МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Технологический институт
Федерального государственного образовательного
учреждения высшего профессионального
образования
"Южный федеральный университет"

Кафедра физики

Методическая разработка

Методы обработки результатов измерений физических величин

ЕГФ

Таганрог 2008

УДК 531.7.088(07.07)

Сапогин В.Г. Методы обработки результатов измерений физических величин. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. – 30 с.

Методическая разработка содержит современные алгоритмы различных методов оценки погрешностей, возникающих в простейших физических экспериментах при прямых и косвенных измерениях. Разработка подготовлена по дисциплине «Физические основы измерений» и предназначена в помощь студентам дневной формы обучения по направлению подготовки

Табл. 2. Ил. 6. Библиогр.: 10 назв.

Рецензент Крутчинский С.Г., д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления ТТИ ЮФУ.

Введение

Среди разделов математики, завоевавших прочное место в арсенале современной физики, важную роль играют теория вероятностей и математическая статистика. С формированием молекулярно-кинетических представлений о строении вещества и созданием теории микромира статистика превратилась в неотъемлемую часть аппарата современной физики. Одновременно статистика сделалась важным инструментом экспериментальных исследований. В многообразных применениях теории вероятностей и математической статистики можно разграничить три типа взаимоотношений этих разделов с физикой:

1) создание математического аппарата таких наук, как статистическая физика и квантовая механика;

2) описание случайных процессов;

3) обработка результатов измерений.

В основе этих взаимоотношений лежат объективные факторы. В первом случае – это статистический характер ряда фундаментальных законов природы, во втором – случайный характер событий, образующих сложный физический процесс, и, наконец, в третьем – экспериментальный характер физики. Последнее означает, что в физике имеют дело прежде всего с результатами измерений, которые по своей природе представляют случайные величины.

Для каждого из этих аспектов характерно использование в значительной степени специфического круга вопросов теории вероятностей и математической статистики.

Наиболее существенные изменения за последние 20 – 25 лет произошли в методах обработки результатов экспериментальных исследований. Статистика оказалась мощным средством извлечения ценной информации из экспериментальных данных. В современных исследованиях не часто удается непосредственно измерять физические величины, представляющие интерес. И лишь статистический анализ позволяет делать надежные выводы о многих явлениях. Достаточно напомнить, что если у физиков есть основания судить о том, что происходит за промежутки времени порядка 10^{-22} с или на расстояниях порядка 10^{-15} м, то только потому, что они в совершенстве владеют статистическими методами обработки опытных данных.

Изучая дисциплину «Физические основы измерений», студенты знакомятся с фундаментальными законами природы и пределами их применимости. Физические основы измерений базируются на фундаментальных законах физики. Так как физика – наука экспериментальная, то её законы проверяются с помощью опытов. С этой целью на кафедре физики студентам поставлены четыре лабораторные работы, в процессе которых проводятся измерения, т.е. с помощью специальных технических средств определяются численные значения физических величин, которые затем сравниваются с теоретическими законами, открытыми в этой предметной области.

Цель методической разработки состоит в том, чтобы научить будущего инженера элементарным методам измерений, выработать у него навыки оформления результатов эксперимента и умение проводить корректную математическую обработку результатов проведенных наблюдений.

1. Понятия об измерениях. Виды погрешностей, возникающих при измерениях

1.1. Прямые и косвенные измерения

По способу получения результатов физические измерения подразделяются на прямые и косвенные.

Прямыми измерениями называют такие, при которых искомое значение физической величины X находят непосредственно из опытных данных путем сравнения ее с известной мерой, эталоном или с помощью приборов, градуированных в целых, дольных или кратных единицах измеряемой величины. Например, измерение длины, времени, массы, температуры, электрического тока и т.д.

Косвенными измерениями называют такие, при которых искомое значение физической величины Y находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами A,B,C, ..., полученными при прямых измерениях. При косвенных измерениях значение искомой физической величины, как правило, вычисляют по формуле, в которую подставляют результаты нескольких прямых измерений. Например, измерение объема цилиндра. Прямым способом измеряют диаметр d и высоту h цилиндра, а искомый объем вычисляют по формуле

$$v = \frac{\pi}{4} d^2 h. \qquad (1.1)$$

1.2. Виды погрешностей измерений

Под истинным значением физической величины понимают то ее значение, которое в качественном и количественном отношениях идеально отражает соответствующее свойство объекта. Поскольку невозможно идеально отразить какое-либо свойство объекта, возникновение погрешностей при измерениях является объективным законом природы.

При измерениях физических величин неизбежно возникают погрешности вследствие неточности измерительных приборов, неполноты наших знаний, невозможности учесть все побочные явления. Поэтому задача измерений заключается в установлении интервала, внутри которого с заданной вероятностью находится истинное значение измеряемой физической величины. Например, скорость распространения света в вакууме по современным представлениям равна 299792,5 ±0,4 км/с. В приведенной записи ± 0,4 км/с – это оценка (приближенное значение) погрешности измерения, которая показывает, что значение скорости света лежит в пределах 299792,1 – 299792,9 км/с.

Погрешности в зависимости от причины их возникновения подразделяют на систематические, случайные и грубые.

Систематической погрешностью измерений называют погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же физической величины. Систематическая погрешность появляется, например, из-за неправильной установки начала отсчета, неточной градуировки шкал приборов и т.д. Систематические погрешности можно устранить, выявив их еще до начала измерений путем сравнения показаний приборов с эталонными значениями и затем введя соответствующие поправки в результаты измерения. Систематическая погрешность является составной частью основной погрешности прибора (см. разд. 2.4).

Случайной погрешностью измерений называют погрешность, которая изменяется случайно при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности непредсказуемо изменяются по значению и знаку при повторных измерениях одной и той же величины. Они вызываются совокупностью различных причин, действие которых неодинаково при каждом измерении. Такими причинами являются температура, атмосферное давление, влажность воздуха, флуктуации напряжения питания, нестабильность элементов схем приборов, несовершенство наших органов чувств и т.д. Появление случайных погрешностей носит вероятностный характер, и для уменьшения их влияния измерения следует повторять несколько раз.

Грубой называют погрешность измерения, которая существенно превышает ожидаемую при данных условиях погрешность. Грубые погрешности возникают в том случае, когда на результат измерения сильно повлиял какой-нибудь случайный фактор. Например, резкий скачок напряжения питания, неправильные действия при работе с приборами, неверно снятый отсчет показаний и т.д. Грубые погрешности, как правило, возникают при невнимательном отношении к выполнению измерений. Их необходимо выявить и их влияние на результат измерения устранить.

Количественно погрешности разделяют на абсолютную и относительную.

Абсолютная погрешность Δx определяется как разность между измеренным значением физической величины x и истинным ее значением X:

$$\Delta x = |x - X|. \qquad (1.2)$$

Относительная погрешность δ определяется отношением абсолютной погрешности Δx к истинному значению X измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta x}{X}. \quad (1.3)$$

Она может быть выражена в процентах.

Истинное значение физической величины X неизвестно, поэтому можно выполнить лишь приближенную оценку погрешности ее измерений. В дальнейшем будет показано, как делается такая оценка.

Точность измерения определяют как величину, обратную модулю относительной погрешности. Пусть измерены напряжения 10 и 100 В с одной и той же абсолютной погрешностью 1 В. Значения δ для этих измерений соответственно равны 10% и 1%, а точности – 10 и 100.

2. Оценка случайных погрешностей при прямых измерениях

2.1. Основные положения теории случайных погрешностей

В основе теории случайных погрешностей лежит теория вероятностей и методы математической статистики. Из этого следует, что точный расчет погрешностей невозможен. Их можно только оценить с некоторой определенной вероятностью. Оценку случайной погрешности и определение интервала, внутри которого с заданной вероятностью лежит истинное значение физической величины, проводят по результатам ее многократных измерений.

Предположим, что при измерениях возникают только случайные погрешности, а систематические погрешности настолько малы, что ими можно пренебречь.

Пусть, измеряя несколько раз величину X, мы получаем серию значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждое из измеренных значений содержит случайную погрешность

$$\Delta x_i = x_i - x, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (2.1)$$

Поскольку истинное значение X неизвестно, то остаются неизвестными по величине и знаку случайные погрешности, возникающие при каждом измерении.

Теория показывает, что наиболее близким к истинному значению измеряемой величины является среднее арифметическое ряда отдельных измерений

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad (2.2)$$

где n – число повторных измерений.

Среднее арифметическое значение $\bar{x}$ будет содержать существенно меньшую погрешность. В теории погрешностей доказывается, что при увеличении числа n среднее арифметическое стремится к истинному значению измеряемой величины. Следовательно, *случайная погрешность среднего арифметического* $\Delta\bar{x}_0$ стремится к нулю. В теории также доказывается, что *абсолютная погрешность измерений* с некоторой вероятностью не превышает Δx_0. Поэтому случайная погрешность среднего арифметического Δx_0 может быть использована в качестве оценочного значения абсолютной погрешности. Окончательный результат измерений записывается как

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_0 \quad (2.3)$$

с доверительной вероятностью α. Относительная погрешность результата равна

$$\delta = \frac{\Delta x_0}{\bar{x}}. \quad (2.4)$$

Величина $\bar{x} \pm \Delta x_0$ определяет интервал, внутри которого с доверительной вероятностью α лежит истинное значение измеряемой величины. Этот интервал называют *доверительным.*

Доверительная вероятность α показывает, с какой вероятностью истинное значение измеряемой величины X находится внутри доверительного интервала.

Результаты измерения величины X, согласно (2.3), можно изобразить графически на числовой оси (рис. 2.1).

Рис. 2.1

Рассмотрим закономерности, которым подчиняются случайные погрешности Δx_i. Прежде всего, случайные погрешности возникают в результате одновременного воздействия большого числа независимых факторов. Основные их свойства:

– при повторных измерениях одной и той же физической величины случайные погрешности представляют собой последовательность случайных чисел обоих знаков;

– одинаковые по значению, но разные по знаку, погрешности встречаются одинаково часто;

– чаще встречаются меньшие по значению погрешности.

Эти свойства случайной погрешности следуют из закона нормального распределения Гаусса:

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.5}$$

где $p(\Delta x)$ – плотность вероятности появления случайной погрешности; $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$ – дисперсия (разброс).

График нормального распределения показан на рис. 2.2 ($\sigma = 0{,}25$ – кривая 1; $\sigma = 0{,}5$ – кривая 2; $\sigma = 1{,}0$ – кривая 3). По оси абсцисс отложена случайная погрешность Δx, по оси ординат – плотность вероятности появления случайной погрешности $p(\Delta x)$. Максимум кривой распределения приходится на значение $\Delta x = 0$ (нулевая случайная погрешность). График нормального закона распределения зависит от параметра σ. Чем больше σ, тем более пологий вид имеет кривая распределения.

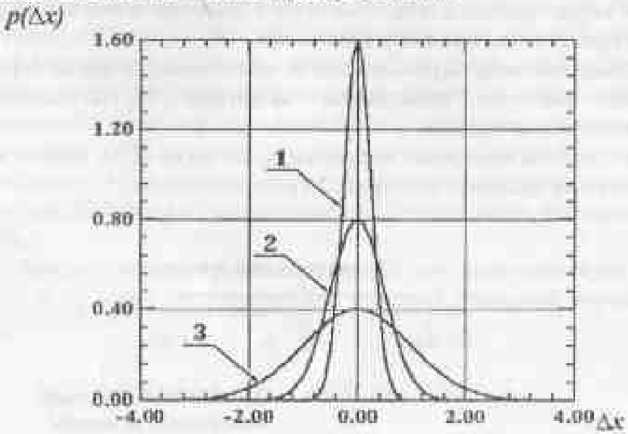

Рис. 2.2

Вероятность получить то или иное значение случайной погрешности, которую удобно выражать в единицах σ, равна площади, ограниченной кривой распределения и двумя перпендикулярами к оси абсцисс. Например, когда погрешность не превосходит значений $\pm\sigma$, площадь под кривой нормального распределения составляет 68% от общей площади (рис. 2.3). Это значит, что в среднем в 68 измерениях из 100 погрешность окажется меньше σ, а в 32 – больше σ. Это утверждение эквивалентно тому,

что с доверительной вероятностью α = 0,68 значение погрешности лежит в интервале $\pm\sigma$. Аналогично в интервале $\pm 2\sigma$ находится 95% всей площади под кривой (доверительная вероятность α = 0,95), случайная погрешность при этом не превышает $\pm 2\sigma$ и т.д.

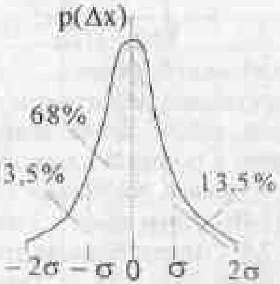

Рис. 2.3

2.2. Оценка погрешностей многократных измерений

Английский математик Госсет, публиковавший свои работы под псевдонимом Стьюдент, предложил методику обработки результатов многократных измерений одной и той же величины. Эта методика в настоящее время стала общепризнанной. Её применяют при числе измерений $n \le 30$. Она основана на введении дискретной функции распределения для случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения в предположении, что систематические погрешности отсутствуют.

Согласно методике Стьюдента, для n измерений одной и той же величины вычисляют среднее арифметическое значение по формуле (2.2):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.6}$$

где x_i – измеренное значение искомой физической величины; n – число измерений.

Случайное отклонение определяют как разность между измеренным значением x_i и средним арифметическим:

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}. \tag{2.7}$$

Случайное отклонение ε_i и случайная погрешность Δx_i (2.1) подчиняются одним и тем же законам распределения.

Случайную погрешность среднего арифметического (оценочное значение абсолютной погрешности) вычисляют по формуле

$$\Delta x_0 = tS, \tag{2.8}$$

где t – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений n и доверительной вероятности α (табл. 2.1), а

$$S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2} \tag{2.9}$$

есть среднее квадратичное отклонение.

Понятия доверительной вероятности и доверительного интервала тесно связаны между собой. Длина доверительного интервала равна $2\Delta x_0 = 2tS$. Коэффициент Стьюдента t зависит от доверительной вероятности α. Чем ближе α к единице, тем больше t при одном и том же числе измерений n (табл. 2.1). Например, при $n = 3$ для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}9$ получим $t = 2{,}9$. Соответствующая этой вероятности длина доверительного интервала равна $2\Delta x_0 = 5{,}8\ S$. Таким образом, в данном примере истинное значение измеряемой величины X с вероятностью 0,9 находится внутри полученного доверительного интервала (см. рис. 2.1).

Границы доверительного интервала позволяют определить наименьшее и наибольшее значения измеряемой величины, допустимые в обрабатываемой серии измерений. Если в серии измерений есть значения, не попадающие в доверительный интервал, то их называют промахами.

При измерении физических величин принимается:

1) доверительная вероятность $\alpha = 0{,}9$ при числе измерений $n \le 4$. Согласно табл. 2.1, таким значениям α и n соответствуют значения коэффициентов Стьюдента в интервале $2{,}4 \le t \le 6{,}3$;

2) доверительная вероятность $\alpha = 0{,}95$ при $n \ge 5$. В этом случае $2 \le t \le 2{,}8$.

2.3. Пример обработки результатов многократных измерений

Рассмотрим измерение диаметра d цилиндра. Пусть при измерениях получено пять значений d. Результаты обработки сведём в табл. 2.2, которой студентам рекомендуется пользоваться при выполнении лабораторных работ.

Порядок расчета

1. Найти среднее арифметическое $\bar{d}$ по формуле (2.6).
2. Найти случайные отклонения $\varepsilon_i = d_i - \bar{d}$.
3. Вычислить квадраты случайных отклонений ε_i^2.
4. Вычислить значение S по соотношению (2.9).

5. При $n = 5$ задать доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$ и по табл. 2.1 выбрать значение коэффициента Стьюдента $t = 2{,}8$.

Таблица 2.1

Значения коэффициентов Стьюдента

n	α		n	α	
	0,9	0,95		0,9	0,95
2	6,3	12,7	18	1,7	2,1
3	2,9	4,3	19	1,7	2,1
4	2,4	3,2	20	1,7	2,1
5	2,1	2,8	21	1,7	2,1
6	2,0	2,6	22	1,7	2,1
7	1,9	2,4	23	1,7	2,1
8	1,9	2,4	24	1,7	2,1
9	1,9	2,3	25	1,7	2,1
10	1,8	2,3	26	1,7	2,1
11	1,8	2,2	27	1,7	2,1
12	1,8	2,2	28	1,7	2,0
13	1,8	2,2	29	1,7	2,0
14	1,8	2,2	30	1,7	2,0
15	1,8	2,1	40	1,7	2,0
16	1,8	2,1	60	1,7	2,0
17	1,7	2,1	120	1,7	2,0
			[illegible]	1,6	2,0

6. Найти случайную погрешность среднего арифметического (оценочное значение абсолютной погрешности) по формуле (2.8):

$$\Delta d_0 = tS.$$

7. Записать окончательный результат измерения (формулы (2.3) и (2.4)).

8. Выявить промахи.

Расчеты дают абсолютную погрешность измерения диаметра цилиндра $\Delta d_0 = \pm 0{,}056$ мм. Однако при малом числе измерений в значении погрешности достоверной является лишь одна значащая цифра. Поэтому окончательный результат измерения следует записать с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$ следующим образом:

$$d = (13{,}62 \pm 0{,}06)\ \text{мм}.$$

Таблица 2.2

Измерение диаметра цилиндра

№	d_i,мм	$\bar{d}$, мм	ε_i,мм	ε_i^2, мм^2	S,мм	$t\,(\alpha=0{,}95)$	Δd_c,мм
1	13,65		0,030	0,0009			
2	13,65		0,030	0,0009			
3	13,60	13,620	– 0,020	0,0004	0,020	2,8	0,056
4	13,55		– 0,070	0,0049			
5	13,65		0,030	0,0009			

Из окончательного результата видно, что четвёртое значение измерения, приводимое в табл. 2.2, является «промахом», поскольку оно не попадает в полученный доверительный интервал.

Относительная погрешность измерения диаметра равна

$$\delta=\pm\frac{0{,}06}{13{,}62}=\pm0{,}004 \text{ или } 0{,}4\%.$$

Вывод: значение случайной погрешности оказывается больше значения приборной погрешности (половина цены деления – 0,005 мм), и ее нужно учитывать в измерениях.

Правила округления результатов измерений и вычислений приведены в разд. 4.

2.4. Погрешности однократных измерений

Встречаются измерения, когда случайные погрешности настолько малы, что повторные измерения дают значения, попадающие в пределы интервала погрешности прибора. Тогда физическую величину объявляют однократно измеренной. В этом случае погрешностью измерения является сумма основной и дополнительной погрешностей используемого прибора.

Основной погрешностью прибора называют его погрешность, которая появляется в условиях (температура, влажность воздуха, напряжение питания и др.), принятых за нормальные для данного средства измерений.

Дополнительные погрешности прибора возникают при отклонении влияющих на измерения величин от нормальных значений.

Основные и дополнительные погрешности прибора указывают в его паспорте. В тех случаях, когда паспорта нет, оценить погрешность можно, зная класс точности прибора.

Класс точности K обычно указан на шкале прибора. Он определяется выраженной в процентах приведенной погрешностью:

$$K=\frac{\Delta}{D}100\%,$$

где Δ – сумма основной и дополнительной погрешностей прибора; D – диапазон измерений.

Для многошкальных и многопредельных приборов диапазон измерений на каждой шкале (пределе) различен, следовательно, может быть различным и класс точности прибора. Стрелочные и со световым отсчетом приборы обычно имеют следующие классы точности: 6,0; 5,0; 4,0; 3,0; 2,5; 2,0; 1,5; 1,0; 0,5; 0,4, 0,3; 0,2; 0,1; 0,05. Зная класс точности, абсолютную погрешность находят по формуле

$$\Delta x_0 = KD/100. \tag{2.10}$$

Если найденная по этой формуле погрешность меньше половины цены наименьшего деления шкалы прибора, а также в тех случаях, когда класс точности прибора неизвестен, значение абсолютной погрешности однократного измерения равно половине цены наименьшего деления его шкалы.

3. Оценка погрешностей косвенных измерений

3.1. Вывод рабочих формул

При косвенных измерениях искомая физическая величина Y является функцией нескольких независимых переменных, и ее обычно вычисляют по соответствующей формуле, в которую подставляют результаты прямых измерений физических величин (A,B,C и т.д.):

$$Y=f(A,B,C,\ldots). \tag{3.1}$$

Значения $A,B,C,\ldots$ измеряют один или несколько раз, обрабатывают по правилам оценки погрешностей прямых измерений и записывают следующим образом:

$$A=\bar{a}\pm\Delta a_0;\; B=\bar{b}\pm\Delta b_0;\; c=\bar{c}\pm\Delta c_0\,,$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, . . . – средние арифметические значения прямых измерений величин A, B, C..., Δa_0, Δb_0, Δc_0... – абсолютные погрешности этих измерений.

Искомую физическую величину также записывают в виде

$$Y=\bar{Y}\pm\Delta Y_0, \tag{3.2}$$

где $\bar{Y}$ – результат подстановки в (3.1) значений $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, . . . , т.е. $\bar{Y}=f(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\ldots)$; ΔY_0– абсолютная погрешность косвенного измерения величины Y.

Для отыскания абсолютной погрешности ΔY_o воспользуемся выражением для полного дифференциала функции нескольких переменных:

$$dY = f'_a dA + f'_b dB + f'_c dC + \ldots \tag{3.3}$$

Величины $f'_a, f'_b, f'_c, \ldots$ называются частными производными функции (3.1). Частная производная имеет смысл быстроты изменения Y при изменении какой-либо одной из величин $A, B, C,\ldots$ Например, $f'_a = \partial Y / \partial A$ быстрота изменения функции в направлении А при B = const, C = const.

Частные производные вычисляют в окрестностях точки $Y = \overline{Y}$. Вместо величин $A, B, C,\ldots$ берут их средние арифметические значения $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ Обозначим эти частные производные следующим образом:

$$\begin{aligned} K_a &= f'_a(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots); \\ K_b &= f'_b(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots); \\ K_c &= f'_c(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Теперь выражение (3.3) примет вид

$$dY = K_a da + K_b db + K_c dc + \ldots . \tag{3.5}$$

Формула (3.5) дает математическую связь между бесконечно малыми изменениями $da, db, dc, \ldots$ аргументов вблизи $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ и бесконечно малым приращением dY вблизи $Y = \overline{Y}$.

Если в выражении (3.5) заменить справа бесконечно малые приращения $da, db, dc, \ldots$ на конечные приращения $\pm\Delta a_o, \pm\Delta b_o, \pm\Delta c_o, \ldots$, то тогда слева также будет конечное приращение величины Y:

$$\Delta Y = \pm K_a \Delta a_o \pm K_b \Delta b_o \pm K_c \Delta c_o \pm \ldots$$

Поскольку знаки у членов справа не определены, ΔY в этой формуле также является неопределенным. Очевидно, если все конечные приращения аргументов сложить по модулю, то получим максимальное значение погрешности

$$\Delta Y_{макс} = |K_a \Delta a_o| + |K_b \Delta b_o| + |K_c \Delta c_o| + \ldots$$

Однако вероятность получить при измерениях максимальное значение погрешности очень мала. Теория показывает, что наиболее вероятная оценка абсолютной погрешности при косвенных измерениях определяется выражением

$$\Delta Y_o = \sqrt{(K_a \Delta a_o)^2 + (K_b \Delta b_o)^2 + (K_c \Delta c_o)^2 + \ldots}. \tag{3.6}$$

Относительная погрешность равна

$$\delta = \Delta Y_o / \overline{Y} \quad . \tag{3.7}$$

В некоторых случаях формула для расчёта физической величины может иметь вид

$$Y = k a^m b^n c^p \ldots , \tag{3.8}$$

где k, m, n, p – любые числа: целые, дробные, рациональные и иррациональные, положительные и отрицательные. Примером такой зависимости является косвенное измерение объёма цилиндра (1.1).

Вычислим частные производные функции (3.8) и подставим в них средние арифметические значения измеренных величин $a, b, c, \ldots$ Тогда получим значения коэффициентов (3.4):

$$\begin{aligned} K_a &= km(\overline{a})^{m-1}(\overline{b})^n(\overline{c})^p \ldots; \\ K_b &= kn(\overline{a})^m(\overline{b})^{n-1}(\overline{c})^p \ldots; \\ K_c &= kp(\overline{a})^m(\overline{b})^n(\overline{c})^{p-1} \ldots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставим эти коэффициенты в формулу (3.6), а затем разделим ее на значение

$$\overline{Y} = k(\overline{a})^m(\overline{b})^n(\overline{c})^p \ldots$$

В результате получим формулу для относительной погрешности физической величины, подчиняющейся зависимости (3.8):

$$\delta = \frac{\Delta Y_o}{\overline{Y}} = \sqrt{\left(m\frac{\Delta a_o}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\Delta b_o}{b}\right)^2 + \left(p\frac{\Delta c_o}{c}\right)^2 + \ldots} \tag{3.10}$$

Как и следовало ожидать, относительная погрешность не зависит от постоянного коэффициента k в (3.8).

После вычисления относительной погрешности δ легко определить абсолютную погрешность:

$$\Delta Y_o = \delta\overline{Y}. \tag{3.11}$$

3.2. Примеры оценки погрешностей косвенных измерений

Пример 1. Оценим погрешность измерения объема цилиндра по расчетной формуле

$$v = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

Результаты прямых измерений диаметра и высоты цилиндра считаем известными:

$$d = \overline{d} \pm \Delta d_o; \quad h = \overline{h} \pm \Delta h_o.$$

Для оценки погрешности удобно воспользоваться выражением (3.10). Сравнивая формулу вычисления объема цилиндра с (3.8), получим

$$k = \frac{\pi}{4}; \quad m = 2; \quad n = 1.$$

Тогда для относительной погрешности имеем

$$\delta = \frac{\Delta V_o}{V} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta d_o}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_o}{\bar{h}}\right)^2},$$

откуда абсолютная погрешность

$$\Delta V_o = \delta V = \frac{\pi}{4}(\bar{d})^2\,\bar{h}\sqrt{\left(2\frac{\Delta d_o}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_o}{\bar{h}}\right)^2}.$$

Пример 2. Если расчетная формула, приводимая в лабораторной работе, по своей структуре близка к выражению (3.8) и легко подвергается логарифмированию, то формулу для относительной погрешности можно получить, выполняя последовательно следующие операции:

– взять натуральный логарифм исходного выражения;

– продифференцировать полученное выражение почленно, помня, что $d(\ln A) = \dfrac{dA}{A}$;

– заменить знаки дифференциала d на знак конечного приращения Δ;

– знаки "минус" заменить на знаки "плюс", так как суммарная погрешность всегда больше погрешности отдельных измерений;

– возвести каждый член в квадрат, так как складываются не сами погрешности, а их квадраты;

– в полученную формулу подставить средние арифметические значения измеренных величин и их абсолютные погрешности;

– рассчитать δ и ΔY_o;

– записать окончательный результат в виде

$$Y = \bar{Y} \pm \Delta Y_o;\quad \delta = \frac{\Delta Y_o}{\bar{Y}}.$$

4. Взвешивание результатов измерений

Если после проведения одинаковых экспериментов с переменными параметрами получились N измеренных значений одной и той же физической величины, но каждая со своей погрешностью

$$\bar{z}_1 \pm \Delta z_1;\quad \bar{z}_2 \pm \Delta z_2;\quad \dots;\quad \bar{z}_N \pm \Delta z_N, \tag{4.1}$$

то их можно объединять на основе взвешивания результатов измерений.

Принято считать, что вес (значимость) того или иного полученного i-го значения определяется его весом w_i, который связан с погрешностью его измерения соотношением

$$w_i = 1/\Delta z_i^2. \tag{4.2}$$

Если же в серии есть N величин $z_1, z_2, \dots, z_N$, а каждая имеет вес $w_1, w_2, \dots, w_N$, то среднее взвешенное (наилучшее) значение в серии может быть представлено в виде

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{z}_i}{\Delta z_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\Delta z_i^2}}. \tag{4.3}$$

А погрешность среднего взвешенного имеет вид

$$\Delta z_0 = 1/\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta z_i^2}}. \tag{4.4}$$

Значимость взвешенного результата определяется по стандартной записи при вычислении абсолютной и относительной погрешности

$$z = \bar{z} \pm \Delta z_0. \tag{4.5}$$

5. Метод наименьших квадратов (линейная парная регрессия)

На опыте часто измеряют пары величин x и y, причем одна из них является функцией другой $y=y(x)$. Затем полученные значения откладывают на графике и по графику пытаются найти кривую, соответствующую алгебраической функции $y(x)$, которая проходила бы как можно ближе к экспериментальным точкам.

Наиболее известен метод нахождения параметров прямой линии $y(x)=b_0+b_1x$, (где b_0 – параметр отсечки прямой, а b_1 – ее тангенс угла наклона), проходящей наилучшим образом через «облако» экспериментальных точек. Этот метод наименьших квадратов (МНК) был предложен математиком Лежандром.

Минимизируя сумму отклонений от прямой

$$s = \sum_{i=1}^{N}(y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = min, \tag{5.1}$$

где N – число пар точек, он получил формулы для вычисления параметров b_0 и b_1, определяемых из 2-х уравнений:

$$b_0 + b_1\bar{x} = \bar{y}, \tag{5.2}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$, а b_1 определяется из соотношения

$$b_1 = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}. \qquad (5.3)$$

Степень приближения точек к прямой определяется значением суммы (5.1) (которая должна быть малой) и коэффициентом корреляции – признаком, учитывающим взаимосвязь ряда чисел последовательности

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i\right)/N}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{N}}}. \qquad (5.4)$$

6. Метод парных точек

Без помощи ЭВМ суммирование в формулах (5.3)-(5.4) трудно выполнить. Ниже излагается более простой метод, который часто оказывается вполне удовлетворительным. Он особенно хорош, когда значения x эквидистантны (находятся на одинаковом расстоянии).

Допустим, что у нас имеется 8 точек, лежащих приблизительно на одной прямой. Требуется найти среднее значение тангенса угла наклона b_1 и его погрешность. Пронумеруем точки по порядку от 1 до 8 (рис. 6.1). Возьмем точки 1 и 5. Ими определяется некоторая прямая и, следовательно, угол её наклона. Рассматривая точно также другие пары точек, получим в итоге четыре тангенса наклона. В качестве наилучшего значения b_1 выберем среднее значение и обычным способом найдём его среднеквадратичную ошибку.

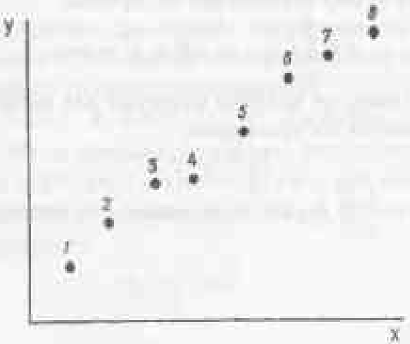

Рис. 6.1

Такой метод даёт удовлетворительные результаты лишь тогда, когда величины $(x_5$-$x_1)$, $(x_6$-$x_2)$, $(x_7$-$x_3)$,$(x_8$-$x_4)$ примерно одинаковы. В противном случае статистический вес четырёх значений тангенса угла наклона будет неодинаковым.

Полученная прямая линия будет иметь угловой коэффициент b_1 и проходить через точку $\bar{x}, \bar{y}$ (нам уже известно, что прямая, найденная методом наименьших квадратов, всегда проходит через эту точку). Изложенным методом пользуются тогда, когда искомая прямая проходит через начало координат и требуется определить только угол наклона прямой.

7. Точность записи результатов измерений и правила округлений

Точность записи (число значащих цифр) отдельных измерений и последующих вычислений при их обработке должна быть согласована с необходимой точностью результата измерения. Здесь рекомендуется придерживаться следующих правил.

1. При числе измерений менее 30 погрешность результата измерения следует выражать не более чем одной значащей цифрой. При числе измерений больше 30 погрешность результата измерений может содержать две значащие цифры, если результаты измерений прецизионные (достигнута погрешность меньше 1%).

2. Число цифр в результатах промежуточных расчетов обычно должно быть на одну больше, чем в окончательном результате. Погрешности при промежуточных вычислениях должны быть выражены не более чем тремя значащими цифрами.

3. Округлять результат измерения следует так, чтобы он оканчивался цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерения оканчивается нулями, то нули отбрасывают только для того разряда, который соответствует разряду погрешности.

Пример. Число 0,98721 при погрешности $\pm 0{,}005$ следует округлять в третьей значащей цифре до значения 0,987 .

4. Если первая (слева направо) из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяют. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают.

Пример. При сохранении четырех значащих цифр число 283 435 должно быть округлено до 283 400; число 384,435 – до 384,4.

5. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр равна 5, а за ней не следует никаких цифр или идут нули, то округление производят до ближайшего четного числа, т.е. четную последнюю цифру или нуль оставляют без изменения, нечетную увеличивают на единицу.

Пример. При сохранении трех значащих цифр число 264,50 округляют до 264; число 645,5 округляют до 646.

6. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр больше или равна 5, но за ней следует отличная от нуля цифра, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу.

Пример. При сохранении трех значащих цифр число 17,58 округляют до 17,6; число 18 598 – до 18 600; число 352,512 – до 353.

8. Графическое изображение результатов

Если исследуется функциональная зависимость одной величины от другой, то результаты могут быть представлены в виде графиков. Посмотрев на график, можно сразу оценить вид полученной зависимости, получить о ней качественное представление и отметить наличие максимумов, минимумов, точек перегиба, областей наибольшей и наименьшей скоростей изменения, периодичности и т.п. График позволяет также судить о соответствии экспериментальных данных рассматриваемой теоретической зависимости и облегчает обработку измерений.

При вычерчивании графиков соблюдают следующие правила:

1. Графики выполняются преимущественно на миллиметровой бумаге или бумаге со специальными координатными сетками.

2. В качестве осей координат следует применять прямоугольную систему координат (это облегчает использование построенного графика). Общепринято по оси абсцисс откладывать ту величину, изменения которой являются причиной изменения другой (т.е. по оси абсцисс – аргумент, по оси ординат – функцию). Оси координат следует заканчивать стрелками.

3. Масштаб графика определяется интервалом изменения величин, отложенных по осям; погрешность на графике представляется в выбранном масштабе отрезком достаточной длины. Принятая шкала будет легко читаться, если одна клетка масштабной сетки будет соответствовать удобному числу: 1; 2; 5; 10 и т. д. (но не 3; 7; 1,13 и т. д.), которое представляет собой единицу отображаемой на графике величины. Образец оформления графической зависимости периода колебаний физического маятника от приведённой длины представлен на рис. 8.1 для двух разных положений опорной призмы.

4. Масштабы по обеим осям выбираются независимо друг от друга. Следует помнить, что график получается более наглядным, если основная часть кривой имеет наклон, не слишком отличающийся от 45°. В этом случае наиболее удобно анализировать форму кривой. Кривые должны занимать практически всё поле графика (т. е. должно быть соответствие между протяжённостью кривой и размером графика).

5. При исследовании резонансных явлений следует иметь в виду, что в тех областях, где ход кривой монотонный, можно ограничиться небольшим числом измерений (несколькими точками кривой на графике). В областях максимумов, минимумов и точек перегибов следует производить измерения значительно чаще, что увеличит точность построения графика. Если при выборе масштабов для обеих осей на основе интервалов изменения график получается слишком растянутым в каком-либо направлении, то это означает, что измерения соответствующей величины проведены с излише высокой точностью. В этом случае следует несколько увеличить масштаб по оси, для которой точность измерений меньше, а затем выбрать масштаб для второй оси так, чтобы график имел удобную форму.

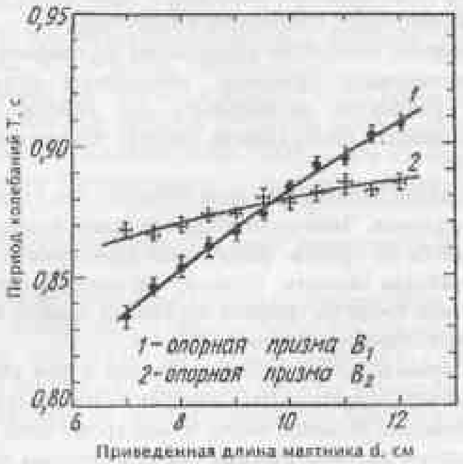

Рис. 8.1

6. Масштаб наносится на осях графика вне его поля в виде равноотстоящих «круглых» чисел, например: 6; 8; 10 и т. д. или 4,74; 4,76; 4,78 и т. д. Не следует расставлять эти числа слишком густо – достаточно нанести их через 2 или даже через 5 см. Около оси координат необходимо написать название величины, которая отложена по данной оси, её обозначение и единицу измерения. При этом множитель, определяющий порядок величины, включается обычно в единицы измерения, например: I, мА или I, 10^{-3} А. Если началом отсчёта является нуль, его следует указывать у точки пересечения осей.

7. На графике приводится только та область изменения измеренных величин, которая была исследована на опыте; не нужно стремиться к тому, чтобы на графике обязательно поместилось начало координат. Начало обозначают на графике только в том случае, когда это не требует большого увеличения его размеров.

8. Точки должны наноситься на график тщательно и аккуратно, чтобы график получился возможно более точным. На график наносят все полученные в измерениях значения. Если одна точка измерялась несколько раз, то можно нанести среднее арифметическое значение и указать разброс. Если на один и тот же график наносятся различные группы данных (результаты измерения разных величин или одной величины, но полученные в разных условиях и т. п.), то точки, относящиеся к разным группам, должны быть помечены различными символами (кружочки, треугольники, звёздочки и т. п.). Выносные линии на графике не проводятся, надо научиться наносить точки на график без их помощи. Выносная линия может в виде исключения быть нанесена, если какую-либо точку хотят особо выделить на графике (например, положение максимума).

9. Погрешность измерения изображают на графике с помощью крестиков соответствующих размеров, нанесённых поверх точек. Нет необходимости указывать погрешность для каждой точки, но если погрешность изменяется вдоль кривой, следует показать это на нескольких точках (рис. 8.1).

10.Как правило, физические зависимости – это гладкие, плавные линии без резких изломов. Экспериментальные точки вследствие ошибок измерений не ложатся на кривую физической зависимости, а группируются вокруг неё случайным образом. Поэтому не следует соединять соседние экспериментальные точки на графике отрезками прямой и получать таким образом некоторую ломаную линию.

Излом на кривой можно рисовать только в том случае, если он не может быть объяснён погрешностью измерений и если при этом на его существование указывает большое число точек; кроме того, нужно быть уверенным в отсутствии систематических ошибок (изломы часто появляются, например, когда сначала работают на одной шкале прибора, а затем переходят на другую). Во всех случаях кривая должна быть проведена так, чтобы она не закрывала экспериментальных точек. Помните, что результат эксперимента – это точки, а кривая – это только толкование вашего результата.

11.Прямую на графике проводят карандашом с помощью линейки. Кривую проводят по экспериментальным точкам от руки. Для последующей обводки кривой следует использовать лекало.

12.При построении графика нужно стремиться к тому, чтобы он наиболее чётко отражал все особенности представляемой зависимости. Для этого часто бывают удобны функциональные масштабы – по осям откладывают не сами измеряемые величины, а их функции, подобранные в соответствии с решаемой задачей.

Пусть, например, исследуется зависимость типа $y = x$ (например, при проверке градуировки прибора y – измеряемое значение величины, x – показание прибора). Для иллюстрации этой зависимости вполне удобен график в координатах x,y. Для определения отклонений от неё полезнее график зависимости $(y - x)$ от x или y (в частности, так строятся графики поправок к показаниям приборов).

13. Если функция изменяется на несколько порядков при малых изменениях аргумента, то удобно применять системы координат с полулогарифмическим или логарифмическим масштабом. Полулогарифмическая система координат – это прямоугольная система координат, по одной оси которой отложен равномерный масштаб, а по второй – логарифмический (пропорциональный логарифму натуральных чисел). Полулогарифмический масштаб удобен для изображения зависимости типа $y = ae^{kx}$. Логарифмируя зависимость, получим $\lg y = \lg a + k'x$, где $k' = k \lg e$. Если наносить величину x по оси равномерной шкалы, а величину y – по оси логарифмической шкалы, то получится прямая линия.

14. Логарифмическая система координат – это прямоугольная система координат, на обеих осях которой отложены логарифмические масштабы. Логарифмические координаты очень удобны для изображения зависимости вида $x^n y^m = \mathrm{const}$. Логарифмируя приводимую зависимость, получим

$$n \lg x + m \lg y = \lg C.$$

В логарифмической системе координат такая зависимость будет иметь вид прямой линии.

15. При использовании функциональных масштабов на ось следует наносить двойную шкалу: одну – равномерную для откладываемой по оси функции (например, $\lg x$), а другую – неравномерную для самой исследуемой величины x. В тех случаях, когда аргументом являются угловые величины, удобнее применять не прямоугольную систему координат, а полярную.

График должен быть наглядным и приемлемым с эстетической точки зрения (разные цвета для экспериментальных точек, кривых, осей координат и т. д.). Построенный график снабжается подписью, в которой даётся точное описание того, что показывает график. Различные группы точек или различные кривые на графике также должны быть обозначены и объяснены в подписи к графику.

9. Многопредельные приборы

Прибор, электрическую схему которого можно изменять для того, чтобы перекрыть широкий диапазон измеряемой величины, называют многопредельным. Например, для амперметров изменение пределов измерения производится за счёт включения различных ***шунтов***, для вольтметров – за счёт включения ***делителей напряжения***.

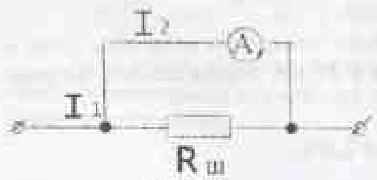

Рис. 9.1

Шунты используют для уменьшения силы тока, протекающего через амперметр, в определенное число раз. Такая задача возникает в том случае, если диапазон показаний амперметра меньше диапазона ожидаемого изменения измеряемого тока. Шунт представляет собой сопротивление, включаемое параллельно прибору, как показано на рис. 9.1. Если сопротивление шунта $R_ш = \dfrac{R}{(n-1)}$, где R – сопротивление амперметра; $n = \dfrac{I_1}{I_2}$ – коэффициент шунтирования, то ток I_2 в n раз меньше тока I_1.

Делители напряжения применяют для уменьшения напряжения, подаваемого на вольтметр, в определенное число раз. В зависимости от рода напряжения они могут быть выполнены на элементах, имеющих чисто активное, ёмкостное или индуктивное сопротивления. Для увеличения верхнего предела измерения вольтметра, имеющего внутреннее сопротивление R_V, применяют добавочные сопротивления, включаемые последовательно с вольтметром. При этом добавочное сопротивление и вольтметр образуют делитель напряжения. Добавочное сопротивление определяют по формуле

$$R_g = R_V[(U_x / U_V) - 1],$$

где U_x – измеряемое напряжение;

U_V – напряжение, показываемое вольтметром;

R_V – внутреннее сопротивление вольтметра.

Появление многопредельных приборов связано с тем обстоятельством, что часто требуется измерять электрические величины в широких пределах с достаточной степенью точности в каждом интервале. В этом случае многопредельный прибор заменяет несколько однотипных приборов с различными интервалами измерения. Например, при снятии анодных характеристик триода величина анодного тока в зависимости от анодного напряжения (при постоянном потенциале сетки) может изменяться в пределах от 0 до 30 мА. Если измерения производить прибором, шкала которого рассчитана на 30 мА (т.е. D = 30мА), то небольшие токи будут измерены таким прибором с большой погрешностью.

Действительно, пусть класс точности прибора k = 1,5. Тогда абсолютная погрешность измерения определится по формуле

$$\Delta x_0 = \frac{kD}{100} = \frac{1{,}5 \cdot 30}{100} = 0{,}5 мА.$$

Она остается постоянной для любого измерения величины тока в диапазоне D. Тогда при измерении тока в 21 мА относительная погрешность, даваемая прибором, равна

$$\delta_1 = \frac{0{,}5}{21} = 2{,}4\%.$$

Если же измерять прибором ток в 1 мА на выбранном диапазоне D, то абсолютная погрешность измерения будет того же порядка, что и измеряемая величина:

$$\delta_2 = \frac{0{,}5}{1} = 50\%.$$

В приведенном случае следует переключить многопредельный прибор на диапазон, верхнее значение которого будет меньше предыдущего. Его выбор определяется отклонением стрелки: стрелка должна отклоняться на максимальный угол, но не выходить за пределы шкалы. Таким образом, многопредельный прибор следует включать так, чтобы относительная погрешность измерения была как можно меньше. Часто многопредельные приборы снабжаются различными шкалами. В таких приборах отсчет должен производиться по шкале, соответствующей выбранному диапазону прибора.

Часто многопредельные приборы имеют одну шкалу. В таких случаях нахождение измеряемой величины связано с пересчетом. Пересчет состоит в определении переводного коэффициента, на который следует умножить отсчет по прибору для того, чтобы получить значение измеряемой величины в соответствующих единицах.

Переводной коэффициент равен

$$П_k = D/N,$$

где D – диапазон измерений, т.е. максимальное значение величины, которое можно измерить при данном включении прибора; N – наибольшее целое число делений шкалы.

Не следует смешивать наибольшее число делений шкалы и величину отсчета по прибору, так как в общем случае отсчет и наибольшее число делений не совпадают. Например, рассмотрим прибор, применяемый при измерении постоянного тока в пределах от 0 до 300 мА, шкала которого имеет 60 делений. Тогда отсчету 50 мА соответствует 10 делений, отсчёту 100 мА – 20 делений и т.д.

Предположим, что к миллиамперметру, имеющему на шкале 300 делений, подобраны шунты таким образом, что при различных включениях он позволяет измерять ток в трех диапазонах: 0 – 3 мА, 0 – 9 мА и 0 – 30 мА. Пусть прибор, включенный в диапазоне 0 – 3 мА, дает отсчет 210 делений. Переводной коэффициент равен $П_{k_1}$ = 0,01, измеряемая величина составляет I_1 = 210·0,01 = 2,1 (мА). Пусть при измерении тока I_2 в диапазоне 0 – 9 мА отсчет по прибору также равен 210 делениям. В этом случае

$$I_2 = 210 П_{k_2} = 210\frac{9}{300} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}\ (А).$$

При использовании многопредельных приборов, в которых применена измерительная головка со стрелочной индикацией, следует соблюдать следующие правила:

1. Установить требуемый режим работы прибора (например, измерение силы постоянного тока, измерение величины переменного напряжения и т.д.).

2. Вычислить переводные коэффициенты для всех диапазонов

$$П_{k1}, П_{k2}, П_{k3} \text{ и т. д.}$$

3. Во избежание порчи прибора включить его в максимальном диапазоне D_n.

4. Приблизительно определить измеряемую величину, умножив отсчет по прибору на переводной коэффициент $П_k$. После этого перейти на тот диапазон, верхний предел которого ближе всего к значению измеряемой величины, но в то же время больше ее. Зафиксировать точное значение измеряемой величины, умножив отсчет на соответствующий переводной коэффициент.

5. Если измеряемая величина растет, то измерения продолжать до тех пор, пока стрелка не подойдет к концу шкалы, а затем перейти на следующий (больший) диапазон.

6. Если измеряемая величина убывает, то измерения продолжать до тех пор, пока она не достигнет верхнего предела следующего меньшего диапазона, после чего перейти на этот диапазон.

10. Отсчет по шкале прибора

Все приборы имеют шкалу, отградуированную в единицах или долях единиц измеряемых величин. Шкала прибора может быть прямая или дугообразная и разделена на некоторое число крупных делений, каждое из которых в свою очередь подразделяется на более мелкие, причем отсчет по шкале состоит в измерении смещения стрелки-указателя от начала шкалы до какого-либо деления.

Рассмотрим ошибки, возникающие при проведении отсчета. Начиная и заканчивая измерения с помощью любого прибора, следует проверять, равны ли нулю его показания при отсутствии на его входе измеряемой величины. Большинство приборов имеет устройство для корректировки места расположения нуля. Слишком частая корректировка может быть вредна для прибора, и в учебной лаборатории студенты могут выполнять ее только с разрешения преподавателя или лаборанта. Если корректировка нежелательна или с ее помощью не удается устранить несовпадение стрелки и нуля на шкале, то следует зафиксировать имеющийся нулевой отсчет и в дальнейшем вводить поправку в результаты измерения.

Ошибки, возникающие при отсчете местоположения стрелки прибора, такие же, как и в случае прямых измерений с помощью линейки. Обычно стрелка-указатель находится на некотором расстоянии от плоскости шкалы. Если мы будем смотреть на стрелку так, что линия зрения будет не перпендикулярна плоскости шкалы, то отсчет будет неверным. Возникающая неточность отсчета называется ошибкой параллакса. Ее удается уменьшить, по возможности приближая к шкале измерительную стрелку, а также используя зеркало, расположенное рядом с делениями в плоскости шкалы. Совмещая стрелку с ее отражением в зеркале, мы обеспечиваем прямой угол между линией зрения и шкалой при проведении отсчёта.

Обычно ошибка отсчета возникает при отсчете десятых долей деления. Как показали специальные исследования, при ширине делений, меньших 1 – 1,5 мм, и при ширине штрихов, больших 0,1 ширины деления, точность отсчета долей деления на глаз минимальна и равна не менее чем 0,5 деления. Поэтому на большинстве шкал нанесены деления и штрихи, обеспечивающие возможность более точного отсчета. В тех случаях, когда ширина делений шкалы меньше одного миллиметра (например, 0,1 мм), отсчет делается при помощи лупы с таким увеличением, чтобы кажущаяся ширина делений была не менее 1 – 1,5 мм. При соблюдении описанных условий ошибку отсчета долей деления на глаз следует принимать не меньшей, чем 0,2 деления.

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются прямыми, а какие косвенными? Приведите примеры.
2. Что такое систематическая и случайная погрешности?
3. Какая погрешность называется грубой и можно ли ее избежать?
4. Как находится абсолютная и относительная погрешности?
5. Найдите среднее арифметическое измерений x_1, x_2, x_3, x_4.
6. По какой формуле вычисляются случайные отклонения?
7. Как записать окончательный результат при прямых измерениях?
8. Что такое среднеквадратичное отклонение?
9. Как увеличить точность измерений при наличии случайных погрешностей?
10. Какому закону подчиняется распределение случайных погрешностей при большом числе измерений? Запишите его в аналитическом виде. Постройте график.
11. В чем заключается геометрический смысл функции распределения?
12. Что такое доверительная вероятность и доверительный интервал?
13. Какому закону подчиняется распределение случайных погрешностей при малом числе измерений? Как записывается в таком случае конечный результат прямого измерения?
14. Что такое коэффициент Стьюдента?
15. Как оцениваются погрешности однократных измерений?
16. Что такое класс точности прибора?

17. Как находится погрешность, если известен класс точности прибора?

18. Как найти погрешность однократных измерений, если класс точности прибора неизвестен?

19. Как оцениваются погрешности косвенных измерений?

20. Запишите последовательность операций при нахождении погрешностей прямого измерения.

21. Запишите последовательность обработки результатов косвенных измерений при наличии случайных погрешностей.

22. Как записывается окончательный результат при косвенных измерениях?

23. Сформулируйте правила округления полученных результатов.

24. Сколько значащих цифр должна иметь погрешность результата измерений и почему?

Библиографический список

1. Гуревич М.А. Основы физического эксперимента. – Л.: Наука, 1977.
2. Бурдун Г.Д. , Марков Б.Н. Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1975 .
3. Тюрин Н.И. Введение в метрологию. – М.: Изд-во стандартов, 1976.
4. Соловьев В.А., Яхонтова В.Е. Элементарные методы обработки результатов измерений. – М.: Наука, 1975.
5. Кудряшова Ж.Ф. и др. Методы обработки результатов наблюдений при измерениях: Труды метрологических институтов СССР. – М.: Изд-во стандартов, 1972. Вып. 134(194).
6. Сквайрс Дж. Практическая физика. – М.: Мир, 1971.
7. Электрорадиоизмерения /Под ред. В.И. Винокурова. – М.: Высш. школа, 1976.
8. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента/ Под ред. проф. А.Н.Матвеева. – М.: МГУ, 1977.
9. Андреева Т.И., Меркулова В.М., Сапогин В.Г. Оценка погрешностей при физических измерениях. – Таганрог: ТРТИ, 1992.
10. Волощенко В.Ю., Сапогин В.Г. Оценка погрешностей при физических измерениях. – Таганрог: ТРТУ, 2004.

Содержание

Сапогин Владимир Георгиевич

Методическая разработка

Методы обработки результатов измерений физических величин

Редактор Чиканенко Л.В.
Корректор Надточий З.И.

ЛР №020565 от 23 июня 1997 г.
Формат 60x841/16. Подписано к печати 25.12.08г
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. п.л. – 2,2. Уч.-изд. л. – 2,1.
Заказ № 437. Тираж 100 экз.

"С"

Издательство Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44

Типография Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1