10%? Решение провести для электронов и протонов.

Ответ: $E_э=0{,}562$ МэВ; $E_p=1032$ МэВ.

7.(1.87) При движении протона произошло увеличение его релятивистского импульса в 3 раза. Во сколько раз изменилась его релятивистская масса, если начальный импульс протона $p = 2{,}2\cdot10^{-19}$ кгм/с?

Ответ: увеличилась в 1,51 раз.

8.(1.88) Найти при какой скорости, выраженной в долях скорости света, релятивистская масса любой частицы в 3 раза больше ее массы покоя?

Ответ: $\beta=0{,}94$

9.(1.89) Электрон движется со скоростью 0,6 с (с – скорость света). Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость электрона до 0,8 c? Сравнить результат со значением, полученным для нерелятивистского случая.

Ответ: $A=3{,}43\cdot10^{14}$ Дж; $A_н=1{,}14\cdot10^{14}$ Дж.

10.(1.90) Найти скорость частицы, если ее кинетическая энергия составляет две трети от энергии покоя.

Ответ: $\upsilon=2{,}4\cdot10^{8}$ м/с.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость $v=c/2$, длина $l=1{,}00$ м и угол между ним и направлением движения $\Theta=45^0$.

Ответ: $l_0=l\sqrt{\left(1-\beta^2\sin^2\Theta\right)/\left(1-\beta^2\right)}=\sqrt{7/6}\approx1{,}08$ м, где $\beta=\upsilon/c$.

2. В системе K' находится квадрат, две стороны которого параллельны оси x. Определить острый угол φ между его диагоналями в системе K, если система K' движется относительно K со скоростью $\upsilon_0=0{,}95$ c. Скорость направлена вдоль осей OX и OX'.

Ответ: $\varphi=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}\approx34{,}68^0$.

3. Две частицы, движущиеся в лабораторной системе отсчета по одной прямой с одинаковой скоростью $V=3c/4$, попали в неподвижную мишень с интервалом времени $\Delta t=50$ нс. Найти собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

Ответ: $l_0=\upsilon\cdot\Delta t/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}=17$м.

4. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $V_1=0{,}6$ c и $V_2=0{,}9$ c по прямой, совпадающей с осью X. Определить их относительную скорость движения u_{12} в двух случаях: 1) частицы движутся в одном направлении; 2) частицы движутся в противоположных направлениях.

Ответ: 1) $u_{12}=0{,}652$c; 2) $u_{12}=-0{,}974$c.

5. Частица с массой покоя m_0 в момент $t=0$ начинает движение под действием постоянной силы F. Найти зависимость от времени t скорости частицы и пройденного ею пути.

Ответ: $\upsilon=\dfrac{Fct}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}},\ S=\sqrt{\left(m_0c^2/F\right)^2+c^2t^2}-m_0c^2/F$.

6. Частица с массой покоя m_0 движется вдоль оси x K-системы по закону $x=\sqrt{a^2+c^2t^2}$, где a – некоторая постоянная, c – скорость света, t – время. Найти силу, действующую на частицу в этой системе отсчета. ***Ответ:*** $F=m_0c^2/a$.

7. Пучок релятивистских частиц с кинетической энергией T падает на абсолютно поглощающую мишень. Сила тока в пучке I, заряд и масса покоя каждой частицы e, m_0 соответственно. Оценить силу давления пучка на мишень и выделяющуюся в мишени мощность.

Ответ: $F=(I/ec)\sqrt{T\left(T+2m_0c^2\right)},\ P=TI/e$.

8. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета: одна со скоростью $\upsilon_1=c/3$, направленной по оси x, а другая – со скоростью $\upsilon_2=2c/3$, направленной по оси y. Найти: 1) результирующую скорость движения υ в лабораторной системе отсчета; 2) их относительную скорость движения u.

Ответ:

$$1)\ \upsilon=\sqrt{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2}=\frac{c}{3}\sqrt{5};\quad 2)\ u=\sqrt{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2-\left(\frac{\upsilon_2\upsilon_1}{c}\right)^2}=c\sqrt{41/81}.$$

9. Релятивистская частица с кинетической энергией $T=m_0c^2$ (m_0 – масса покоя частицы) испытывает неупругое столкновение с такой же покоящейся (в лабораторной системе отсчета) частицей. При этом образуется составная частица. Определить: 1) релятивистскую массу m налетающей частицы; 2) релятивистскую массу m' и массу покоя m_0' составной частицы; 3) кинетическую энергию составной частицы.

Примечание: для решения задачи воспользоваться теоретическими положениями п.9.

Ответ: 1) $m=2m_0$; 2) $m'=3\,m_0$, $m_0'=m_0\sqrt{6}$, $T'=0{,}55m_0c^2$.

10. В системе K' покоится тонкостенный кубик, ребра которого совпадают с осями системы K'. В кубике содержится идеальный газ. Найти скорость системы K', при которой концентрация газа, с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно системы K, будет больше на 25%, чем в системе K'.

Ответ: $\upsilon=c\sqrt{\eta(2+\eta)}/(1+\eta)=0{,}6$ c, где $\eta=0{,}25$.

Занятие 7. Идеальный газ. Молекулярно-кинетическая теория

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Идеальный газ, изопроцессы.
2. Уравнение Клапейрона-Менделеева.
3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.
4. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.
5. Число степеней свободы молекулы.
6. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.
7. Теплоемкости (удельная, молярная).
8. Смесь газов. Закон Дальтона.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Законы идеальных газов

1.1. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$PV = \frac{m}{M}RT, \text{ или } PV = \nu RT,$$

где m – масса газа; M – его молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; ν=m/M – количество молей вещества; T – абсолютная температура.

1.2. Закон Дальтона

$$P=P_1+P_2+...+P_m$$

где P – давление смеси газов; P_i – парциальное давление i-го компонента смеси; n – число компонентов смеси.

1.3. Молярная масса смеси газов

$$M=(m_1+m_2+...+m_k)/(\nu_1+\nu_2+...+\nu_k),$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; ν_i – количество вещества i-го компонента смеси; к – число компонентов смеси.

1.4. Массовая доля i-й компоненты смеси газов

$$W_i=m_i/m,$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; m – масса смеси.

2. Молекулярно-кинетическая теория газов (МКТ)

2.1. Количество вещества

$$\nu=m/M=N/N_A,$$

где N – число структурных элементов системы (молекул, атомов, ионов и т.п.); N_A – число Авогадро; m – масса газа; M– молярная масса.

2.2. Молярная масса вещества

$$M=m/\nu.$$

2.3. Масса одной молекулы вещества

$$m_0=M/N_A.$$

2.4. Количество вещества смеси

$$\nu = \nu_1+\nu_2+...+\nu_k = \frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}+...+\frac{m_k}{M_k},$$

где ν_i, m_i – количество вещества и масса i-го компонента смеси; к – число компонентов смеси.

2.5. Концентрация частиц (молекул, атомов и т.п.) однородной системы

$$n=\frac{N}{V}=\rho\frac{N_A}{M},$$

где N – число частиц системы; V – ее объем; ρ – плотность вещества.

2.6. Основное уравнение кинетической теории газов

$$P=\frac{2}{3}n\langle\varepsilon_n\rangle,$$

где P – давление газа; n – его концентрация; $\langle\varepsilon_n\rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

2.7. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle\varepsilon_i\rangle=\frac{1}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

2.8. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на все возбужденные степени свободы молекулы

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где i – число возбужденных степеней свободы молекулы.

2.9. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$\langle\varepsilon_n\rangle = \frac{3}{2}kT.$$

2.10. Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$P=nkT.$$

2.11. Молярная С и удельная с теплоемкости газа связаны между собой соотношением

$$C=Mc,$$

где M – молярная масса газа.

2.12. Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении равны соответственно

$$C_v=iR/2;\ C_p=(i+2)R/2,$$

где i – число степеней свободы; R – универсальная газовая постоянная.

2.13. Удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M};\ c_P = \frac{i+2}{2}\cdot\frac{R}{M}.$$

2.14. Уравнение Майера для молярных теплоемкостей

$$C_P - C_V = R.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Давление 1 мм рт. ст.=133 Па.

Давление 1 атм=760 мм рт. ст.

Молярная масса воздуха $M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Молярная масса аргона $M=40\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Молярная масса криптона $M=84\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Нормальные условия: $P=1{,}01\cdot10^5$ Па, T=273 К.

Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

Универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/(моль·К).

Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Каковы основные положения термодинамического и молекулярно-кинетического (статистического) методов изучения макроскопических систем?
2. Назовите основные параметры термодинамической системы.
3. Дайте определение единицы термодинамической температуры.
4. Запишите уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона).
5. Каковы физический смысл, размерность и численное значение универсальной газовой постоянной R?
6. Сформулируйте законы изопроцессов идеального газа.
7. Дайте определение единицы количества вещества 1 моль.
8. Сколько молекул содержится в моле любого вещества?
9. Как можно рассчитать линейные размеры одной молекулы?
10. На чем основан вывод уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов для давления? Сравните это уравнение с уравнением Менделеева-Клапейрона.
11. Получите соотношения p=nkT и $\langle\varepsilon\rangle=3kT/2$.
12. Каковы физический смысл, численное значение и единицы измерения постоянной Больцмана k?
13. Каково содержание одного из основных положений статистической физики о равнораспределении энергии по степеням свободы?
14. Считая, что средняя энергия молекулы идеального газа $\langle\varepsilon\rangle=ikT/2$, где i – сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы, получите выражение для внутренней энергии произвольной массы идеального газа.

15. Что такое удельная и молярная теплоемкости идеального газа? Почему для идеального газа существуют два вида теплоемкостей?
16. Получите уравнение Майера для молярных теплоемкостей.
17. Запишите закон Дальтона и объясните его физический смысл. Какие физические величины, характеризующие смесь, можно складывать?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(5.20) Чему равна плотность ρ воздуха в сосуде, если сосуд откачан до наивысшего разрежения, создаваемого современными лабораторными способами ($P=10^{-11}$ мм рт. ст.)? Температура воздуха равна 15^0С.

Ответ: $\rho=1{,}6\cdot10^{-14}$ кг/м^3.

2.(5.21) $m=12$ г газа занимают объем $V=4\cdot10^{-3}$ м^3 при температуре $t=7^0$С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho=6\cdot10^{-4}$ г/см^3. До какой температуры нагрели газ?

Ответ: $T=1400^0$ К.

3.(5.28) В сосуде находится $m_1=14$ г азота и $m_2=9$ г водорода при температуре $t=10^0$С и давлении $P=1$ МПа. Найти: 1) молярную массу смеси, 2) объем сосуда.

Ответ: $M=4{,}6\cdot10^{-3}$ кг/моль; $V=11{,}7\cdot10^{-3}$ м^3.

4.(5.29) В закрытый сосуд, наполненный воздухом при температуре 20^0С и давлении 100 кПа, вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того, как эфир испарился, давление в сосуде стало равно $P=0{,}14$ МПа. Какое количество эфира было введено в сосуд? Объем сосуда $V=2$ л.

Ответ: $m=2{,}43\cdot10^{-3}$ кг.

5.(5.58) Чему равна энергия теплового движения $m=20$ г кислорода (O_2) при температуре $t=10^0$С? Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения, а какая – на долю вращательного?

Ответ: $W=3{,}7$ кДж; $W_{пост}=2{,}2$ кДж; $W_{вр}=1{,}5$ кДж.

6.(5.61) Чему равна энергия теплового движения молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом $V=2$ л и находящегося под давлением $P=150$ кПа?

Ответ: $W=750$ Дж.

7.(5.69) Для некоторого двухатомного газа удельная теплоемкость при постоянном давлении равна $c_p=14{,}67\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Чему равна молярная масса этого газа?

Ответ: $M=2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

8.(5.71) Найти удельные теплоемкости c_v и c_p некоторого газа, если известно, что его молярная масса $M=0{,}03$ кг/моль и отношение $c_p/c_v=1{,}4$.

Ответ: $c_v=693$ Дж/(кг·К); $c_p=970$ Дж/(кг·К).

9.(5.76) Найти удельную теплоемкость при постоянном давлении газовой смеси, состоящей из $\nu_1=3$ кмоль аргона (Ar) и $\nu_2=2$ кмоль азота (N_2).

Ответ: $c_p=685$ Дж/(кг·К).

10.(5.77) Найти отношение c_p/c_v для газовой смеси, состоящей из $m_1=8$ г гелия (He) и $m_2=16$ г кислорода (O_2).

Ответ: $c_p/c_v=1{,}59$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(2.2) Баллон емкостью $V=20$ л содержит смесь водорода (H_2) и гелия (He) при температуре $T=300$ К и давлении $P=8$ атм. Масса смеси $m=25$ г. Определить массы водорода m_1 и гелия m_2. 1 атм.=100 кПа.

Ответ: $m_1=0{,}672\cdot10^{-3}$ кг; $m_2=24{,}3\cdot10^{-3}$ кг.

2.(2.3) В сосуде находится смесь $m_1=7$ г азота (N_2) и $m_2=11$ г углекислого газа (CO_2) при температуре $T=290$ К и давлении $P=1$ атм. Найти плотность ρ этой смеси, считая газы идеальными. 1 атм.=100 кПа.

Ответ: $\rho=1{,}49$ кг/м^3.

3.(2.4) Сосуд объемом $V=60$ л содержит смесь кислорода (O_2) и водорода (H_2) при температуре $T=360$ К и давлении $P=750$ мм рт. ст. Масса смеси $m=19$ г. Определить парциальные давления кислорода p_1 и водорода p_2. 1 мм рт. ст.=133 Па.

Ответ: $p_1=24{,}9$ кПа; $p_2=74{,}8$ кПа.

4.(2.7) В сосуде находится смесь $m_1=8$ г кислорода (O_2) и $m_2=7$ г азота (N_2) при температуре $T=400$ К и давлении $P=10^6$ Па. Найти плотность смеси газов ρ, парциальные давления компонент p_1, p_2 и массу одного моля смеси M.

Ответ: $\rho=9{,}0$ кг/м^3; $p_1=p_2=0{,}5$ МПа; $m=30\cdot10^{-3}$ кг.

5.(2.8) Оболочка аэростата, находящегося у поверхности земли, наполнена водородом на 7/8 своего объема, равного $V=1600$ м^3, при давлении $P_1=100$ кПа и температуре $T_1=290$ К. Аэростат поднялся на некоторую высоту, где давление P_2=80 кПа и температура T_2=280 К. Определить массу водорода Δm, вышедшего из оболочки аэростата при его подъеме.

Ответ: Δm=6,16 кг.

6.(2.51) Двухатомный газ массой m=10 г занимает объем V=6 л при давлении $P=10^6$ Па и температуре $t=27^0C$. Определить удельную теплоемкость c_v этого газа.

Ответ: $c_v=5\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

7.(2.52) Определить удельную теплоемкость смеси c_P при постоянном давлении, если смесь состоит из m_1=20 г углекислого газа (CO_2) и m_2=40 г криптона (Kr).

Ответ: c_P=417 Дж/(кг·К).

8.(2.55) Одному киломолю некоторого идеального газа в процессе изобарического расширения сообщили количество тепла Q=249 кДж, при этом его температура увеличилась на $\Delta T=(T_2-T_1)$=12 К. Определить число степеней свободы газа i.

Ответ: i=3.

9.(2.56) Найти массу m одного киломоля и число степеней свободы i молекулы газа, у которого удельные теплоемкости равны: c_V=750 Дж/(кг·К), c_P=1050 Дж/(кг·К).

Ответ: m=27,7 кг, i=5.

10.(2.58) Плотность некоторого трехатомного газа при нормальных условиях составляет $\rho=1{,}4$ кг/м^3. Определить удельную теплоемкость c_V этого газа при изохорическом процессе. Атмосферное давление P_0=100 кПа.

Ответ: c_V=785 Дж/(кг·К).

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. В сосуде находится смесь кислорода (O_2) и водорода (H_2). Масса m смеси равна 3,6 г. Массовая доля W_1 кислорода составляет 0,6. Определить количество вещества ν смеси, ν_1 и ν_2 каждого газа в отдельности.

Ответ: ν=788 ммоль; ν_1=68 ммоль; ν_2=720 ммоль.

2. В баллоне вместимостью V=1 л находится азот (N_2) при нормальных условиях. Когда азот нагрели до температуры T=1,8 кК, то часть молекул азота оказалась диссоциированной на атомы. Степень диссоциации α=0,3. Определить: 1) количество вещества ν и концентрацию n молекул азота до нагревания; 2) количество вещества $\nu_м$ и концентрацию $n_м$ молекул молярного азота после нагревания; 3) количество вещества $\nu_а$ и концентрацию $n_а$ атомов атомарного азота после нагревания; 4) полное

количество вещества $\nu_{пол}$ и концентрацию $n_{пол}$ частиц в сосуде после нагревания. Диссоциацией молекул при нормальных условиях пренебречь. (Степенью диссоциации называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа).

Ответ: 1) 44,6 ммоль, $2{,}69\cdot10^{25}$ м$^{-3}$; 2) 31,2 ммоль, $1{,}88\cdot10^{25}$ м$^{-3}$; 3) 26,8 ммоль, $1{,}61\cdot10^{25}$ м$^{-3}$; 4) 58 ммоль, $3{,}49\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.

3. По газопроводу течет углекислый газ (CO_2) при давлении P=0,83 МПа и температуре $t=27^0C$. Какова скорость течения газа в трубе, если за τ=2,5 мин через поперечное сечение трубы площадью S=5 см^2 протекает m=2,2 кг газа?

Ответ: $\upsilon = \dfrac{mRT}{MPS\tau} = 2$ м/с.

4. Резиновый шарик массой m=2 г надувается гелием (He) при температуре $t=17^0C$. При достижении в шарике давления P=1,1 атм он лопается. Какая масса гелия была в шарике, если перед тем, как лопнуть, он имел сферическую форму? Резиновая пленка рвется при толщине $\delta=2\cdot10^{-3}$ см. Плотность резины ρ=1,1 г/см^3. Условие δ<<r считать выполненным.

Ответ: $m_{He} = \dfrac{PMm}{6RT\rho\delta}\sqrt{\dfrac{m}{\pi\rho\delta}} \approx 0{,}5\cdot10^{-3}$ кг.

5. Три одинаковых сосуда, соединенных трубками, заполнены газообразным гелием при температуре T=40 К. Затем один из сосудов нагрели до T_1=100 К, а другой - до T_2=400 К, а температура третьего не изменилась. Во сколько раз возросло давление в системе? Объемом соединительных трубок пренебречь.

Ответ: $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{3}{T}\left(\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T}\right)^{-1} = 2.$

6. Для получения высокого вакуума в стеклянном сосуде его необходимо прогревать при откачке с целью удалить адсорбированные газы. Определить на сколько повысится давление в сферическом сосуде радиусом R=10 см, если все адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным, площадь поперечного сечения одной молекулы σ равно 10^{-15} см^2. Температура прогрева T=600 К.

Ответ: $\Delta P = \dfrac{3kT}{\sigma R} = 2{,}48$ Па.

7. В сосуде А объемом V_1=2 л находится газ под давлением $P_1=3\cdot10^5$ Па, а в сосуде В объемом V_2=3 л находится та же масса того же газа, что и в сосуде А. Температура обоих сосудов одинакова и постоянна. Под каким давлением P будет находиться газ после соединения сосудов А и В трубкой. Объемом соединительной трубки пренебречь.

Ответ: $P=2P_1V_1/(V_1+V_2)=2{,}4\cdot10^5$ Па.

8. Молекулярный пучок падает перпендикулярно на поглощающую стенку. Концентрация молекул в пучке n, масса молекулы m_0, скорость каждой молекулы υ. Найти давление P, испытываемое стенкой, если: а) стенка неподвижна; б) стенка движется в направлении нормали со скоростью $u<\upsilon$.

Ответ: а) $P=nm_0\upsilon^2$, б) $P=nm_0(\upsilon+u)^2$.

9. Какие ответы будут в задаче 8, если стенка абсолютно упругая, а пучок падает на стенку под углом α к ее нормали. В п. б) скорость движения стенки $u<\upsilon\cos\alpha$.

Ответ: а) $P=2nm_0\upsilon^2\cos^2\alpha$, б) $P=2nm_0\,(\upsilon\cos\alpha\pm u)^2$.

10. Вычислить среднюю энергию поступательного $\langle\varepsilon_П\rangle$, вращательного $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ и колебательного $\langle\varepsilon_к\rangle$ движений двухатомной молекулы газа при температуре $T=3\cdot10^3$ К.

Ответ: $\langle\varepsilon_П\rangle=6{,}2\cdot10^{-20}$ Дж, $\langle\varepsilon_{вр}\rangle=\langle\varepsilon_к\rangle=4{,}1\cdot10^{-20}$ Дж.

Занятие 8. Законы распределения

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения.
2. Следствия из закона распределения: наиболее вероятная скорость, средняя арифметическая, средняя квадратичная скорости.
3. Барометрическая формула.
4. Распределение Больцмана.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Распределение Больцмана (распределение частиц во внешнем силовом поле)

$$n=n_0\cdot e^{-U(x,y,z)/(kT)},$$

где n – концентрация частиц; U(x,y,z) – их потенциальная энергия в силовом поле; n_0 – концентрация частиц в областях, где $U(x,y,z)=0$; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; e – основание натурального логарифма.

2. Барометрическая формула (распределение давления идеального газа в однородном поле силы тяжести)

$$P=P_0\cdot e^{-mgh/(kT)}\ \text{или}\ P=P_0\cdot e^{-Mgh/(RT)},$$

где P – давление газа на высоте h; P_0 – давление газа на высоте h=0; M – молярная масса; m – масса молекулы; R – универсальная газовая постоянная; g – ускорение свободного падения.

3. Вероятность того, что величина x, характеризующая какой-либо физический параметр, лежит в интервале значений от x до x+dx, равна

$$dW=f(x)\cdot dx,$$

где f(x) – нормированная функция распределения по значениям величины x. Если x играет роль объема, то f(x) – плотность вероятности; если x – координата, то f(x) – вероятность, отнесенная к интервалу длины; если x – скорость, то f(x) – вероятность, отнесенная к интервалу скорости, и т.д.

4. С другой стороны

$$dW = \frac{dN}{N},$$

где N – число молекул в газе. Отношение выражает долю числа молекул, для которых величина x заключена в интервале от x до x+dx. Отсюда количество молекул dN, для которых величина x, характеризующая их, заключена в интервале значений от x до x+dx

$$dN=NdW=Nf(x)dx.$$

5. Распределение Максвелла – распределение молекул равновесного газа по модулю скорости (далее везде - по скорости) дает число молекул dN(υ), скорости которых заключены в интервале от υ до υ+dυ

$$dN(\upsilon) = Nf(\upsilon)d\upsilon = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2 d\upsilon,$$

где f(υ) – функция распределения молекул по скоростям, выражающая вероятность того, что скорости молекул лежат в интервале от υ до υ+dυ, или долю числа молекул, модуль скорости которых лежит в указанном интервале; N – общее число молекул газа; m – масса молекулы.

6. Условие нормировки функции распределения

$$\int f(x)dx = 1.$$

Интегрирование ведется по всей совокупности изменений величины x.

7. Среднее значение физической величины x в общем случае

$$\langle x \rangle = \left(\int xf(x)dx\right)/\left(\int f(x)dx\right),$$

а в случае, если выполнено условие 6:

$$\langle x \rangle = \int xf(x)dx,$$

где f(x) – функция распределения, а интегрирование ведется по всей совокупности изменений величины x.

8. Средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \int_0^\infty \upsilon f(\upsilon)d\upsilon = \sqrt{8kT/(\pi m)} = \sqrt{8RT/(\pi M)},$$

где m – масса одной молекулы.

9. Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle \upsilon_{CK} \rangle = \sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle}, \text{ где } \langle \upsilon^2 \rangle = \int_0^\infty \upsilon^2 f(\upsilon)d\upsilon.$$

$$\langle \upsilon_{CK} \rangle = \sqrt{3kT/m} = \sqrt{3RT/M}.$$

10. Наиболее вероятная скорость молекул

$$\upsilon_B = \sqrt{2kT/m} = \sqrt{2RT/M}.$$

11. Число молекул dN, скорости которых заключены в интервале от u до u+du

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 e^{-u^2} du,$$

где u=υ/υ$_в$ – скорость, равная отношению скорости молекулы υ к наиболее вероятной υ$_в$; f(u) – функция распределения по относительным скоростям движения молекул.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если выполняется неравенство Δu<<u, то соотношение п.11 может быть представлено в виде

$$\frac{\Delta N}{N\Delta u} = f(u), \text{ где } f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} \cdot u^2;\ u=\upsilon/\upsilon_в.$$

При решении задач, в которых выполнено это неравенство, нужно использовать табличные значения функции f(u) (см. табл. №2).

Таблица №2

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

Примечание: если значение u не подходит ни к одному табличному значению, провести вычисление f(u) на калькуляторе.

2. Для нахождения доли молекул $\frac{N_1}{N}$, относительные скорости которых лежат в интервале от $u_1<u<\infty$, расчет проводят по формуле:

$$\frac{N_1}{N}=\int_{u_1}^{\infty} f(u)du.$$

При решении таких задач нужно использовать табличные значения $\frac{N_1}{N}=f(u_1)$ (см. табл. №3).

3. Наиболее часто встречающиеся интегралы при вычислении средних значений по функциям распределения:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cdot dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2};\qquad \int_0^{\infty} x\cdot e^{-\alpha x^2}\cdot dx=\frac{1}{2a};$$

$$\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-\alpha x^2}\cdot dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot a^{-3/2};\qquad \int_0^{\infty} x^3\cdot e^{-\alpha x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot a^{-2}.$$

Таблица №3

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Проанализируйте выражение для зависимости атмосферного давления от высоты (барометрическая формула).
2. Исходя из барометрической формулы, получите распределение Больцмана.
3. Сформулируйте физический смысл распределения Больцмана.
4. Что характеризует функция распределения?
5. При каких условиях выполняется закон распределения молекул газа по скоростям Максвелла?
6. Напишите аналитическое выражение этого закона и изобразите его графически.

7. Какому условию удовлетворяет нормированная функция распределения?
8. Как вычисляют среднее значение физической величины?
9. Получите соотношение для наиболее вероятной скорости молекул идеального газа.
10. При каких условиях следует пользоваться табл. №2, а при каких – табл. №3?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(5.49) Найти число молекул водорода в объеме V=1 см^3, если давление P=200 мм рт. ст., а средняя квадратичная скорость его молекул при данных условиях $<\upsilon_{кв}>=2{,}4\cdot10^3$ м/с.

Ответ: $N=4{,}2\cdot10^{18}$.

2.(5.50) Плотность некоторого газа $\rho=6\cdot10^{-2}$ кг/м^3, а средняя квадратичная скорость его молекул $<\upsilon_{кв}>=500$ м/с. Найти давление P, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Ответ: $P=5\cdot10^3$ Па.

3.(5.56) 1) Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, плотность которого при давлении P=750 мм рт. ст. равна $\rho=8{,}2\cdot10^{-2}$ кг/м^3. 2) Чему равна молярная масса этого газа, если значение плотности дано для температуры $t=17^0C$?

Ответ: 1) $<\upsilon_{кв}>=1{,}9\cdot10^3$ м/с; 2) $M=2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

4.(5.95) Какая часть молекул кислорода (O_2) при $t=0^0C$ обладает модулем скорости, заключенным в интервале от $\upsilon_1=100$ м/с до $\upsilon_2=110$ м/с?

Ответ: 0,5 %.

5.(5.97) Какая часть молекул водорода (H_2) при $t=0^0C$ обладает модулем скорости, заключенным в интервале от $\upsilon_1=2000$ м/с до $\upsilon_2=2100$ м/с?

Ответ: 4,7 %.

6.(5.99) Какая часть молекул азота (N_2), находящегося при температуре T, имеет скорости, лежащие в интервале от $\upsilon_в$ до $\upsilon_в+\Delta\upsilon$, где $\Delta\upsilon=20$ м/с? Задачу решить для: 1) $T_1=400$ K, 2) $T_2=900$ K.

Ответ: 1) $\Delta N/N=3{,}4$ %; 2) $\Delta N/N=2{,}2$ %.

7.(5.100) Какая часть молекул азота N_x/N при температуре $t=150^0C$ обладает скоростями, лежащими в интервале от $\upsilon_1=300$ м/с до $\upsilon_2=800$ м/с?

Ответ: $N_1/N=87$ %; $N_2/N=17$ %; $N_x/N=70$ %.

8.(5.101) Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: 1) больше наиболее вероятной скорости, 2) меньше наиболее вероятной скорости?

Ответ: 1) $N_1/N=57$ %; 2) $N_2/N=43$ %.

9.(5.106) Высотная обсерватория расположена на высоте $h=3250$ м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температура воздуха постоянна и равна 5^0C. Молярная масса воздуха $\mu=29\cdot10^{-3}$ кг/моль. Давление воздуха на уровне моря $p=760$ мм рт. ст.

Ответ: $P=67{,}8$ кПа.

10.(5.111) На какой высоте плотность газа составляет 50 % от его плотности на уровне моря? Температура постоянна и равна 0^0C. Задачу решить для: 1) воздуха, 2) водорода.

Ответ: 1) $h=5{,}5$ км; 2) $h=80$ км.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(2.21) Определить температуру, для которой средняя квадратичная скорость молекул водорода больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta\upsilon=300$ м/с.

Ответ: $T=214$ К.

2.(2.23) Предположим, что пылинки, взвешенные в воздухе над городом, имеют массу 10^{-21} г каждая. На какой высоте их концентрация уменьшится в 100 раз? Температура воздуха 300 К.

Ответ: $h=1945$ м.

3.(2.25) Определить температуру газа, для которой: 1) средняя квадратичная скорость молекул водорода больше их наиболее вероятной на $\Delta\upsilon=400$ м/с; 2) функция распределения молекул кислорода по скоростям будет иметь максимум при скорости 420 м/с.

Ответ: 1) $T=376$ К; 2) $T=340$ К.

4.(2.26) При какой температуре газа, состоящего из смеси азота и кислорода, наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода будут отличаться друг от друга на 30 м/с?

Ответ: $T=364$ К.

5.(2.31) Найти отношение числа молекул водорода ΔN_1, скорости которых лежат в пределах от 2200 м/с до 2210 м/с, к числу молекул этого же

газа ΔN_2, имеющих скорости в пределах от 1300 до 1310 м/с, если температура водорода 300^0C.

Ответ: $\Delta N_1/\Delta N_2=1{,}46$.

6.(2.32) В сосуде находится $m=10$ г водорода (H_2). Сколько молекул водорода при температуре $T=270$ К обладает скоростями в интервале от $\upsilon_1=300$ м/с до $\upsilon_2=320$ м/с?

Ответ: $\Delta N=3{,}6\cdot10^{21}$.

7.(2.33) Какая часть от общего числа N молекул газа имеет скорости: 1) больше средней квадратичной скорости; 2) больше наиболее вероятной скорости?

Ответ: 1) 38 %; 2) 57 %.

8.(2.35) Какая часть молекул газа имеет скорости в интервале между наиболее вероятной и средней квадратичной скоростями?

Ответ: $\Delta N/N=18$ %.

9.(2.38) Как изменится число молекул газа, скорости которых лежат в интервале от средней арифметической до средней квадратичной скорости, если температура газа уменьшится в 5 раз?

Ответ: число молекул не изменится.

10.(2.40) Найти отношение числа молекул кислорода ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от 500 м/с до 520 м/с при температуре $T_1=200$ К, к числу молекул этого же газа ΔN_2, скорости которых находятся в пределах от 390 м/с до 400 м/с при температуре $T_2=400$ К.

Ответ: $\Delta N_1/\Delta N_2=2$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. При каком значении скорости υ пересекаются кривые распределения Максвелла для температур T_1 и $T_2=2\cdot T_1$?

Ответ: $\upsilon=\upsilon_в\cdot\sqrt{3\ln2}$, где $\upsilon_в=\sqrt{\dfrac{2kT_1}{m}}$.

2. Получите формулы для средней арифметической скорости молекул равновесного газа, средней квадратичной скорости молекул того же газа, используя соотношения п.7.

3. Распределение молекул по скоростям в молекулярных пучках, выходящих через отверстия, размеры которых малы по сравнению с длиной свободного пробега молекулы, отличается от максвелловского и имеет вид:

$f(\upsilon)d\upsilon = A\upsilon^3 e^{-m\upsilon^2/(2kT)}d\upsilon$. Определите из условия нормировки коэффициент A.

Ответ: $A=m^2/(2k^2T^2)$.

4. Для распределения молекул в задаче 3 найти: 1) наиболее вероятную скорость $\upsilon_в$; 2) среднюю арифметическую скорость $<\upsilon>$.

Ответ: $\upsilon_в = \sqrt{3kT/m}$; $<\upsilon> = 3\sqrt{\pi kT/(8m)}$.

5. Идеальный газ с молярной массой M находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь основания которого S и высота h. Температура газа T, его давление на нижнее основание P_0. Считая, что температура и ускорение свободного падения g не зависят от высоты, найти массу газа в сосуде.

Ответ: $m = \frac{P_0S}{g}\left(1 - e^{-MgH/(RT)}\right)$.

6. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле силы тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при h=0 давление газа $P=P_0$, а температура изменяется с высотой по закону $T=T_0(1+\alpha h)$, где $\alpha>0$. Как зависит от высоты плотность газа ρ?

Ответ: $P=P_0(1+\alpha h)^n$, где $n=Mg/(\alpha RT_0)$; $\rho = \frac{P_0M}{RT_0}(1+\alpha h)^{n-1}$.

7. Горизонтальный цилиндр, закрытый с одного конца, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый конец цилиндра. Длина цилиндра L, площадь основания S. Давление воздуха снаружи P_0, температура T, молярная масса воздуха M. Найти: 1) давление воздуха как функцию расстояния r от оси вращения; 2) силу добавочного давления на дно цилиндра.

Ответ: $P = P_0 \cdot e^{\frac{M\omega^2r^2}{2RT}}$; $F = P_0S\left(e^{M\omega^2L^2/(2RT)} - 1\right)$.

8. В середине теплоизолированного закрытого с обоих концов цилиндрического сосуда объемом $2V_0$ находится тонкий поршень массой m и площадью S. В обеих половинах сосуда находится идеальный газ при давлении P_0. Определить период малых колебаний поршня, если его слегка сместить от середины и отпустить. Трением пренебречь. Давление и объем газа в обеих половинках связаны соотношением PV=const.

Ответ: $T = \frac{2\pi}{S}\sqrt{\frac{mV_0}{2P_0}}$.

9. Гармонический осциллятор совершает колебания с амплитудой a. Масса осциллятора m, собственная частота ω. Найти: 1) функцию f(x)=dp/dx – распределения вероятностей значения координаты x; 2) среднее значение координаты $<x>$; 3) среднее значение квадрата координаты $<x^2>$; 4) среднее значение потенциальной энергии осциллятора $<U>$.

Ответ: 1) $f(x) = \left(\pi\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{-1}$; 2) $<x>=0$; 3) $<x^2>=a^2/2$;

4) $<U> = \frac{1}{4}ma^2\omega^2$.

10. Из уравнения Максвелла получить закон распределения молекул по энергиям.

Ответ: $dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\varepsilon/(kT)}}{(kT)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$, где $\varepsilon=m\upsilon^2/2$.

Занятие 9. Основы термодинамики

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Первое начало термодинамики.
2. Работа газа.
3. Количество теплоты.
4. Внутренняя энергия.
5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.
6. Адиабатический процесс.
7. Уравнение Пуассона, показатель адиабаты.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Внутренняя энергия идеального газа U

$$U=N\langle\varepsilon\rangle \text{ или } U=\nu C_V T,$$

где $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы; N – число молекул газа; ν – количество вещества.

2. Работа, связанная с изменением объема газа, в общем случае вычисляется по формуле

$$A=\int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV,$$

где V_1 – начальный объем газа; V_2 – его конечный объем.

Работа газа

при изобарическом процессе (p=const)

$$A=p(V_2-V_1)=p\cdot\Delta V,$$

при изотермическом процессе (T=const)

$$A=\left(\frac{m}{M}\right)RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

при адиабатическом процессе

$$A=-\Delta U,\quad A=\frac{m}{M}C_V(T_1-T_2)=-\frac{i}{2}(P_2V_2-P_1V_1)$$

или

$$A=\frac{RT_1}{(\gamma-1)}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1 – начальная температура газа; T_2 – его конечная температура; $\nu=m/M$ – количество газа; $\gamma=C_P/C_V$ – показатель адиабаты.

3. Уравнение Пуассона (уравнение газового состояния при адиабатическом процессе)

$$P\cdot V^{\gamma}=\text{const}.$$

Привлечение уравнения состояния идеального газа позволяет переписать уравнение Пуассона в переменных (T,V) или в переменных (T,P) (см.п.4).

4. Связь между начальными и конечными значениями параметров состояний газа при адиабатическом процессе

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma};\ \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1};\ \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

5. Первое начало термодинамики записывается в виде

$$Q=\Delta U+A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу; ΔU – изменение его внутренней энергии; A – работа, совершаемая газом против внешних сил.

6. Применение первого начала термодинамики к изопроцессdм

при изобарическом процессе (p=const)

$$Q=\Delta U+A=\frac{m}{M}C_V\Delta T+\frac{m}{M}R\Delta T=\frac{m}{M}C_P\Delta T,$$

при изохорическом процессе (V=const), (A=0)

$$Q=\Delta U=\frac{m}{M}C_V\Delta T,$$

при изотермическом процессе (T=const), (ΔU=0)

$$Q=A=\frac{m}{M}RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

при адиабатическом процессе (Q=0)

$$A=-\Delta U=-\frac{m}{M}C_V\Delta T.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Давление 1 мм рт. ст.=133 Па.
Давление 1 атм=760 мм рт. ст.
Молярная масса воздуха $M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль.
Молярная масса аргона $M=40\cdot10^{-3}$ кг/моль.
Нормальные условия: $P=1{,}01\cdot10^5$ Па, $T=273$ К.
Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.
Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).
Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие состояния термодинамической системы и какие термодинамические процессы называются: а) равновесными, б) неравновесными?
2. Дайте определение внутренней энергии U термодинамической системы как функции ее состояния.
3. В чем сходство и различие между понятиями работы A и количества теплоты Q?
4. Сформулируйте первое начало термодинамики.
5. Чем определяется внутренняя энергия идеального газа и от чего зависит ее изменение?
6. Покажите, что при изобарическом процессе работа идеального газа $A=(m/M)R(T_2-T_1)$, а сообщенное ему количество теплоты $Q=(m/M)C_p(T_2-T_1)$, где $C_p=C_v+R$ – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.
7. Объясните, почему при изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа не изменяется?
8. Какой процесс называется адиабатическим? Получите уравнение адиабатического процесса из первого начала термодинамики.
9. Чему равен показатель адиабаты? От чего он зависит?
10. Изобразите графически изотермический и адиабатический процессы на диаграмме P–V, сравните зависимости. Как по графику можно определить работу, совершенную газом, при его расширении от V_1 до V_2?

11. Примените первое начало термодинамики к изопроцессам, к адиабатическому процессу.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(5.80) Масса m=12 г азота (N_2) находится в закрытом сосуде объемом V=2 л при температуре $t=10^0$C. После нагревания давление в сосуде стало равным $P=10^4$ мм рт. ст. Какое количество теплоты было сообщено газу при нагревании?

Ответ: Q=4,15 кДж.

2.(5.86) 1) Какую массу m углекислого газа (CO_2) можно нагреть от $t_1=20^0$C до $t_2=100^0$C количеством теплоты Q=222,6 Дж? 2) На сколько при этом изменится кинетическая энергия одной молекулы? Во время нагревания газ расширяется при p=const.

Ответ: 1) $m=3{,}7\cdot10^{-3}$ кг; 2) $\Delta\varepsilon=3{,}3\cdot10^{-21}$ Дж.

3.(5.89) Для нагревания некоторой массы газа на $\Delta t=50^0$C при постоянном давлении необходимо затратить $Q_1=672$ Дж. Если эту же массу газа охладить на 100^0C при постоянном объеме, то выделяется $Q_2=1008$ Дж. Какое число степеней свободы имеет молекула этого газа?

Ответ: i=6.

4.(5.92) В закрытом сосуде объемом V=2 л находится масса m азота (N_2) и масса m аргона (Ar) при нормальных условиях. Какое количество теплоты Q надо сообщить, чтобы нагреть газовую смесь на $\Delta t=100^0$C?

Ответ: Q=155 Дж.

5.(5.162) Количество ν=2 кмоль углекислого газа (CO_2) нагреваются при постоянном давлении на $\Delta t=50^0$C. Найти: 1) изменение его внутренней энергии ΔU; 2) работу расширения A; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

Ответ: 1) $\Delta U=2{,}5\cdot10^6$ Дж; 2) $A=0{,}83\cdot10^6$ Дж; 3) $Q=3{,}33\cdot10^6$ Дж.

6.(5.168) В сосуде под поршнем находится m=1 г азота (N_2). 1) Какое количество теплоты Q надо затратить, чтобы нагреть азот на $\Delta t=10^0$C? 2) На сколько при этом поднимется поршень? Масса поршня M=1 кг, площадь его поперечного сечения S=10 см^2. Давление азота над поршнем P=100 кПа.

Ответ: 1) Q=10,4 Дж; 2) $\Delta h=2{,}9\cdot10^{-2}$ м.

7.(5.175) До какой температуры T_2 охладится воздух, находящийся при температуре $t_1=0^0$C, если он расширяется адиабатически от объема V_1 до объема $V_2=2V_1$?

Ответ: T_2=207 K.

8.(5.178) Газ расширяется адиабатически, причем объем его увеличивается вдвое, а абсолютная температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы i имеет молекула этого газа?

Ответ: i=5.

9.(5.183) Газ расширяется адиабатически так, что его давление уменьшается от P_1=200 кПа до P_2=100 кПа. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление возрастает до P_3=122 кПа. 1) Определить отношение C_p/C_v для этого газа; 2) Начертить график этого процесса.

Ответ: C_p/C_v=1,4.

10.(5.189) Масса m=28 г азота (N_2), находящегося при температуре $t_1=40^0C$ и давлении P_1=750 мм рт.ст., сжимается до объема V_2=13 л. Найти температуру и давление азота после сжатия, если: 1) азот сжимается изотермически; 2) азот сжимается адиабатически. Найти работу сжатия в каждом из этих случаев.

Ответ: 1) T_2=T_1=313 K, P_2=0,20 МПа, A=–1,80 кДж;
2) T_2=413 K, P_2=0,26 МПа, A=–2,08 кДж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(2.13) Двухатомный газ,находившийся при нормальных условиях, адиабатически сжат в 5 раз по объему. Найти среднюю кинетическую энергию $<\varepsilon_{вр}>$ вращательного движения молекулы в конечном состоянии.

Ответ: $<\varepsilon_{вр}>=7,17\cdot10^{-21}$ Дж.

2.(2.43) В процессе адиабатического расширения ν=1 кмоля некоторого идеального газа совершена работа A, равная $1,37\cdot10^6$ Дж. При этом его температура снизилась на ΔT=55 K. Определить показатель адиабаты.

Ответ: γ=1,33.

3.(2.44) Определить работу A при изотермическом расширении смеси m_1=20 г аргона (Ar) и m_2=8 г гелия (He) от объема V_1=200 л до объема V_2=1400 л. Температура смеси T=990 K.

Ответ: A=40 кДж.

4.(2.45) Идеальный двухатомный газ, занимающий при давлении $p_1=10^5$ Па объем V_1=10 л, расширяется до объема V_2=20 л. Определить

работу A, совершенную газом, при следующих процессах: 1) изобарическом, 2) изотермическом, 3) адиабатическом.

Ответ: 1) A=1 кДж; 2) A=0,69 кДж; 3) A=0,605 кДж.

5.(2.46) Во сколько раз увеличится объем V углекислого газа (CO_2) при изотермическом расширении, если при этом совершается работа A=100 Дж. Температура газа T=350 K, масса m=12 г.

Ответ: V_2/V_1=1,13.

6.(2.47) При адиабатическом сжатии водяного пара (H_2O) массой m=60 г его температура изменилась от T_1=300 K до T_2=375 K. Определить работу A, совершенную при сжатии газа.

Ответ: A=–6,3 кДж.

7.(2.48) Газ трехатомных молекул, занимающий при давлении $P=10^5$ Па объем V_1=5 л, расширяется до объема V_2=10 л. Определить изменение внутренней энергии газа ΔU, если этот процесс протекает: 1) изобарически, 2) адиабатически.

Ответ: 1) ΔU=1,5 кДж; 2) ΔU=–300 Дж.

8.(2.49) В процессе изобарического расширения неона (Ne) совершена работа A=40 Дж. Какое количество теплоты Q сообщили газу?

Ответ: Q=100 Дж.

9.(2.53) Удельная теплоемкость при постоянном объеме c_v смеси гелия (He) и водорода (H_2) равна 4,9 кДж/(кг·К). Массы компонент смеси равны для гелия m_1=3,2 г, для водорода m_2=1 г. Определить показатель адиабаты смеси.

Ответ: γ=1,51.

10.(2.60) Определить показатель адиабаты смеси γ, состоящей из ν_1=0,1 моля одноатомного газа и ν_1=0,3 моля двухатомного газа.

Ответ: γ=1,44.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Найти показатель адиабаты γ смеси водорода (H_2) и неона (Ne), если массовые доли обоих газов в смеси одинаковы и равны W=0,5.

Ответ: γ=1,42.

2. Определить показатель адиабаты γ частично диссоциировавшего газообразного азота (N_2), степень диссоциации α которого равна 0,4.

Ответ: γ=1,52.

3. Из баллона, содержащего водород (H_2) под давлением P_1=1 МПа при температуре T_1=300 K, выпустили половину массы находившегося в нем газа. Определить конечные температуру T_2 и давление P_2, считая процесс адиабатическим.

Ответ: $T_2=227{,}4$ К, $P_2=379$ кПа.

4. При какой температуре T средняя кинетическая энергия теплового движения окажется достаточной для того, чтобы атомы гелия, находящиеся в самых верхних слоях атмосферы, могли бы покинуть атмосферу Земли? Считать, что толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом $R_з$ Земли.

Ответ: $T=2gR_зM/(3R)=2\cdot10^4$ К.

5. В вертикальном цилиндре, закрытом с обоих торцов, находится легкоподвижный поршень, по обе стороны которого – по одному молю воздуха. В равновесном состоянии при температуре $T_0=300$ К объем верхней части цилиндра в $\eta_1=4{,}0$ раза больше объема нижней части. При какой температуре отношение этих объемов станет $\eta_2=3{,}0$?

Ответ: $T=T_0\,\eta_2\left(\eta_1^2-1\right)/\eta_1\left(\eta_2^2-1\right)=422\text{K}.$

6. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом V. За один цикл (ход поршня) насос захватывает объем ΔV. Сколько следует сделать циклов n, чтобы давление в сосуде уменьшилось в η раз? Процесс откачки считать изотермическим, газ идеальным.

Ответ: $n=\ln\eta/\ln\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right).$

7. Найти давление воздуха в откачиваемом сосуде как функцию времени откачки t. Объем сосуда V, первоначальное давление P_0. Процесс считать изотермическим и скорость откачки, не зависящей от давления и равной c.

Примечание: Скоростью откачки называют объем газа, откачиваемый за единицу времени, причем этот объем измеряется при давлении газа в данный момент.

Ответ: $P=P_0e^{-ct/V}$.

8. Найти максимально возможную температуру идеального газа в каждом из нижеследующих процессов: а) $P=P_0-\alpha V^2$, б) $P=P_0e^{-\beta V}$, где P_0, α, β – положительные постоянные, V – объем одного моля газа.

Ответ: а) $T_m=\dfrac{2}{3}\dfrac{P_0}{R}\sqrt{\dfrac{P_0}{3\alpha}}$; б) $T_m=P_0/(e\beta R)$.

9. В задаче 8 для пунктов а) и б) вычислить работу, произведенную идеальным газом над внешними силами при увеличении его объема от V_1 до $V_2=2V_1$. Для случая а) $V_1=\sqrt{P_0/3\alpha}$; б) $V_1=1/\beta$.

Ответ: а) $A=\dfrac{2}{9}\sqrt{P_0^3/(3\alpha)}$; б) $A=\dfrac{P_0}{\beta e^2}(e-1)$.

10. Определить наименьшее возможное давление одноатомного идеального газа в процессе, происходящем по закону $T=T_0+\alpha\cdot V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные, V – объем одного моля газа. Определить работу, совершенную газом при изменении его объема от $V_1=\sqrt{T_0/\alpha}$ до $V_2=2V_1$. Как изменится при этом его внутренняя энергия? Какое количество тепла было подведено к газу?

Ответ: $P_m=2R\sqrt{\alpha T_0}$; $\quad A=RT_0\left(\dfrac{3}{2}+\ln 2\right)$;

$$\Delta U=\frac{9}{2}RT_0;\qquad Q=RT_0(6+\ln 2).$$

Занятие 10. Циклические процессы и энтропия

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Обратимые и необратимые процессы.
2. Второе начало термодинамики.
3. Цикл Карно и его КПД.
4. Энтропия идеального газа.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла тепловой машины

$$\eta=(Q_1-Q_2)/Q_1,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

2. КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно

$$\eta_к=(T_1-T_2)/T_1,$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура охладителя.

3. Соотношение между КПД

$$\eta_к\geq\eta.$$

4.Для тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно (холодильная машина)

холодильный коэффициент $\eta_{хк}=\dfrac{Q_2}{A}$, где Q_2 – теплота, отводимая от холодильника, $A=Q_1-Q_2$ – работа, затрачиваемая на отвод тепла, Q_1 – затраченная энергия.

Справедливо соотношение $\dfrac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\dfrac{T_2}{T_1-T_2}$.

5. Изменение энтропии системы

$$\Delta S=\int_A^B\frac{\delta Q}{T},$$

где A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы,

$$\delta Q=dU+\delta A=\frac{m}{M}C_v dT+PdV$$ –

первое начало термодинамики в дифференциальной форме.

6. Изменение энтропии как функции параметров T *и* V

$$\Delta S=\frac{m}{M}C_v\ln\frac{T_2}{T_1}+\frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1},$$

где цифры 1 и 2 помечают значения параметров в начальном и конечном состояниях системы.

7. Изменение энтропии в параметрах P *и* V

$$\Delta S=\frac{m}{M}C_v\ln\frac{P_2}{P_1}+\frac{m}{M}C_p\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

8. Изменение энтропии в параметрах P *и* T

$$\Delta S=\frac{m}{M}C_p\ln\frac{T_2}{T_1}-\frac{m}{M}R\ln\frac{P_2}{P_1}.$$

9. При адиабатическом процессе $\Delta S=0$

10. Формула Больцмана

$$S=k\cdot\ln\Omega,$$

где S – энтропия системы; Ω – ее статистический вес (термодинамическая вероятность); k – постоянная Больцмана.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Удельная теплота плавления льда	$3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.
Удельная теплота парообразования воды	$2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг.
Удельная теплота плавления свинца	$0{,}25\cdot10^5$ Дж/кг.
Удельная теплоемкость льда	$2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К).
Удельная теплоемкость воды	$4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг·К).
Удельная теплоемкость свинца	$0{,}13\cdot10^3$ Дж/(кг·К).
Площадь эллипса	$S=\pi\cdot a\cdot b$, где a, b – его полуоси.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие процессы называются круговыми (циклами)?
2. Каков принцип действия: теплового двигателя; холодильной машины?
3. Из каких процессов состоит цикл Карно?

4. Изобразите на диаграмме P–V равновесный прямой цикл Карно и получите выражение для его коэффициента полезного действия.
5. Зависит ли КПД идеального обратимого теплового двигателя от свойств рабочего тела?
6. Может ли КПД любого теплового двигателя быть больше КПД идеального теплового обратимого двигателя, если эти двигатели снабжены одним и тем же нагревателем и холодильником?
7. Какой физический смысл имеет площадь цикла Карно на диаграмме P–V?
8. Сформулируйте второе начало термодинамики.
9. Введите понятие энтропии S. Каковы свойства этой функции состояния термодинамической системы?
10. В каких единицах измеряется энтропия?
11. Каково статистическое толкование второго начала термодинамики?
12. Напишите и объясните связь между энтропией S системы и термодинамической вероятностью Ω ее состояния.
13. Какой физический смысл имеет площадь цикла Карно на диаграмме T–S?
14. Каковы границы применимости второго начала термодинамики?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(5.182) Двухатомный газ занимает объем V_1=0,5 л при давлении P_1=50 кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема V_2 и давления P_2 и затем при постоянном объеме V_2 охлаждается до первоначальной температуры. При этом его давление становится равным P_0=100 кПа. 1) Начертить график этого процесса; 2) Найти объем V_2 и давление P_2.

Ответ: $V_2=0{,}25\cdot10^{-3}$ м^3; P_2=132 кПа.

2.(5.195) Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за каждый цикл от нагревателя Q_1=2512 Дж. Температура нагревателя T_1=400 К, температура холодильника T_2=300 К. Найти работу, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты, отдаваемое холодильнику за один цикл.

Ответ: A=628 Дж; Q_2=1884 Дж.

3.(5.196) Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить КПД цикла, если известно, что за один цикл была произведена работа A=2,94 кДж и холодильнику было передано количество теплоты Q_2=13,4 кДж.

Ответ: η=18 %.

4.(5.198) Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % теплоты, получаемой от нагревателя, передается холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя Q_1=6,28 кДж. Найти: 1) КПД цикла; 2) работу A, совершенную за один цикл.

Ответ: η=20 %; A=1,26 кДж.

5.(5.216) Найти изменение энтропии при превращении массы m=10 г льда, взятого при t_1=–20 С, в пар при t_3=100^{0}С.

Ответ: $\Delta S = m\left(c_1 \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln\frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right) = 87.4$ Дж/К.

6.(5.221) Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы m=6 г водорода от объема V_1=20 л под давлением P_1=150 кПа к объему V_2=60 л под давлением P_2=100 кПа.

Ответ: ΔS=70,4 Дж/К.

7.(5.230) Объем V_1=1 м^3 некоторого идеального газа, находящегося при температуре t=0^{0}С и давлении P_1=98 кПа, изотермически расширяется от объема V_1 до объема $V_2=2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Ответ: ΔS=249 Дж/К.

8.(5.231) Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно ΔS=4,19 кДж/К. Разность температур между двумя изотермами ΔT=100 К. Какое количество теплоты Q превращается в работу в этом цикле?

Ответ: Q=419 кДж.

9.(5.229) Найти изменение ΔS энтропии при переходе кислорода (O_2) из состояния A в состояние B, если переход совершается: а) по участку ACB; б) по участку АДВ (рис.2.2). V_1=3 л; P_1=820 кПа; t_1=27^{0}С; V_2=4,5 л; P_2=600 кПа.

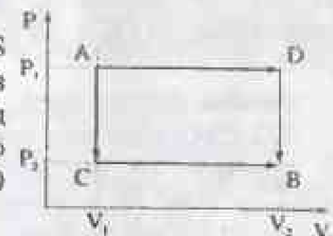


Рис.2.2

Ответ: ΔS=5,23 Дж/К.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(2.61) Определить работу изотермического расширения газа, совершающего цикл Карно, если работа изотермического сжатия 200 Дж, а температура нагревателя в 4 раза выше температуры охладителя.

Ответ: А=800 Дж.

2.(2.62) Газ, совершая цикл Карно, отдает охладителю 25 % тепла, полученного от нагревателя. Температура охладителя 250 К. Определить температуру нагревателя.

Ответ: $T=10^3$ К.

3.(2.63) Температура нагревателя газа, совершающего цикл Карно, вдвое больше температуры охладителя. Определить термический КПД цикла и работу изотермического сжатия, если работа изотермического расширения равна 300 Дж.

Ответ: $\eta=50$ %; А=150 Дж.

4.(2.64) Идеальная тепловая машина работает в качестве холодильника по обратному циклу Карно. Температура холодильной камеры $t_1=-13^0C$, температура окружающей среды $t_2=27^0C$. За один цикл от камеры отводится теплота в количестве 6,5 кДж. Определить полезную работу, совершаемую за цикл.

Ответ: А=1 кДж.

5.(2.65) Тепловая машина Карно, имеющая коэффициент полезного действия $\eta=40$ %, начинает использоваться при тех же тепловых резервуарах как холодильная машина. Сколько теплоты может отвести эта машина от холодильника за один цикл, если за каждый его цикл производится работа А=10 кДж?

Ответ: $Q_2=15$ кДж.

6.(2.71) Определить изменение энтропии 10 г водорода при переходе от состояния, характеризующегося объемом 5 л и температурой 273 К, к состоянию с объемом 20 л и температурой 820 К.

Ответ: $\Delta S=172$ Дж/К.

7.(2.72) Определить изменение энтропии 15 г углекислого газа при переходе от состояния, характеризуемого объемом 7 л и давлением $2\cdot10^5$ Па, к состоянию с объемом 21 л и давлением 10^5 Па.

Ответ: $\Delta S=6,56$ Дж/К.

8.(2.73) Определить изменение энтропии при изобарическом расширении 10 г гелия. В процессе расширения объем газа увеличился втрое.

Ответ: $\Delta S=57,1$ Дж/К.

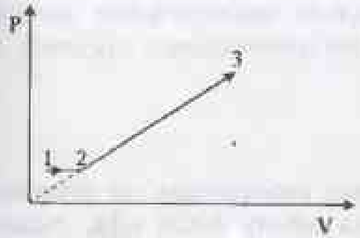
9.(2.74) Определить изменение энтропии при плавлении 1 кг льда.

Ответ: $\Delta S=1,22$ кДж/К.

10.(2.75) Кусок свинца массой 100 г, взятый при 27^0C, был нагрет до температуры плавления 327^0C и полностью расплавлен. После этого подвод теплоты прекратился. Определить изменение энтропии свинца.

Ответ: $\Delta S=13$ Дж/К.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С



1. 1 моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарическом процессе, а затем в процессе с линейной зависимостью давления от объема (см.рис.2.3). Известно, что $V_2/V_1=V_3/V_2$, а прямая 2→3 проходит через начало координат. Найти отношение V_2/V_1, если количество теплоты Q_{12}, подведенное к газу на участке 1→2, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке 2→3.

Ответ: $V_2/V_1=4$.

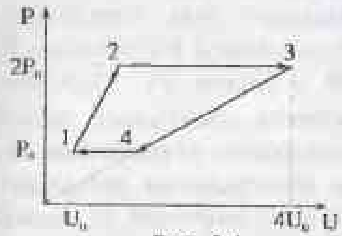


Рис. 2.4

2. Один моль одноатомного идеального газа совершает цикл, изображенный на рис.2.4 в координатах (P,U), где P – давление, U – внутренняя энергия газа. Определить КПД цикла.

Ответ: $\eta=2/13\approx0,15$.

3. Круговой процесс на диаграмме (T,S) изображается эллипсом с параметрами, указанными на рис.2.5. Определить работу, совершаемую газом за цикл.

Ответ: А=47 кДж.

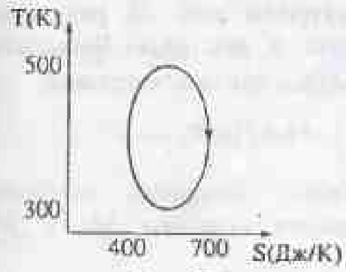


Рис. 2.5

4. Определить во сколько раз увеличивается статистический вес одного моля воды при переходе ее из жидкого в газообразное состояние при температуре 100^0C. Удельная теплота парообразования $r=2,26\cdot10^6$ Дж/кг.

Ответ: $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = e^{7,9 \cdot 10^{21}}$ раз.

5. Найти статистический вес наиболее вероятного распределения N=10 одинаковых молекул по двум половинам сосуда. Определить вероятность такого распределения.

Ответ: $\Omega = \frac{N!}{[(N/2)!]^2} = 252$; $P = \frac{\Omega}{2^N} = 0,246$.

6. Найти КПД (η) цикла, состоящего из двух изохор и двух изобар. Известно, что в пределах цикла максимальные значения объема и давления газа в два раза больше минимальных значений. Газ считать двухатомным, идеальным.

Ответ: $\eta = \frac{\gamma - 1}{2\gamma + 1} = 0,11$.

7. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу А=20 кДж. Машина получает количество теплоты Q_2 от тела с температурой T_2=260 К и отдает количество теплоты Q_1 телу с температурой T_1=295 К. Найти: а) КПД (η); б) количество теплоты Q_2, отнятого от охлаждаемого тела за цикл; в) количество теплоты Q_1, переданное горячему телу за цикл.

Ответ: а) η=0,12; б) Q_2=147 кДж; в) Q_1=167 кДж.

8. Один моль одноатомного идеального газа переходит из начального состояния, характеризуемого давлением P и объемом V, к конечному состоянию при давлении 2P и объеме 2V. Определить приращение энтропии ΔS газа. Рассмотреть следующие способы перехода газа из начального в конечное состояние: а) газ расширяется изотермически до объема 2V и потом изохорически переходит в конечное состояние; б) газ сжимается изотермически до давления 2P и потом изобарически переводится в конечное состояние.

Ответ: $\Delta S = (C_v + C_p)\ln 2 = 23$ Дж/К.

9. Идеальный двухатомный газ массой 1 моль совершает политропический процесс. Показатель политропы n=3. В результате процесса температура газа увеличивается в два раза. Вычислить приращение энтропии ΔS газа. Молекулы газа считать жесткими.

Ответ: $\Delta S = \frac{n - \gamma}{(n-1)(\gamma-1)} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 11,5$ Дж/К.

10. В двух одинаковых по объему баллонах находятся различные идеальные газы с молярными массами M_1 и M_2.

Соответственно массы газов в баллонах m_1 и m_2. Давления газов и их температуры одинаковы. Сосуды соединили друг с другом. Определить приращение энтропии ΔS, которое произойдет вследствие диффузии газов.

Ответ: $\Delta S = R\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\ln 2$.

3. Электростатика и постоянный ток

Занятие 11. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Закон Кулона. Закон сохранения заряда.
2. Принцип суперпозиции сил.
3. Точечный и распределенный заряды. Сила взаимодействия точечного и распределенного зарядов.
4. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции для напряженности.
5. Сила, действующая на точечный заряд в электрическом поле.
6. Теорема Гаусса для напряженности электростатического поля в вакууме.
7. Применение теоремы Гаусса для заряженных тел плоской, сферической и цилиндрической симметрии.
8. Напряженности электрического поля точечного заряда, однородно заряженных сферы, цилиндра, плоскости.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Закон Кулона

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где F – модуль силы взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2; r – расстояние между зарядами; ε – диэлектрическая проницаемость среды;
ε_0 – электрическая постоянная.

2. Закон сохранения заряда

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i=\text{const},$$

где $\sum_{i=1}^{n}Q$ – алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему; n – число зарядов системы.

3. Линейная плотность заряда

Распределенный на тонкой нити заряд характеризуется линейной плотностью заряда

$$\tau=\frac{dq}{dl}=\frac{Q}{l},$$

где Q – заряд, однородно распределенный на длине нити l.

4. Модуль силы взаимодействия

элемента распределенного заряда $dq=\tau dl$ с точечным зарядом Q

$$dF=\frac{Q\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от элемента распределенного заряда dq до точечного заряда Q.

5. Принцип суперпозиции сил

Если на материальную точку действует несколько сил, то результирующая этих сил представляет собой геометрическую сумму сил, приложенных к точке

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i.$$

6. Напряженность электростатического поля

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на пробный заряд q_0, помещенный в точку поля, напряженность которой определяется.

7. Сила, действующая на точечный заряд Q,

помещенный в электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$,

$$\vec{F}=Q\vec{E}.$$

8. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля

а) через произвольную поверхность S, помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha dS, \text{ или } \Phi_E = \int_S E_n dS,$$

где α – угол между вектором напряженности $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к элементу поверхности; dS – площадь элемента поверхности; E_n – проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$, проведенную к площадке dS;

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородном поле,

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

9. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

10. Теорема Гаусса

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды $Q_1, Q_2, ..Q_n$, равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

где $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, n – число зарядов.

11. Принцип суперпозиции электрических полей

Напряженность $\vec{E}$ результирующего поля, создаваемая двумя (и более) точечными зарядами, равна геометрической сумме напряженностей исходных полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i,$$

где n – количество зарядов системы.

Для случая двух зарядов результирующий вектор напряженности в любой точке поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

а модуль результирующего вектора по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в точке, где определяется напряженность поля.

12. Напряженность поля точечного заряда

Модуль напряженности электростатического поля, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r от него

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

13. Напряженность поля заряженной сферы

Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиуса R, несущей заряд Q, на расстоянии r от центра сферы:

внутри сферы (r<R): $E=0$;

на поверхности сферы (r=R): $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$;

вне сферы (r>R): $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$.

14. Напряженность поля заряженной нити

Модуль напряженности поля, создаваемого бесконечно длинной прямой однородно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси

$$E = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где τ – линейная плотность заряда (см. п. 3).

Если заряженная нить имеет конечную длину, то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из середины нити, на расстоянии r от нее

$$E = \frac{\tau\sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где θ – угол между направлением нормали к нити и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концу нити.

15. Поверхностная плотность заряда

Заряд, распределенный на поверхности S, характеризуется поверхностной плотностью σ

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{Q}{S},$$

где Q – заряд, однородно распределенный на площадке S.

16. Напряженность заряженной плоскости

Напряженность поля, создаваемая бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

17. Напряженность поля плоского конденсатора

Напряженность поля, создаваемая внутри заряженного плоского конденсатора для случая, если расстояние между пластинами много меньше линейных размеров пластин конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Электрическая постоянная	$\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.
Элементарный заряд	$q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса электрона	$m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.
Постоянная	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot10^9$ м/Ф.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие фундаментальные свойства присущи электрическому заряду? Сформулируйте закон сохранения заряда.
2. В каких единицах измеряется электрический заряд? Чему равен элементарный заряд?
3. Какому закону подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов? Какие утверждения содержит закон Кулона?

4. Получите численное значение и единицу электрической постоянной ε_0.
5. Как рассчитывается сила взаимодействия точечного заряда и зарядов, распределенных на телах конечных размеров?
6. Можно ли воспользоваться законом Кулона при расчете силы взаимодействия двух заряженных тел сферической формы?
7. Что является источником электрического поля? Как обнаруживается и исследуется электрическое поле?
8. Дайте определение напряженности электрического поля. В каких единицах измеряется напряженность?
9. Напишите формулу для напряженности E точечного заряда q. Изобразите график зависимости E(r), где r – расстояние от точечного заряда до точки поля, в которой определяется напряженность.
10. Каково содержание принципа суперпозиции электрических полей?
11. Как рассчитать напряженность поля заданного распределения точечных электрических зарядов?
12. Как вычисляется поток вектора напряженности электрического поля через любую поверхность?
13. Сформулируйте и запишите теорему Гаусса в интегральной форме.
14. Получите выражение для напряженности E однородно заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ.
15. Получите выражение для напряженности E однородно заряженной сферы, цилиндра.
16. Напишите теорему Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(9.13) Два точечных заряда q_1=7,5 нКл и q_2=–14,7 нКл расположены на расстоянии r=5 см друг от друга. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии a=3 см от положительного заряда и b=4 см от отрицательного заряда.

Ответ: E=112 кВ/м.

2.(9.15) Два металлических шарика одинакового радиуса и массы подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд Q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной T=98 мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса равно *l*=10 см, масса каждого шарика m=5 г.

Ответ: Q=1,1 мкКл.

3.(9.19) К вертикально расположенной бесконечной однородно заряженной плоскости прикреплена нить, на другом конце которой расположен одноименно заряженный шарик массой m=40 мг и зарядом q=31,8 нКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик, T=0,5 мН. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости. Диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряд ε=6. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: $\sigma=1\cdot10^{-6}$ Кл/м^2.

4.(9.20) Найти силу F, действующую на заряд q=0,66 нКл, если заряд помещен: а) на расстоянии r_1=2 см от длинной однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда τ=0,2 мкКл/м; б) в поле однородно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ=20 мкКл/м^2; в) на расстоянии r_2=2 см от поверхности однородно заряженного шара радиусом R=2 см и поверхностной плотностью заряда σ=20 мкКл/м^2. Диэлектрическая проницаемость среды ε=6.

Ответ: а) F_1=20мкН; б) F_2=126мкН; в) F_3=62,8 мкН.

5.(9.23) С какой силой F_l электрическое поле бесконечной однородно заряженной плоскости действует на единицу длины однородно заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити τ=3 мкКл/м и поверхностная плотность заряда на плоскости σ=20 мкКл/м^2.

Ответ: F_l=3,4 Н/м.

6.(9.26) С какой силой F_s на единицу площади отталкиваются две одноименные однородно заряженные бесконечно протяженные плоскости. Поверхностная плотность заряда на плоскостях σ=0,3 мкКл/м^2.

Ответ: F_s=5,1 кН/м^2.

7.(9.29) Показать, что электрическое поле, образованное однородно заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

8.(9.30) Длина однородно заряженной нити l=25 см. При каком предельном расстоянии a от нити по нормали к ее середине возбуждаемое ею электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 0,05. Указание: допускаемая ошибка δ равна $(E_2-E_1)/E_2$, где E_2 – напряженность электрического поля бесконечно длинной нити, E_1 – напряженность поля нити конечной длины.

Ответ: a=4,18 см.

9.(9.33) Напряженность электрического поля на оси однородно заряженного кольца имеет максимальное значение на некотором расстоянии от центра кольца. Во сколько раз напряженность

электрического поля в точке, расположенной на половине этого расстояния, будет меньше максимального значения напряженности?

Ответ: в 1,3 раза.

10. По четверти кольца радиусом r=6,1 см однородно распределен положительный заряд с линейной плотностью τ=64 нКл/м. Найти силу F, действующую на заряд q=12 нКл, расположенный в центре кольца.

Ответ: F=160 мкН.

11. Получите соотношения п.12 раздела "Основные формулы для решения задач".

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(3.2) Два одинаковых заряженных алюминиевых шарика, подвешенных в воздухе на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке, опускают в жидкий диэлектрик. При этом оказалось, что угол расхождения нитей не изменился. Какова плотность ρ жидкого диэлектрика, если его относительная диэлектрическая проницаемость ε=2? Плотность алюминия ρ_a=2700 кг/м^3.

Ответ: ρ=1350 кг/м^3.

2.(3.6) В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды по q=300 пКл каждый. Какой отрицательный заряд Q нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания зарядов была уравновешена силой притяжения к отрицательному заряду?

Ответ: Q=–0,287 нКл.

3.(3.7) В вершинах правильного шестиугольника со стороной b=10 см находятся одинаковые заряды по q=1 нКл каждый. Чему равна сила F, действующая на каждый заряд со стороны пяти остальных?

Ответ: F=1,64·10^{-6} Н.

4.(3.8) Два положительных точечных заряда q_1=1 нКл и q_2=2 нКл находятся на расстоянии r=5 см друг от друга. Какой величины и в каком месте нужно расположить отрицательный заряд Q, чтобы вся система находилась в равновесии?

Какое будет равновесие?

Ответ: Q=–0,34 нКл нужно расположить на расстоянии 2,07 см от заряда q_1 на линии, соединяющей заряды. Равновесие неустойчивое.

5.(3.13) Электрическое поле создается двумя длинными параллельными равномерно и одинаково заряженными нитями, расположенными на расстоянии l=5 см друг от друга. Напряженность электрического поля в точке, равноотстоящей от каждой нити на расстояние b=5 см, равна E=1 мВ/м. Определить линейную плотность заряда τ на каждой нити.

Ответ: $\tau=1{,}6\cdot10^{-15}$ Кл/м.

6. Плоский горизонтально расположенный конденсатор с расстоянием между обкладками d=1 см заполнен касторовым маслом с плотностью ρ_0=900 кг/м^3. В масле взвешен заряженный медный шарик радиусом R=1 мм, несущий заряд Q=1 мкКл. Определить напряжение U, подаваемое на обкладки конденсатора, если плотность меди $\rho=8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, а ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: U=3,2 В.

7.(3.17) Электрическое поле создается тонким проволочным однородно заряженным кольцом. Определить радиус R кольца, если точка, в которой напряженность электрического поля максимальна, расположена на оси кольца на расстоянии x=1 см от его центра.

Ответ: R=1,41 см.

8.(3.21) Поверхностная плотность заряда бесконечно протяженной вертикальной плоскости равна σ=200 мкКл/м^2. К плоскости на нити подвешен заряженный шарик массой m=10 г. Определить заряд q шарика, если нить образует с плоскостью угол $\alpha=30^0$.

Ответ: q=5 нКл.

9.(3.24) На отрезке тонкого прямого стержня длиной l=10 см однородно распределен заряд с линейной плотностью τ=3 мкКл/см. Вычислить напряженность E, создаваемую этим зарядом, в точке, расположенной на оси стержня и удаленной от ближайшего его конца на расстояние a=10 см.

Ответ: E=13,5 МВ/м.

10.(3.28) Отрицательно заряженная пылинка находится в равновесии между двумя пластинами плоского конденсатора, расположенными горизонтально. Расстояние между пластинами d=2 см, разность потенциалов на пластинах U=612 В. Масса пылинки m=10 пг. Сколько электронов несет на себе пылинка? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 20.

11.(3.33) Капля массой $m=10^{-10}$ г и зарядом q, равным 10 зарядам электрона, поднимается вертикально вверх с ускорением a=2,2 м/с^2 между горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора. Определить поверхностную плотность заряда σ на пластинах конденсатора. Силой сопротивления воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: σ=6,75 мкКл/м^2.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Получите соотношения п.14 раздела "Основные формулы для решения задач".

2. Рассчитайте поле однородно заряженного по объему шара на расстоянии r от его центра, если радиус шара R, а объемная плотность заряда ρ.

Ответ: r<R, $E=\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$; r=R, $E=\dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}$;

r>R, $E=\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$.

3. Найти напряженность электрического поля в заштрихованной плоскости, образованной пересечением двух однородно заряженных по объему шаров, с плотностями заряда ρ и −ρ. Расстояние между центрами шаров a=R$_1$+R$_2$ (рис. 3.1).

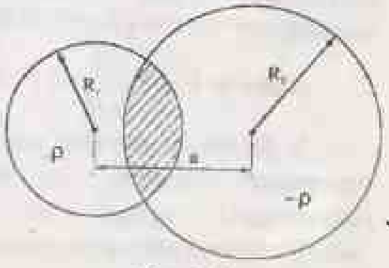


Рис. 3.1

Ответ: $E=\dfrac{\rho a}{3\varepsilon_0}$.

4. Шар радиусом R заполнен зарядом, объемная плотность которого изменяется по закону $\rho=\dfrac{B}{r}$ в области $r\le R$, где B=const, r – расстояние от центра шара. Рассчитать напряженность поля, создаваемую этим шаром, как функцию радиуса.

Ответ: $0<r\le R$, $E=\dfrac{B}{2\varepsilon_0}=\text{const}$;

$r>R$, $E=\dfrac{BR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$.

5. Полусфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ=67 нКл/м^2. Найти напряженность поля E в центре полусферы.

Ответ: $E=\sigma/(4\varepsilon_0)$=1,9 кВ/м.

6. Прямая бесконечная тонкая нить несет заряд с линейной плотностью τ_1. Перпендикулярно нити расположен тонкий стержень длиной l (см. рис. 3.2). Ближайший к нити конец стержня находится на расстоянии a от нее. Определить силу F, действующую на стержень со стороны нити, если он заряжен с линейной плотностью τ_2.

Ответ: $F = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{l}{a}\right)$.

7. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности, однородно распределен заряд с линейной плотностью τ=10 нКл/м. Определить напряженность электрического поля E, создаваемую распределенным зарядом, в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити l=15 см составляет одну треть длины окружности.

Ответ: $E = \tau \frac{\sqrt{3}}{6\varepsilon_0 l}$=2,17 кВ/м.

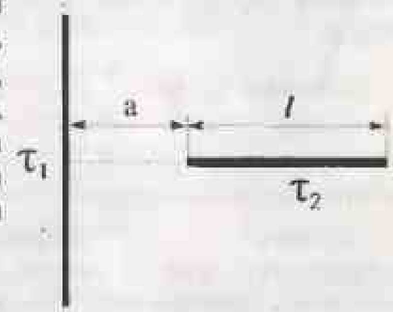


Рис. 3.2

8. Длинный цилиндр радиусом R однородно заряжен с объемной плотностью заряда ρ. Найти зависимость напряженности электростатического поля, создаваемой этим цилиндром от расстояния r до его оси.

Ответ: 0<r<R, $E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$; r=R, $E = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$; r>R, $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$.

9. Напряженность электрического поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из центра однородно заряженного диска, на расстоянии x от него, имеет вид: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$, где σ – поверхностная плотность заряда диска, R – его радиус. Получите это соотношение. Как изменится ответ задачи, если однородно заряженный диск радиусом R_2 имеет концентрическое отверстие радиусом R_1 (R_2>R_1)?

Ответ: $E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + x^2}}\right)$.

10. Горизонтально расположенный диск, радиус которого R=0,5 м, заряжен однородно с поверхностной плотностью σ=3,33·10^{-4} Кл/м^2. Маленький шарик массой m=3,14 г, имеющий заряд q=3,27·10^{-7} Кл,

находится над центром диска в состоянии равновесия. Определить его расстояние от центра диска. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: $d = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\sigma q}{\sigma q - 2\varepsilon_0 mg}\right)^2 - 1}}$=1,5 м.

11. Напряженность электрического поля зависит только от координат по закону $\vec{E} = a\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)/\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, где a – постоянная, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей x, y и z. Найти величину заряда q, находящегося внутри сферы радиусом R с центром в начале координат.

Ответ: q=4πε$_0$aR.

12. Пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме, найти напряженность E электрического поля внутри и вне бесконечной пластинки толщиной 2a, однородно заряженной с объемной плотностью заряда ρ.

Ответ: $E = \rho x / \varepsilon_0$, если $-a \le x \le a$;

$E = \rho a / \varepsilon_0$, если $|x| \ge a$.

Занятие 12. Потенциал. Работа в электростатическом поле. Проводники в электрическом поле

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Потенциал электростатического поля.
2. Потенциал точечного заряда, заряженной сферы.
3. Потенциальная энергия системы точечных зарядов.
4. Связь потенциала с напряженностью.
5. Работа по перемещению точечного заряда.
6. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.
7. Проводники в электрическом поле. Электростатическая защита. Теорема Фарадея.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Потенциал электростатического поля

Потенциалом электростатического поля в данной точке называется величина

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_0},$$

где П – потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд q_0, помещенный в точку поля, потенциал которой определяется.

Из соотношения следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля пробный единичный положительный заряд.

Потенциал электрического поля в данной точке может быть определен как величина, равная отношению работы сил поля по перемещению пробного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность к величине этого заряда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}.$$

Потенциал электрического поля для ограниченных в пространстве систем зарядов в бесконечности условно принят равным нулю (калибровка потенциала).

При перемещении заряда в электростатическом поле работа внешних сил $A_{вс}$ равна по абсолютному значению работы сил поля А и противоположна ей по знаку

$$A_{вс} = -A.$$

2. Потенциал точечного заряда

Потенциал электростатического поля, создаваемый точечным зарядом q на расстоянии r от него,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где ε_0 – электрическая постоянная, а ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

3. Потенциал заряженной сферы

Потенциал электростатического поля, создаваемый однородно заряженной проводящей сферой радиусом R, на расстоянии r от центра сферы:

а) $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$, если $r \le R$,

б) $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$, если $r > R$,

где Q – заряд сферы.

4. Потенциал системы зарядов

Потенциал электростатического поля, создаваемого в точке наблюдения системой, состоящей из n точечных зарядов, (принцип суперпозиции полей) равен алгебраической сумме потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ полей, создаваемых отдельными точечными зарядами $q_1, q_2, ..., q_n$ системы

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый i-м точечным зарядом в точке наблюдения.

Потенциал, создаваемый элементом распределенного заряда $dq = \tau dl$ на расстоянии r от него,

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

5. Потенциальная энергия системы зарядов

Потенциальная энергия взаимодействия системы точечных зарядов $q_1, q_2, ..., q_n$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i,$$

где φ_i – потенциалы, создаваемые всеми (n–1) зарядами (за исключением i-го) в точке, где находится заряд q_i; n – число точечных зарядов системы.

Для системы, состоящей из двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$W=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

6. Связь напряженности и потенциала электрического поля

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\mathrm{grad}\varphi=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы декартовых координатных осей; ∇ – оператор набла.

В случае поля, обладающего сферической или цилиндрической симметрией $\varphi=\varphi(r)$,

$$\vec{E}=-\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Напряженность однородного поля выражается отношением

$$E=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d},$$

где φ_1, φ_2 – потенциалы двух эквипотенциальных плоскостей; d – расстояние между ними вдоль электрической силовой линии.

7. Работа по перемещению заряда в поле

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда Q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку поля с потенциалом φ_2,

$$A=Q(\varphi_1-\varphi_2).$$

Учитывая п.6, ее можно выразить через криволинейный интеграл

$$A=Q\int_l E_l\,dl,$$

где E_l – проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на направление перемещения; dl – элементарное перемещение по кривой l.

В случае однородного поля соотношение для работы принимает вид

$$A=QEl\cos\alpha,$$

где l – перемещение, α – угол между направлением вектора $\vec{E}$ и перемещением $\vec{l}$.

8. Циркуляция вектора напряженности электрического поля

При перемещении заряда по замкнутому контуру в электростатическом поле работа поля

$$A=\oint_l \vec{E}d\vec{l}=0$$

в силу потенциальности электростатического поля (кружок у интеграла указывает, что интегрирование проводится по замкнутому контуру).

Интеграл

$$Ц=\oint_l \vec{E}d\vec{l}=0$$

называют циркуляцией (Ц). Приведенное соотношение выполняется для замкнутых контуров любой формы и выражает свойство потенциальности электростатического поля.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Масса электрона	$m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.
Заряд электрона	$e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса α-частицы	$m_\alpha=6{,}64\cdot10^{-27}$ кг.
Заряд α-частицы	$q_\alpha=2e=3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте определение потенциала. Напишите выражение для потенциала: а) точечного заряда; б) системы точечных зарядов.
2. Как выражается работа по перемещению заряда в электростатическом поле: а) через напряженность поля; б) через разность потенциалов?
3. Покажите, что в общем случае потенциал и напряженность электростатического поля связаны соотношением $\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi$.
4. Что называется силовой линией электростатического поля?
5. Что называется эквипотенциальной поверхностью? Покажите, что линии напряженности ортогональны эквипотенциальным поверхностям.
6. Чему равна потенциальная энергия системы точечных зарядов?
7. Докажите, что в электростатическом поле циркуляция вектора напряженности по произвольному замкнутому контуру равна нулю.
8. Напишите условие потенциальности электростатического поля в дифференциальной форме.

9. Какова напряженность поля внутри проводника, находящегося в электростатическом поле напряженностью E?
10. Почему при внесении незаряженного проводника в электрическое поле последнее искажается?
11. В чем суть электростатической защиты?
12. На расстоянии l от бесконечной металлической плоскости находится точечный заряд q. Найдите силу F, действующую на заряд q со стороны плоскости.
13. Докажите, что напряженность электростатического поля вблизи проводника перпендикулярна к его поверхности и равна $E=\sigma/\varepsilon_0$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(9.24) С какой силой F_l на единицу длины отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда τ=3 мкКл/м, расположенные в одной плоскости и находящиеся на расстоянии d_1=2 см друг от друга? Какую работу A_l на единицу длины надо совершить, чтобы сдвинуть эти нити до расстояния d_2=1см.

Ответ: F_l=8,1 Н/м; A_l=0,112 Дж/м.

2.(9.38) Шарик массой m=40 мг, имеющий положительный заряд q=1 нКл, движется из бесконечности со скоростью υ=10 см/с. На какое расстояние d может приблизиться шарик к положительному точечному неподвижному заряду Q=1,33 нКл?

Ответ: d=6 см.

3.(9.42) Два шарика с зарядами q=6,66 нКл и Q=13,33 нКл находятся на расстоянии d=40 см. Какую работу A нужно совершить, чтобы сблизить их до расстояния b=25 см?

Ответ: A=1,2 мкДж.

4.(9.44) Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии h=10 см от центра заряженного шара радиусом R=1 см. Задачу решить, если: а) задана поверхностная плотность зарядов на шаре, равная σ=0,1 мкКл/м^2; б) задан потенциал шара, равный φ=300 В.

Ответ: а) φ=11,3 В; б) φ=30 В.

5.(9.45) Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда q=20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии h=1 см от поверхности шара радиусом R=1 см с поверхностной плотностью σ=10 мкКл/м^2?

Ответ: A=113 мкДж.

6.(9.46) Шарик массой m=1 г и зарядом q=10 нКл перемещается из точки 1, потенциал которой 600 В в точку 2, потенциал которой равен 0. Найти его скорость в точке 1, если в точке 2 она стала равной υ_2=20 см/с.

Ответ: υ_1=16,73 см/с.

7.(9.49) На расстоянии d=4 см от бесконечно длинной однородно заряженной нити находится точечный заряд q=0,66 нКл. Под действием поля заряд приближается к нити до расстояния b=2 см, при этом совершается работа A=5 мкДж. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Ответ: τ=0,6 мкКл/м.

8.(9.52) Около однородно заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд q=0,66 нКл. Заряд перемещается по линии напряженности поля на расстояние d=2 см, при этом совершается работа A=5 мкДж. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

Ответ: σ=6,6 мкКл/м^2.

9.(9.63) Покоящийся электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $\upsilon=10^6$ м/с. Расстояние между пластинами d=5,3 мм. Найти разность потенциалов между пластинами U, напряженность электрического поля E внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Ответ: U=2,8 В; E=530 В/м; σ=4,7 нКл/м^2.

10.(9.65) Первоначально покоящийся электрон в однородном электрическом поле начинает движение с ускорением $a=10^{12}$ м/с^2. Найти напряженность электрического поля E, в котором движется электрон, скорость υ, которую он получит за t=1 мкс своего движения, работу сил электрического поля A за это время и разность потенциалов $\Delta\varphi$, пройденную при этом электроном.

Ответ: E=5,7 В/м; $\upsilon=10^6$ м/с; $A=4{,}55\cdot10^{-19}$ Дж; $\Delta\varphi$=2,84 В.

11. Вычислить циркуляцию вектора напряженности электрического поля E по плоскому контуру, расположенному в однородном электрическом поле (см. рис. 3.3 и рис. 3.4).

а) обход по контуру A→B→C; б) обход по контуру A→A

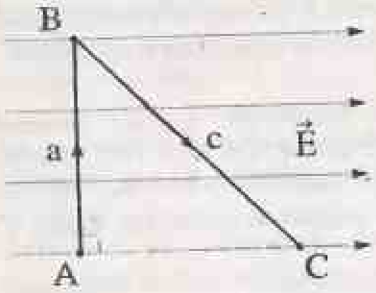


Рис. 3.3

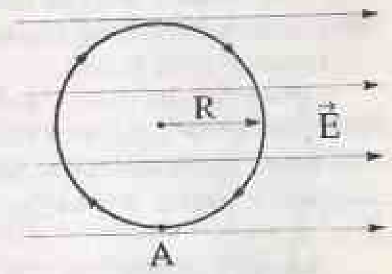


Рис. 3.4

Ответ: а) $E\sqrt{c^2 - a^2}$, б) 0.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(3.29) Электрическое поле создано бесконечно длинным тонкостенным металлическим цилиндром радиусом R=1 см, однородно заряженным с линейной плотностью τ=20 нКл/м. Определить разность потенциалов Δφ двух точек этого поля, находящихся на расстоянии a=0,5 см и d=2 см от оси цилиндра.

Ответ: Δφ=249,5 В.

2.(3.32) Металлический шар радиусом r=2 см несет на себе заряд q_1=1 нКл. Шар окружен концентрической металлической оболочкой радиусом R=5 см, заряд которой равен q_2=–2 нКл. Определить напряженность E и потенциал поля φ в точках на расстоянии 1см, 4см и 6 см от центра шара.

Ответ: E=0 В/м; φ=90 В; E=5,6 кВ/м; φ=–135 В; E=–2,5 кВ/м; φ=–150 В.

3.(3.36) Напряженность однородного электрического поля в некоторой точке равна E=600 В/м. Вычислить работу A по переносу заряда q=1 нКл из этой точки в другую, лежащую на прямой, составляющей угол $\alpha=60^0$ с направлением вектора напряженности. Расстояние между точками d=20 см.

Ответ: A=60 нДж.

4.(3.39) Электрон из состояния покоя пробегает в однородном электрическом поле расстояние d=5 см противоположно направлению силовых линий поля и приобретает кинетическую энергию $E_k=2{,}4\cdot10^{-14}$ Дж. Чему равна напряженность поля E?

Ответ: $E=3\cdot10^5$ В/м.

5.(3.43) Заряженная капелька глицерина радиусом R=3 мкм падает с постоянной скоростью в незаряженном горизонтально расположенном плоском воздушном конденсаторе, расстояние между пластинами которого d=2 см. Если к пластинам приложить разность потенциалов U=1 кВ, капелька будет падать в три раза медленнее. Чему равен заряд капельки q? Плотность глицерина ρ=1,26 г/см^3; плотность воздуха ρ_0=1,29 кг/м^3. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2 (Считать силу сопротивления пропорциональной скорости).

Ответ: $q=1{,}88\cdot10^{-17}$ Кл.

6.(3.45) α-частица влетела в однородное электрическое поле в направлении силовых линий. Начальная скорость α-частицы υ_0=30 км/с. Определить скорость α-частицы υ после прохождения ускоряющей разности потенциалов Δφ=10 В. Масса α-частицы $m=6{,}64\cdot10^{-27}$ кг; заряд α-частицы равен двум положительным элементарным зарядам.

Ответ: $\upsilon=4{,}3\cdot10^4$ м/с.

7.(3.46) В вершинах квадрата со стороной a=10 см находятся равные по знаку и по величине точечные заряды величиной q=1 мкКл. Определить потенциальную энергию системы зарядов W.

Ответ: W=0,49 Дж.

8.(3.47) В плоский конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них влетает электрон. К пластинам приложено напряжение U=500 В, расстояние между пластинами d=5 см. За какое время t после того, как электрон влетел в конденсатор, он достигнет одной из пластин? Какой разностью потенциалов Δφ был ускорен покоящийся электрон до попадания в конденсатор, если он прошел внутри конденсатора вдоль пластин расстояние 20 см?

Ответ: $t=5{,}33\cdot10^{-9}$ с; Δφ=4 кВ.

9.(3.50) Двадцать семь одинаковых шарообразных капель ртути, заряженных до потенциала φ_0=1 В, сливаются в одну. Чему равен потенциал φ образовавшейся шаровой капли?

Ответ: φ=9 В.

10. Вычислить циркуляцию вектора напряженности электрического поля E по плоскому контуру, расположенному в однородном электростатическом поле (рис. 3.5), для случаев: а) обход участка контура B→A; б) обход участка контура A→C→B

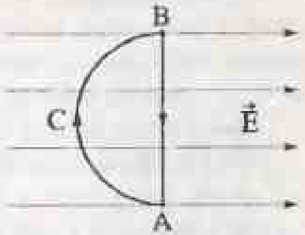


Рис. 3.5

Ответ: а) 0; б) 0.

11. Тонкое кольцо радиусом R=10 см, имеет заряд q=3,2 нКл, равномерно распределенный по кольцу. Найти потенциал φ в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии 7,5 см от его плоскости.

Ответ: φ=230 В.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=2,5 нКл/м. Найти разность потенциалов между точками A и B (рис. 3.6).

Рис. 3.6

Ответ: $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln(4/3) = 6{,}5$ В.

2. Заряд $q=2\cdot10^{-6}$ Кл однородно распределен по объему шара радиусом R=40 мм. Найти потенциал φ в центре шара.

Ответ: $\varphi = \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} = 675$ В.

3. Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами R_1=10 мм и R_2=20 мм заряжены однородно одноименными зарядами, причем поверхностная плотность зарядов на внешнем цилиндре σ_2=6,66 нКл/м², а на внутреннем σ_1=3,33 нКл/м². Найти разность потенциалов Δφ между цилиндрами.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) = 26$ В.

4. Найти вектор напряженности $\vec{E}$ электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = \vec{a}\cdot\vec{r}$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор.

Ответ: $\vec{E} = -\vec{a}$.

5. Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi=A(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, где x, y, z – координаты точки. A – постоянная. Найти вектор напряженности $\vec{E}$ и его модуль E.

Ответ: $\vec{E} = A\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$; $E = \dfrac{A}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

6. Потенциал поля на продолжении стержня длиной l, однородно заряженного с линейной плотностью τ, имеет вид $\varphi = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{x+l}{x}$, где x – расстояние от ближайшего конца стержня. Найти вектор напряженности поля $\vec{E}$.

Ответ: $\vec{E} = \dfrac{\tau l\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0 x(x+l)}$.

7. Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi=ay(y^2/3 - x^2)$, где a – постоянная. Найти вектор напряженности поля $\vec{E}$ и его модуль E.

Ответ: $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(y^2-x^2)\vec{j}$; $E = a(x^2+y^2)$.

8. Потенциал поля в некоторой области пространства зависит только от координаты x: $\varphi=-ax^3+b$, где a и b – постоянные. Найти объемную плотность заряда ρ(x).

Ответ: $\rho=6\varepsilon_0 ax$.

9. Шар радиусом R заряжен однородно с объемной плотностью ρ. Найти потенциал φ для точек внутри шара как функцию расстояния r от центра шара.

Ответ: $\varphi = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

10. Имеется электрическое поле $\vec{E} = ax\vec{i}$. Выяснить, является ли это поле потенциальным. Если да, то найти зависимость потенциала φ от координаты x.

Ответ: Да, $\varphi=-ax^2/2$+const.

11. Напряженность электрического поля внутри и на поверхности шара, однородно заряженного с объемной плотностью ρ, выражается формулой $\vec{E} = \rho\vec{r}/(3\varepsilon_0)$, где r – расстояние от центра шара. Найти выражение для потенциала φ(r) внутри шара. Вычислить разность потенциалов между центром шара и поверхностью шара, если радиус шара R=10 см, ρ=50 нКл/м³.

Ответ:

$\varphi(r) = -\rho r^2/(6\varepsilon_0) + \mathrm{const}$,

$\Delta\varphi = \rho R^2/(6\varepsilon_0) = 9{,}4$ В.

12. Имеется электрическое поле $\vec{E} = ax^2\vec{i} + by^2\vec{j}$, где a, b – постоянные. Рассчитайте циркуляцию Ц вектора E вдоль контура, указанного на рис. 3.7, и решите вопрос, является ли это поле потенциальным.

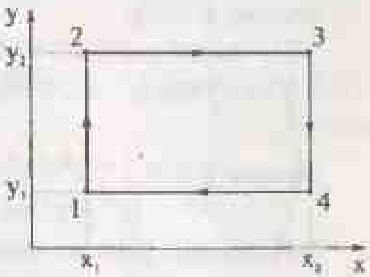


Рис. 3.7

Ответ: Ц=0. Да.

Занятие 13. Конденсаторы. Энергия электрического поля

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Электроемкость уединенного проводника, металлической сферы, плоского конденсатора.
2. Сферические и цилиндрические конденсаторы.
3. Слоистые конденсаторы.
4. Последовательное и параллельное соединения конденсаторов.
5. Энергия заряженного уединенного проводника, конденсатора.
6. Энергия электрического поля.
7. Объемная плотность энергии электрического поля.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Электроемкость уединенного проводника

Потенциал уединенного проводника и его заряд связаны соотношением

$$\varphi = q/C,$$

где C – электроемкость уединенного проводника.

Электроемкость уединенной проводящей сферы радиусом R, находящейся в безграничной среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

2. Электроемкость конденсатора

Напряжение на обкладках конденсатора связано с зарядом соотношением

$$U = q/C,$$

где C – электроемкость конденсатора.

Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d,$$

где S – площадь каждой пластины; d – расстояние между пластинами;

ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Электроемкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_2>R_1$), пространство между которыми заполнено диэлектриком с проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Электроемкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра радиусами r и R и длиной L, пространство между которыми заполнено диэлектриком с проницаемостью ε)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(R/r)}.$$

3. Электроемкость системы конденсаторов

При параллельном соединении конденсаторов

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

где n – число конденсаторов в системе. При таком соединении

$$U_1 = U_2 = \cdots = U_n,$$

а общий заряд на обкладках

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

При последовательном соединении того же числа конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

причем при таком соединении

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i,$$

где U_i – напряжение на каждом конденсаторе, а заряд на обкладках одинаков

$$q = q_1 = \cdots = q_n.$$

4. Энергия заряженного проводника:

Энергия уединенного заряженного проводника может быть найдена по одной из следующих формул

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

5. Энергия заряженного конденсатора

Энергия заряженного кондесатора может быть рассчитана из следующих соотношений:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

В случае плоского конденсатора энергия

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2} = \frac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора; σ – поверхностная плотность сторонних зарядов на пластинах; U – разность потенциалов между пластинами; ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего конденсатор; E – результирующая напряженность поля в диэлектрике; d – расстояние между пластинами.

6. Объемная плотность энергии электрического поля

Величина

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где D – электрическое смещение, называется объемной плотностью энергии электрического поля.

Объемная плотность энергии w связана с энергией W соотношением

$$dW = w dV,$$

где dV – элемент объема в системе координат, определяемой исходной симметрией поля.

7. Сила притяжения пластин плоского кондесатора

рассчитывается из соотношения

$$F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Относительная диэлектрическая проницаемость стекла – 6.

Относительная диэлектрическая проницаемость эбонита – 2,6.

Относительная диэлектрическая проницаемость парафина – 2.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется электроемкостью уединенного проводника? От чего она зависит?
2. В каких единицах измеряется электроемкость?

3. Что представляет собой конденсатор?
4. Напишите выражения для электроемкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов.
5. Как изменится емкость плоского конденсатора, если между его пластинами поместить: а) слой металла, заполняющего половину пространства между пластинами; б) той же толщины слой диэлектрика?
6. Для чего применяются соединения конденсаторов в батареи? Чему равняется электроемкость параллельно, последовательно соединенных конденсаторов?
7. Напишите выражения для энергии уединенного заряженного проводника, заряженного конденсатора.
8. Получите выражение для емкости плоского конденсатора.
9. Получите выражение для емкости уединенного металлического шара, помещенного в безграничный однородный диэлектрик.
10. Получите выражение для емкости сферического конденсатора, цилиндрического конденсатора.
11. Что является носителем энергии – заряды или поле? Напишите выражения для энергии и объемной плотности энергии электрического поля.
12. Получите выражение для силы притяжения пластин плоского конденсатора.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(9.77) Найти электроемкость земного шара. Считать радиус земного шара R=6400 км. На сколько изменится потенциал земного шара, если ему сообщить заряд q=1 Кл?

Ответ: C=710 мкФ; $\Delta\varphi$=1400 В.

2.(9.79) Восемь заряженных шарообразных водяных капель радиусом r=1мм и зарядом q=0,1 нКл сливаются в одну общую каплю. Найти потенциал образовавшейся шаровой капли.

Ответ: φ=3,6 кВ.

3.(9.92) Радиус центральной жилы коаксиального кабеля r=1,5 см, радиус оболочки R=3,5 см. Между центральной жилой и оболочкой приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$=2,3 кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии d=2 см от оси кабеля.

Ответ: E=136 кВ/м.

4.(9.93) Вакуумный цилиндрический конденсатор имеет радиус внутреннего цилиндра r=1,5 см, радиус внешнего цилиндра R=3,5 см. Между цилиндрами приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$=2,3 кВ. Какую

скорость υ получит электрон под действием поля этого конденсатора, перемещаясь без начальной скорости с расстояния r_1=2,5 см до расстояния r_2=2 см от оси цилиндра?

Ответ: υ=1,45.10^7 м/с.

5.(9.96) Каким будет потенциал шара радиусом r=3 см, если: а) сообщить ему заряд q=1 нКл; б) окружить его концентрической металлической сферой радиусом R=4 см, соединенной с землей?

Ответ: а) φ=300 В; б) φ=75 В.

6.(9.98) Радиус внутреннего шара воздушного сферического конденсатора r=1 см, радиус внешнего шара R=4 см. Между шарами приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$=3 кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии r_1=3 см от центра шаров.

Ответ: E=44,4 кВ/м.

7.(9.101) Два конденсатора зарядили до разности потенциалов U_1=300 В и U_2=100 В и соединили между собой одноименными обкладками. Измеренная при этом разность потенциалов между обкладками конденсаторов оказалась равна 250 В. Найти отношение емкостей C_1/C_2.

Ответ: C_1/C_2=3.

8.(9.109) Два металлических шарика первый с зарядом q_1=10 нКл и радиусом r=3 см и второй с потенциалом φ_2=9 кВ и радиусом R=2 см соединили проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. Найти: а) потенциал φ_1 первого шарика до разряда; б) заряд q_2 второго шарика до разряда; в) энергии W_1, W_2 каждого шарика до разряда; г) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после разряда; д) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после разряда; е) энергию W соединенных проводником шариков; ж) работу A разряда.

Ответ: а) φ_1=3 кВ; б) q_2=20 нКл; в) W_1=15 мкДж,W_2=90 мкДж; г) q_1'=18 нКл, φ_1'=5,4 кВ; д) q_2'=12 нКл, φ_2'=5,4 кВ; е) W=81 мкДж; ж) A=24 мкДж.

9.(9.110) Заряженный шар A радиусом r=2 см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром B, радиус которого R=3 см. После того как шары разъединили, энергия шара B оказалась равной 0,4 Дж. Какой заряд q был на шаре A до соприкосновения с шаром B?

Ответ: q=2,7 мкКл.

10.(9.116) Площадь пластин плоского воздушного конденсатора равна S=0,01 м^2, расстояние между ними d=2 см. К пластинам приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$=3 кВ. Какова будет напряженность E поля конденсатора, если, не отключая источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния b=5 см? Найти энергии W_1, W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин.

Ответ: E=60 кВ/м; W_1=20 мкДж; W_2=8 мкДж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(3.53) Два конденсатора емкостью C_1=3 мкФ и C_2=6 мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС 120 В. Определить заряды q_1, q_2 каждого конденсатора и разность потенциалов между его обкладками U_1 и U_2, если конденсаторы соединены: а) параллельно; б) последовательно.

Ответ: 1) $U_1=U_2$=120 В, q_1=0,36 мКл, q_2=0,72 мКл;

2) $q_1=q_2$=0,24 мКл; U_1=80 В, U_2=40 В.

2.(3.55) Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F=5\cdot10^{-2}$ Н. Площадь каждой пластины S=200 см^2. Определить объемную плотность энергии w поля конденсатора.

Ответ: w=2,5 Дж/м^3.

3.(3.58) Два металлических шара радиусом r=2 см и R=6 см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщили заряд Q=1 нКл. Найти поверхностную плотность заряда, установившуюся на шарах.

Ответ: σ_1=50 нКл/м^2, σ_2=17 нКл/м^2.

4.(3.59) Два плоских конденсатора емкостью C_1=0,5 мкФ и C_2=2 мкФ зарядили до разности потенциалов $\Delta\varphi_1$=200 и $\Delta\varphi_2$=300 В соответственно и соединили параллельно одноименными обкладками. Найти изменение общей энергии ΔW конденсаторов.

Ответ: ΔW=0,002 Дж.

5.(3.62) Два конденсатора емкостью C_1=2 мкФ и C_2=4 мкФ соединены последовательно. Разность потенциалов между крайними точками батареи конденсаторов равна $\Delta\varphi$=20 В. Определить заряды q_1, q_2 и разность потенциалов $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$ на обкладках каждого конденсатора.

Ответ: $q_1=q_2$=26,7 мкКл; $\Delta\varphi_1$=13,3 В; $\Delta\varphi_2$=6,7 В.

6.(3.66) Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi_1$=100 В и отключен от источника. После этого в конденсатор параллельно обкладкам на равном расстоянии от них поместили металлический лист толщиной b=2 мм. Найти разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi_2$ после внесения листа, если площади обкладок и металлического листа одинаковы. Расстояние между обкладками конденсатора d=6 мм.

Ответ: $\Delta\varphi$=66,7В.

7.(3.68) Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно. Определить, на сколько изменится напряжение ΔU на одном из конденсаторов, если в другой внести диэлектрик из стекла, полностью заполняющий объем конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла равна ε=6. Конденсаторы присоединены к источнику напряжения U=100 В.

Ответ: ΔU=35,7 В.

8.(3.70) Два плоских воздушных одинаковых конденсатора соединены последовательно в батарею, которая подключена к источнику с ЭДС 12 В. Определить напряжение на конденсаторах U_1, U_2, если, отключив батарею от источника, один из конденсаторов погрузить в масло. Диэлектрическая проницаемость масла равна 5.

Ответ: U_1=6 В; U_2=1,2 В.

9.(3.71) Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом R=10 см каждая. Расстояние между ними d=1 см. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $\Delta\varphi$=1200 В и отключили от источника напряжения. Какую работу A нужно совершить, чтобы раздвинуть пластины до расстояния b=3,5 см между ними?

Ответ: A=50 мкДж.

10.(3.77) Между пластинами плоского конденсатора находится точечный заряд q=30 нКл. Поле конденсатора действует на него с силой F=10 мН. Определить силу f взаимного притяжения пластин, если площадь каждой пластины S=100 см^2.

Ответ: f=4,9 мН.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Найти объемную плотность энергии w электрического поля на расстоянии r=2 см от бесконечно длинной нити, однородно заряженной с линейной плотностью $\tau=4{,}2\cdot10^{-7}$ Кл/м.

Ответ: $w = \dfrac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2} = 0{,}63$ Дж/м^3.

2. Найти объемную плотность энергии w электрического поля в точке, находящейся на расстоянии l=2 см от поверхности заряженного шара радиусом R=1 см, если поверхностная плотность заряда на шаре $\sigma=1{,}7\cdot10^{-5}$ Кл/м^2.

Ответ: $w = \dfrac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon_0 (r+l)^4} = 0{,}4$ Дж/м^3.

3. Внутри плоского конденсатора находится параллельная обкладкам пластинка, толщина которой равна 0,6 зазора между обкладками. Емкость конденсатора без пластинки С=20 нФ. Конденсатор сначала подключили к источнику постоянного напряжения U=200 В, затем отключили и после этого медленно извлекли пластинку из зазора. Найти работу А, затраченную на извлечение пластинки, если пластинка: а) металлическая; б) стеклянная.

Ответ: а) А=1,5 мДж, б) А=0,8 мДж.

4. Первоначально заряд q=100 нКл распределяется однородно по объему шара радиусом R=1 см. Затем, вследствие взаимного отталкивания, заряды переходят на поверхность шара. Какую работу А совершают при этом электрические силы над зарядом?

Ответ: $A = \frac{q^2}{10\pi\varepsilon_0 R} = 2{,}25$ мДж.

5. Шаровое облако ионизированных частиц расширяется, сохраняя однородное распределение заряда. Изменится ли отношение энергии электрического поля внутри шара и за его пределами W_1/W_2? Диэлектрическая проницаемость всюду равна единице.

Ответ: Не изменится. $W_1/W_2=1/5$.

6. Заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R. Определить энергию W_1, заключенную внутри шара, и энергию W_2, заключенную в окружающем шар пространстве.

Ответ: $W_1 = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}$; $W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

7. Цилиндрический конденсатор заполнен двумя цилиндрическими слоями диэлектриков, проницаемости которых ε_1 и ε_2. Внутренние радиусы слоев равны соответственно R_1, и $a>R_1$. Радиусы обкладок конденсатора R_1 и R_2, причем $R_2>R_1$, высота конденсатора *l*. Найти: а) емкость конденсатора С; б) энергию поля каждого из слоев W_1, W_2; в) полную энергию W поля конденсатора, если конденсатору сообщен заряд q.

Ответ: а) $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 l}{\varepsilon_2 \ln(a/R_1) + \varepsilon_1 \ln(R_2/a)}$;

б) $W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 l}\ln(a/R_1)$; $W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 l}\ln(R_2/a)$; в) $W = \frac{q^2}{2C}$.

8. Сферический конденсатор заполнен двумя сферическими слоями диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Диэлектрики разграничивает сфера радиусом а. Радиусы обкладок конденсатора R_1 и R_2, причем $R_2>R_1$.

Найти: а) емкость этого конденсатора С; б) энергию поля каждого из слоев W_1, W_2 и полную энергию поля конденсатора W, если ему сообщен заряд q.

Ответ: а) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\varepsilon_1^{-1}(R_1^{-1} - a^{-1}) + \varepsilon_2^{-1}(a^{-1} - R_2^{-1})}$;

б) $W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a}\right)$; $W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_2}\right)$; $W = \frac{q^2}{2C}$.

9. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R однородно заряжен с объемной плотностью ρ. Найти энергию W_l, приходящуюся на единицу длины цилиндра, запасенную внутри.

Ответ: $W_l = \frac{\pi\rho^2 R^4}{16\varepsilon\varepsilon_0}$.

10. Определить емкость уединенного шарового проводника радиусом R_1, окруженного прилегающим к нему концентрическим слоем однородного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ε и наружным радиусом R_2.

Ответ: $C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 + R_1(\varepsilon - 1)}$.

Занятие 14. Электрическое поле в диэлектриках

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Поле и электрический момент диполя.
2. Момент пары сил, действующих на диполь в однородном электростатическом поле.
3. Сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле.
4. Сторонние и связанные заряды. Плотность сторонних и связанных зарядов.
5. Теорема Гаусса в диэлектрике. Вектор поляризованности. Вектор электрического смещения. Диэлектрическая восприимчивость и проницаемость.
6. Граничные условия для векторов смещения и напряженности электрического поля.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Электрический момент диполя

Диполь есть система двух точечных, равных по абсолютному значению и противоположных по знаку зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга.

Электрический момент $\vec{p}$ диполя есть вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, равный произведению модуля заряда Q на вектор $\vec{l}$, проведенный от отрицательного заряда к положительному и называемый плечом диполя.

$$\vec{p} = Q\vec{l}\,.$$

Диполь считается точечным, если его плечо l много меньше расстояния r от центра диполя до точки, в которой рассчитывают поле диполя ($l \ll r$).

2. Модуль напряженности поля точечного диполя

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}\,,$$

где p – величина электрического момента диполя; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от центра диполя к точке, напряженность в которой

рассчитывают; α – угол между радиус-вектором и электрическим моментом диполя (рис. 3.8).

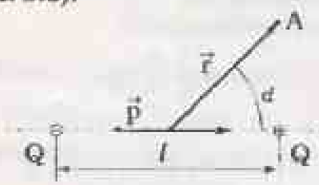


Рис. 3.8

3. Потенциал точечного диполя

$$\varphi = \frac{p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

4. Механический момент пары сил,

действующих на диполь с электрическим моментом $\vec{p}$, помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right], \text{ или } M = pE\sin\alpha,$$

где α – угол между направлением векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

5. Потенциальная энергия диполя во внешнем поле

Диполь, помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью E, обладает потенциальной энергией U, вычисляемой из соотношения

$$U = -(\vec{p}, \vec{E}), \text{ или } U = -pE\cos\alpha,$$

где α – угол между направлением векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

6. Сила, действующая на диполь в неоднородном поле.

В неоднородном электрическом поле на диполь действует сила, проекция которой для плосконеоднородного поля, направленного по оси x, выражается соотношением

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha,$$

где $\frac{\partial E}{\partial x}$ – частная производная напряженности поля по координате, характеризующая степень неоднородности поля в направлении оси x; α – угол между направлением векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

7. Вектор поляризованности диэлектрика

Поляризованность диэлектрика – количественная характеристика его поляризации - определяется соотношением

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i.$$

где $\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ – суммарный электрический момент, заключенный в объеме V диэлектрика.

8. Связь поляризованности с напряженностью

У изотропных диэлектриков в случае слабых полей поляризованность связана с напряженностью поля в той же точке соотношением

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

где χ – не зависящая от результирующего поля E величина, называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика.

9. Поляризованность и плотность связанных зарядов

Поверхностная плотность связанных зарядов σ' на поверхности диэлектрика и поляризованность P связаны соотношением

$$\sigma' = P\cos\alpha = P_n = \chi\varepsilon_0 E_n,$$

где P_n – проекция вектора поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика; E_n – нормальная составляющая напряженности поля внутри диэлектрика. Соотношение остается справедливым и для диэлектриков произвольной формы, находящихся в неоднородном электрическом поле.

Объемная плотность связанных зарядов ρ' в каждой точке диэлектрика определяется дивергенцией поляризованности

$$\rho' = -\operatorname{div}\vec{P},$$

где

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}.$$

Если диэлектрик неоднороден ($\operatorname{grad}\varepsilon \neq 0$), то при отсутствии в нем сторонних зарядов объемная плотность связанных зарядов, возникающая в диэлектрике, равна

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(\vec{E}, \operatorname{grad}\varepsilon).$$

10. Вектор электрического смещения

Вектором электрического смещения $\vec{D}$ называют величину, определяемую соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 E + \vec{P},$$

где E – результирующее поле в диэлектрике.

Относительной диэлектрической проницаемостью среды называют величину

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

С учетом этого

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

11. Поток вектора электрического смещения

выражается аналогично потоку вектора напряженности электрического поля:

а) для однородного поля

$$\Phi = DS\cos\alpha,$$

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности S

$$\Phi = \int_S \vec{D}d\vec{S}.$$

12. Теорема Гаусса для диэлектриков

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV = \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

где ρ – объемная плотность сторонних зарядов q_i в диэлектрике, находящихся внутри поверхности S, ограниченной объемом V.

13. Условия на границе двух диэлектриков

Нормальные компоненты вектора $\vec{D}$ при переходе через границу раздела двух диэлектриков, на которой нет сторонних зарядов, не изменяются

$$D_{1n} = D_{2n} = \text{const}$$

Касательные компоненты вектора $\vec{E}$ при переходе через границу раздела двух диэлектриков не изменяются

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} = \text{const}$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Относительная диэлектрическая проницаемость стекла – 6.
Относительная диэлектрическая проницаемость эбонита – 2,6.
Относительная диэлектрическая проницаемость парафина –
2.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называют электрическим моментом диполя? Когда диполь можно считать точечным?
2. Получите выражение для напряженности поля E, создаваемой диполем.
3. Получите соотношение для потенциала диполя.
4. Чему равен механический момент пары сил, действующих на диполь, помещенный в однородное электрическое поле? К чему приводит действие этого момента?
5. Запишите соотношение для силы, действующей на диполь в неоднородном электрическом поле. Когда диполь движется по градиенту поля, а когда – против?
6. Напишите выражение для потенциальной энергии диполя в поле.
7. Что называется вектором поляризованности? В каких единицах измеряется поляризованность?
8. В чем заключается физический смысл вектора поляризованности?
9. Опишите процесс поляризации изотропных диэлектриков. Что называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика?
10. Зачем вводится вектор электрического смещения $\vec{D}$? Каков физический смысл относительной диэлектрической проницаемости? Как она связана с диэлектрической восприимчивостью?
11. Напишите соотношения между нормальными и тангенциальными составляющими (по отношению к поверхности раздела двух диэлектриков) векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$.
12. Получите закон преломления линий электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков: $\mathrm{tg}\alpha/\mathrm{tg}\beta=\varepsilon_1/\varepsilon_2$, где α и β – углы между нормалью к поверхности раздела диэлектриков и линиями электрического смещения. Считать, что сторонних зарядов на поверхности раздела нет.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(9.76) Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстояние d=5 мм друг от друга, приложено напряжение U=150 В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка фарфора толщиной b=3 мм. Найти напряженности электрического поля E_1,E_2 в воздухе и фарфоре. Диэлектрическая проницаемость фарфора равна 6.

Ответ: E_1=60 кВ/м; E_2=10 кВ/м.

2.(9.87) Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S=0,01 м^2, расстояние между ними d=5 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U_1=300 В. После отключения конденсатора от источника напряжения пространство между пластинами заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найти емкости конденсатора C_1,C_2 и поверхностные плотности заряда σ_1, σ_2 на пластинах до и после заполнения.

Ответ: U_2=115 В; C_1=17,7 пФ; C_2=46 пФ;
σ_1=531 нКл/м^2, σ_2=531 нКл/м^2.

3.(9.88) Решить предыдущую задачу для случая, когда заполнение пространства между пластинами диэлектриком производится при включенном источнике напряжения.

Ответ: U_1=U_2=300 В; C_1=17,7 пФ; C_2=46 пФ; 531 нКл/м^2; 1,38 мкКл/м^2.

4.(9.89) Площадь пластин плоского конденсатора S=0,01 м^2, расстояние между ними d=1 см. К пластинам приложено напряжение U=300 В. В пространстве между пластинами находятся плоскопараллельная пластинка стекла толщиной b=0,5 см и плоскопараллельная пластинка парафина толщиной c=0,5 см. Найти напряженность электрического поля E_1,E_2 и падение потенциала U_1,U_2 в каждом слое. Каковы будут при этом емкость конденсатора C и поверхностная плотность заряда σ на пластинах?

Ответ: E_1=15 кВ/м; E_2=45 кВ/м; U_1=75 В, U_2=225 В; C=26,6 пФ; σ=0,8 мкКл/м^2.

5.(9.90) Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии d=1 см друг от друга, приложено напряжение U_1=100 В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка бромистого таллия толщиной b=9,5 мм с относительной диэлектрической проницаемостью ε=173. После отключения конденсатора пластинку вынимают. Каково будет после этого напряжение U_2 на пластинах конденсатора?

Ответ: U_2=1,8 кВ.

6.(9.119) Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и заряжен до энергии W=20 мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора, совершив работу A=70 мкДж. Найти диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

Ответ: ε=4,5.

7.(3.49) Электрическое поле создается точечным диполем с электрическим моментом p=0,1 нКл·м. Чему равна разность потенциалов Δφ между двумя точками, расположенными симметрично на оси диполя на расстоянии r=10 см от его центра?

Ответ: Δφ=180 В.

8.(9.126) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Площадь пластин конденсатора S=0,01 $м^2$. Пластины конденсатора притягиваются друг к другу с силой F=4,9 мН. Найти поверхностную плотность связанных зарядов σ' на стекле.

Ответ: σ'=6 мкКл/$м^2$.

9.(9.128) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком. Расстояние между пластинами d=2 мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов U_1=0,6 кВ. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, разность потенциалов на пластинах возрастет до U_2=1,8 кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов σ' на диэлектрике и его диэлектрическую восприимчивость χ.

Ответ: σ'=5,3 мкКл/$м^2$; χ=2.

10. Найти напряженность поля E, созданного диполем, электрический момент которого $p=6{,}2\cdot10^{-30}$ Кл·м, на расстоянии $r=3\cdot10^{-7}$ см от середины диполя в точке, лежащей: а) на продолжении диполя; б) на перпендикуляре к диполю.

Ответ: а) $E=4{,}1\cdot10^{6}$ В/м; б) $E=2\cdot10^{6}$ В/м.

11. Найти силу взаимодействия F двух молекул воды, электрические моменты которых расположены вдоль одной прямой. Молекулы находятся на расстоянии $r=2{,}5\cdot10^{-7}$ см друг от друга. Электрический момент молекулы воды $p=6{,}2\cdot10^{-30}$ Кл·м.

Ответ: $F=5{,}3\cdot10^{-14}$ Н.

12. Диполь с электрическим моментом $p=5{,}1\cdot10^{-29}$ Кл·м находится на расстоянии r=10 см от длинного провода однородно заряженного с линейной плотностью заряда τ=72 нКл/м. Найти модуль силы F, действующей на диполь, если вектор p направлен нормально к проводу.

Ответ: $F=6{,}6\cdot10^{-24}$ Н.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(3.54) К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов $Δφ_1$=600 В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком. Определить относительную диэлектрическую проницаемость ε этого диэлектрика, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до $Δφ_2$=100 В.

Ответ: ε=5.

2.(3.63) Поверхностная плотность заряда на пластинах плоского конденсатора равна σ=1 мкКл/$м^2$. В качестве диэлектрика использована слюда, относительная диэлектрическая проницаемость которой равна 6. Площадь пластин конденсатора S=10 $см^2$, между пластинами приложена разность потенциалов Δφ=100 В. Определить напряженность поля E в конденсаторе, расстояние d между его пластинами, силу притяжения пластин F и энергию конденсатора W.

Ответ: E=19 кВ/м; d=5,31 мм; F=9,45 мкН; $W=5\cdot10^{-8}$ Дж.

3.(3.64) После отключения плоского конденсатора от источника напряжения из него удалили стеклянный диэлектрик. При этом была совершена работа против сил электрического поля A=50 мкДж. Какова была энергия конденсатора W до удаления диэлектрика?

Ответ: W=10 мкДж.

4.(3.69) Плоский конденсатор с диэлектриком из стекла заряжен до разности потенциалов Δφ=20 кВ. Расстояние между пластинами d=2 см, площадь пластин S=100 $см^2$. Определить количество теплоты Q, выделившейся при разряде конденсатора.

Ответ: Q=5,31 мДж.

5.(3.72) Плоский конденсатор с площадью пластин S=200 $см^2$ заряжен до разности потенциалов Δφ=2 кВ. Расстояние между пластинами d=2 см, диэлектрик – стекло. Определить энергию поля конденсатора W и плотность энергии поля w.

Ответ: W=106 мкДж; w=0,27 Дж/$м^3$.

6.(3.73) Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью C=100 пФ каждый соединены в батарею последовательно. Определить, на сколько изменилась емкость батареи ΔC, если один из конденсаторов заполнить парафином?

Ответ: увеличилась на 16,7 пФ.

7.(3.74) Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая к ним стеклянная пластинка. Конденсатор заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi_1$=100 В и отключен от источника. Какова будет разность потенциалов $\Delta\varphi_2$, если вытащить пластинку из конденсатора?

Ответ: $\Delta\varphi_2$=600 В.

8.(3.78) Емкость плоского воздушного конденсатора C_1=1,5 мкФ. Расстояние между пластинами d=5 мм. Какова будет емкость конденсатора C_2, если к одной из пластин прижать лист диэлектрика той же площади но толщиной b=3 мм? Диэлектрическая проницаемость диэлектрика равна 3.

Ответ: C_2=2,5 мкФ.

9.(3.79) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика: стекла толщиной a=0,2 см и парафина толщиной b=0,3 см. Разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi$=300 В. Определить напряженность поля E и падение потенциала $\Delta\varphi$ в каждом слое.

Ответ: E_1=27,5 кВ/м, E_2=82 кВ/м; $\Delta\varphi_1$=55 В, $\Delta\varphi_2$=245 В.

10.(3.81) Расстояние между пластинами плоского конденсатора d=2 мм, разность потенциалов $\Delta\varphi$=1800 В. Диэлектрик – стекло. Определить плотность связанных зарядов σ' на поверхности стекла.

Ответ: σ'=39,8 мкКл/м^2.

11.(3.83) К пластинам плоского воздушного конденсатора с расстоянием между пластинами d=5 мм приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$=300 В. Не отключая конденсатор от источника напряжения, пространство между пластинами заполнили диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью, равной 3. Какова поверхностная плотность сторонних σ и связанных зарядов σ'?

Ответ: σ=1,59 мкКл/м^2; σ'=1,06 мкКл/м^2.

12.(3.84) К пластинам плоского воздушного конденсатора с расстоянием между пластинами d=5 мм приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$=300 В. После отключения конденсатора от источника напряжения, все пространство между пластинами заполняется эбонитом. Какова поверхностная плотность сторонних σ и связанных зарядов σ' после заполнения?

Ответ: σ=0,531 мкКл/м^2; σ'=0,354 мкКл/м^2.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Диполь, электрический момент которого $p=3\cdot10^{-10}$ Кл·м, свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью E=1500 В/см. Какую нужно совершить работу A, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha=180^0$?

Ответ: A=2pE=90 мкДж.

2. Найти поляризованность P кристаллической пластинки, диэлектрическая проницаемость которой ε=3, если напряженность нормального к пластинке внешнего электрического поля E=1 МВ/м.

Ответ: $P=(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E/\varepsilon=5{,}9$ мкКл/м^2.

3. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ε смещение равно $\vec{D}$. Чему равна поляризованность $\vec{P}$ в этой точке?

Ответ: $\vec{P}=(\varepsilon-1)\vec{D}/\varepsilon$.

4. Показать, что на границе диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанного заряда диэлектрика $\sigma'=-\sigma(\varepsilon-1)/\varepsilon$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды; σ – поверхностная плотность стороннего заряда на проводнике.

5. Фарфоровая пластинка помещена в однородное электростатическое поле напряженностью E_1=100 В/см. Направление поля образует угол $\alpha=35^0$ с нормалью к пластинке. Найти: а) напряженность поля E_2 в фарфоре; б) угол β между направлением поля и нормалью в фарфоре; в) плотность σ' связанных зарядов на границе фарфор-воздух. Проницаемость вне пластинки, принять равной единице.

Ответ: а) $E_2=E_1\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha/\varepsilon^2}=5{,}9$ кВ/м.

б) $\beta=\mathrm{arctg}(\varepsilon\,\mathrm{tg}\alpha)=76{,}6^0$;

в) $\sigma'=(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_1\cos\alpha/\varepsilon=60$ нКл/м^2.

6. Плотность связанных зарядов на поверхности слюдяной пластинки, служащей изолятором в плоском конденсаторе, $\sigma'=2{,}88\cdot10^{-5}$ Кл/м^2. Толщина пластинки d=0,2 мм. Найти разность потенциалов U между обкладками конденсатора.

Ответ: $U=\dfrac{\sigma' d}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}=100$ В.

7. Металлический шар радиусом R_1=2,0 см с зарядом $q=8{,}1\cdot10^{-8}$ Кл окружен вплотную прилегающим к нему слоем диэлектрика (ε=3), внешний

радиус которого R_2=5 см. Найти поверхностную плотность связанных зарядов σ'_1, σ'_2 на обеих сторонах диэлектрика.

Ответ: $\sigma'_1 = -\dfrac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon R_1^2} = -1{,}1$ мкКл/м^2,

$\sigma'_2 = \dfrac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon R_2^2} = 0{,}17$ мкКл/м^2.

8. Зазор между обкладками плоского конденсатора с зарядом q заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении оси x по линейному закону от ε_1 до ε_2, причем $\varepsilon_2>\varepsilon_1>1$. Начало координат связано с одной из обкладок, а направление оси x совпадает с направлением градиента ε. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти: а) емкость C конденсатора; б) зависимость напряженности поля в диэлектрике от координаты x; в) разность потенциалов между обкладками.

Ответ: а) $C = \dfrac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$; б) $E = \dfrac{q}{(\varepsilon_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)x/d)\varepsilon_0 S}$;

в) $\Delta\varphi = \dfrac{qd}{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\ln\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

9. Сферический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 ($R_1<R_2$) заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon = a/r$, где $a>R_2$ – постоянная, r – расстояние от центра сфер. Найти: а) емкость конденсатора C, б) объемную плотность связанных зарядов ρ' как функцию r, если заряд на конденсаторе q, а поле в нем направлено в сторону убывания ε.

Ответ: а) $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a}{\ln\left(R_2/R_1\right)}$, б) $\rho' = \dfrac{q}{4\pi a r^2}$.

10. Бесконечная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε заряжена однородно сторонними зарядами с объемной плотностью ρ. Толщина пластины 2a. Найти потенциал и напряженность внутри и вне пластины как функцию x. Ось x направлена перпендикулярно пластине. Начало координаты расположено в середине пластины. Потенциал в середине пластины равен нулю.

Ответ: а) $\varphi_1 = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, $E_1 = \dfrac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_0}$;

б) $\varphi_2 = -\left[\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \dfrac{\rho a(|x|-a)}{\varepsilon_0}\right]$, $E_2 = \dfrac{\rho a}{\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{x}{|x|}$.

11. Для пластины из задачи 10 найти: а) поляризованность диэлектрика P как функцию x; б) поверхностную плотность связанных зарядов σ' на левой (x=–a) и правой (x=+a) границах пластины; в) объемную плотность связанных зарядов ρ'.

Ответ: а) $P = (\varepsilon-1)\rho x/\varepsilon$; б) $\sigma' = (\varepsilon-1)\rho a/\varepsilon$;

в) $\rho' = -(\varepsilon-1)a/\varepsilon$.

Библиографический список.

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. 11-изд.-М.: Наука. 1985.- С. 382.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. 12-изд.-М.: Наука. 1990.- С. 400.
3. Методическое пособие по решению задач по физике/Таганрог. Сост. В.М.Меркулова, А.В.Третьякова, А.С.Уколов и др.; Под ред. В.М. Меркуловой.-Таганрог, 1992., - С. 193.
4. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. 5-е изд. переработанное и дополненное. - М.: Высшая школа. 1988. - С. 496.
5. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. 5-изд. - М.: Высшая школа. 1982. - С. 352.
6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. 2-е издание, переработанное. - М.: Наука. 1988. - С. 368.
7. Лагутина Ж.П. Физика. Задания к практическим занятиям. - Минск.

Вышейшая школа. 1989. - С. 236.

СОДЕРЖАНИЕ

Сапогин Владимир Георгиевич
Третьякова Алина Васильевна
Фатеева Валентина Афанасьевна

СБОРНИК ВОПРОСОВ, УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»

Для студентов направлений:
654200, 654700, 654500,654100, 654200,
654400, 653700, 654300, 650500, 664400,
651900, 654600, 653800, 654000, 653100,
653100, 653700, 653900, 653800, 075300,
075400, 075600,
обучающихся по образовательным программам
(бакалавриат) основного образования.

Ответственный за выпуск Сапогин В.Г.
Редактор Кочергина Т.Ф.
Корректор Селезнева Н.И.

ЛР № 020565 от 23.06.1997 Подписано к печати 20.09.07
Формат 60x84^1/16. Бумага офсетная.
Офсетная печать. Усл. п.л. - 8,0. Уч. печ. л. - 7,6.
Заказ № 341. Тир. 750 экз.

„С"

Издательство Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44

Типография Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса