

1. Что представляет собой вторичное космическое излучение?
2. Какие компоненты космических лучей различают?
3. Как перевести энергию 1 эВ в джоули?
4. Какие частицы появляются при множественном рождении вторичных частиц?
5. Как устроен счётчик Гейгера – Мюллера?
6. Как распределено электрическое поле в счетчике Гейгера – Мюллера?
7. От чего зависит характер работы счётчика Гейгера – Мюллера?
8. Когда счётчик работает как ионизационная камера?
9. Когда счётчик работает как пропорциональный?
10. Когда счётчик работает в режиме Гейгера?
11. Что такое коэффициент газового усиления  $A$ ?
12. Что называют ударной ионизацией?
13. Что такое временная «разрешающая» способность счётчика?
14. Какие меры принимают для того, чтобы разряд быстро гасился?
15. Что такое гасящее сопротивление и какую роль оно играет?
16. Что такое плотность потока ионизирующих частиц?
17. Объясните причины уменьшения абсолютной погрешности измерений при увеличении числа измерений.

## **611. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ**

### **611.1. Цель работы**

Изучение волновых свойств и особенностей движения микрочастиц.

### **611.2. Разделы теории**

Элементы квантовой механики. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм. Принцип неопределенности Гейзенберга. [1. Гл. 4, §18 – §20]; [2. Гл.27, §213 – §215]

### **611.3. Приборы и принадлежности**

Персональный компьютер. Работа выполняется методом численного моделирования.

### **611.4. Теоретическое введение**

В основе квантовой механики в качестве фундаментального (т.е. отражающего важнейшее универсальное свойство природы) принципа лежит идея корпускулярно-волнового дуализма. Состоит она в том, что всем микрообъектам присущи одновременно и корпускулярные и волновые свойства. Первым такое предположение высказал Луи де Бройль в 1923 г. На чем основывалось это предположение?

Во-первых, было известно, что свет обладает и волновыми свойствами (дифракция, интерференция) и корпускулярными (фотоэффект, световое давление). Существовала квантовая теория излучения абсолютно черного тела, согласно которой свет испускается порциями – квантами.

Во-вторых, Н. Бор построил теорию атома водорода, из которой следовало, что энергия электрона в атоме может принимать только дискретные значения. Это объяснило линейчатые спектры излучения газов, результаты опыта Франка и Герца. В то же время теория Бора не могла удовлетворительно описать движение электрона в атоме.

Наличие у света корпускулярных свойств, а также дискретность возможных значений энергии электрона в атоме

водорода позволили сделать предположение, что любые частицы и, в частности, электроны, могут обладать и корпускулярными и волновыми свойствами. Подобно тому, как электромагнитная волна ассоциируется с фотоном, допустим, что каждой материальной частице сопоставлена волна, круговая частота  $\omega$  которой связана с энергией частицы соотношением  $E = \hbar\omega$ ,  $\hbar = h/2\pi$ , где  $h$  – постоянная Планка. Если принять эту точку зрения, атом будет обладать свойствами резонирующей полости (резонатора) с дискретным набором собственных частот. Это позволит объяснить эффект квантования энергетических уровней атома.

При этом открывается возможность построить единую теорию, в которой вещество и излучение будут выступать как разновидности объектов одной природы, обладающих свойствами и волны и корпускулы.

План нашего дальнейшего изложения будет следующим: 1) исходя из предположения о том, что с каждой частицей связана волна, получим выражение, связывающее волновые и корпускулярные характеристики частицы; 2) проверим, удовлетворяет ли полученное выражение требованиям специальной теории относительности.

Последуем за де Бройлем и предположим, что с каждой движущейся частицей связана волна. Пусть внешние силы отсутствуют и частица движется равномерно и прямолинейно. Энергия частицы –  $E$ , импульс –  $\vec{p}$ , масса –  $m$ .

По аналогии с движением фотона волна должна распространяться в том же направлении, в котором движется частица. Представим волну в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = A \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \quad (611.1)$$

где:  $A$  – амплитуда волны,  $\vec{k}$  – волновой вектор,  $\omega$  – частота.

Как параметры волны  $\vec{k}$  и  $\omega$  могут быть связаны с параметрами движущейся частицы  $p$ ,  $m$ ,  $E$ ? По-видимому, следует обратить внимание на скорости распространения волны и частицы. Они должны быть равными, так как в конечном счете речь идет о

перемещении в пространстве одного физического объекта, обладающего свойствами и волны и частицы. Однако известно, что распространение волны можно охарактеризовать групповой и фазовой скоростями. Какая из них должна быть равна скорости частицы?

Фазовая скорость волны есть скорость перемещения плоскости равной фазы

$$v_f = \frac{\omega}{|k|}.$$

Однако, частице должна соответствовать волна конечной протяженности, так как частица не может находиться одновременно во всем пространстве. Плоская волна (611.1) этому условию не удовлетворяет. Чтобы удовлетворить этому условию, следует воспользоваться суперпозицией волн с близкими волновыми векторами. Такая суперпозиция волн называется волновым пакетом. Амплитуда волнового пакета велика в ограниченной области пространства, за пределами которой она быстро спадает. Точка, в которой амплитуда волнового пакета максимальна, движется со скоростью

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (611.2)$$

которая называется групповой скоростью волны. Именно эта скорость, а не фазовая должна быть отождествлена со скоростью частицы.

Мы допустили, что для частиц справедлива формула  $E = \hbar\omega$ , как и для фотонов. Тогда

$$\hbar\omega = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (611.3)$$

Формулу (611.2) можно переписать так:

$$v_g = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dk} \quad (611.4)$$

Пользуясь выражениями (611.3) и (611.4), установим связь

между величинами  $\vec{k}$  и  $\vec{p}$ . Зная это соотношение, легко будет определить и связь между  $\vec{k}$  и скоростью  $\vec{v}$ :

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{d}{dv} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{mv}{\hbar \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$v_g = \frac{m}{\hbar} \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dk}.$$

Откуда

$$dk = \frac{m}{\hbar} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dv.$$

Проинтегрируем последнее выражение, предполагая, что при  $v=0$  волновой вектор  $k$  также равен 0:

$$k_0 = \int_0^{k_0} dk = \frac{m v_0}{\hbar} \int_0^{v_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv = \frac{m v_0}{\hbar} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\hbar k = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (611.5)$$

В правой части формулы (611.5) стоит выражение для релятивистского импульса, следовательно, получена искомая связь между импульсом и волновым вектором:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (611.6)$$

Именно это выражение и было получено де Бройлем.

Осталось проверить, удовлетворяют ли полученное выражение (611.6) и предположение (611.3) требованиям специальной теории относительности. Для этого рассмотрим две системы координат – "нештрихованную"  $K$  и "штрихованную"

$K'$ . Система  $K$  является лабораторной, а система  $K'$  движется относительно  $K$ . В системе  $K'$  волна, описываемая в системе  $K$  выражением (611.1), будет иметь вид

$$\varphi'(\vec{r}', t') = A' \exp \{ i \vec{k}' \vec{r}' - i \omega' t' \}.$$

Допустим, что система  $K'$  движется вместе с нашей частицей, т.е. является для нее системой покоя. В этом случае  $k' = 0$ ,  $p' = 0$  и  $E' = mc^2$ . Тогда, так как  $E' = \hbar \omega'$ ,  $\omega' = mc^2 / \hbar$ .

Согласно постулату Эйнштейна все физические процессы должны протекать одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Плоская волна должна оставаться периодичной во всех инерциальных системах отсчета. Волна периодична, откуда следует, что если разность фаз между двумя пространственно-временными точками  $P$  и  $Q$  в системе отсчета  $K$  равна  $2\pi n$ , где  $n$  – целое число, то в системе отсчета  $K'$  разность фаз той же волны между соответствующими точками  $P$  и  $Q$  должна оставаться равной  $2\pi m$  ( $m$  – целое число). Иначе нарушится периодичность волны. Отсюда

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = \vec{k}' \vec{r}' - \omega' t'.$$

Учитывая, что  $K'$  – система покоя, получаем

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = -\omega' t' = -\left( \frac{mc^2}{\hbar} \right) t'. \quad (611.7)$$

Воспользуемся преобразованиями Лоренца для времени

$$t' = \frac{t - \frac{\vec{x} \vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $\beta = v/c$  ( $v$  – скорость движения частицы в системе отсчета  $K$ ) и преобразуем (611.7):

$$\vec{k} \vec{x} - \omega t = -\frac{mc^2}{\hbar} \left( \frac{t - \frac{\vec{x} \vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{m \vec{x} \vec{v}}{\hbar \sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{mc^2}{\hbar} \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Из последней формулы видно, что

$$\vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \omega = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (611.8)$$

Энергию и импульс частицы в системе  $K$  можно выразить так:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (611.9)$$

Сравнивая выражения (611.8) и (611.9), получаем

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Таким образом, сделанные нами предположения о характере зависимости  $E(\omega)$  и  $\vec{p}(\vec{k})$  не противоречат специальной теории относительности.

Итак, сформулируем гипотезу де Бройля: с движущейся частицей связана волна, характеризующаяся волновым вектором  $\vec{k}$ , который определяется импульсом частицы  $p = \hbar k$ . Следовательно, длина волны, связанной с частицей, равна

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k}. \quad (611.10)$$

Если  $E$  – полная энергия частицы, то

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2c^2}} = \frac{hc}{E} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}}. \quad (611.11)$$

Если  $T$  – кинетическая энергия частицы, то  $E = T + mc^2$ , где  $m$  – масса покоя электрона.

Подставляя полную энергию частицы в (611.11), получим:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}}}.$$

При малых скоростях, т.е. когда  $v \ll c$ , а  $\frac{T}{2mc^2} \ll 1$ , можно считать, что

$$\lambda \approx \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{h}{mv},$$

что совпадает с формулой (611.10) в нерелятивистском пределе.

Экспериментальная проверка гипотезы де Бройля состоит в прямом наблюдении волновых свойств электронов. Впервые она была осуществлена К. Дэвиссоном и Л. Джермером в 1927 г. (В 1937 г. ученым была присуждена Нобелевская премия по физике.) Они наблюдали дифракцию электронов при их отражении от поверхности кристалла. В 1949 г. советские физики Л.М. Биберман, Н.Г. Сушкин и В.А. Фабрикант осуществили опыт, в котором интенсивность электронного пучка была настолько слабой, что электроны проходили через прибор заведомо по одному. Время пролета электрона через прибор было примерно в 1000 раз меньше среднего времени, проходящего до появления следующего электрона. Была получена дифракционная картина, аналогичная той, которую получили Дэвиссон и Джермер. Таким образом, было доказано, что волновые свойства присущи отдельному электрону.

### 611.5. Описание установки

В настоящей лабораторной работе методом компьютерного моделирования воспроизводятся опыты по дифракции электронов на одной щели и на двух щелях.

На дисплее вы увидите стилизованное изображение электронной пушки (ЭП), диафрагмы (Д) и 50 полупроводниковых электронных детекторов, которые срабатывают при попадании в них электронов (рис. 611.1). Зная размеры каждого детектора,

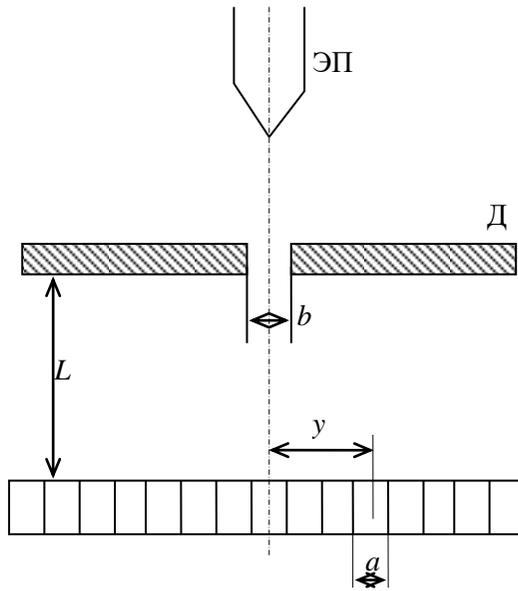


Рис.611.1

можно определить координату точки, в которую попал электрон. Отметим, что размеры детекторов достаточно велики, чтобы, не входя в противоречие с принципом неопределённости Гейзенберга, говорить о "координате" электрона. Погрешность в определении координаты составляет  $a/2$ , где  $a$  – ширина детектора.

Количество электронов, зафиксированных каждым детектором, подсчитывается. Пользуясь этими данными, можно построить гистограмму распределения электронов по детекторам. Максимумы этой гистограммы соответствуют дифракционным максимумам. Положение максимумов интенсивности дифракционной картины определим по известной формуле

$$b \sin \alpha = (2n - 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad b \frac{y}{L} = (2n - 1) \frac{\lambda}{2},$$

где  $b$  – ширина щели;  $L$  – расстояние от диафрагмы до детектора;  $y$  – координата центра детектора номера  $N$ , отсчитанная от середины дифракционной картины;  $y = Na + \frac{a}{2}$ ,  $N$  – число детекторов, считая от центрального;  $n$  – номер максимума;  $\lambda$  – длина волны де Бройля электрона. Из (611.13) получим:

$$\lambda = \frac{ba\left(N + \frac{1}{2}\right)}{L\left(n - \frac{1}{2}\right)}.$$

Для первого дифракционного максимума ( $n = 1$ )

$$b\frac{y}{L} = (2n - 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Схема опыта по дифракции электронов на двух щелях аналогична. Положение максимума при дифракции на двух щелях определяется формулой

$$d \sin \varphi = n \lambda,$$

где  $d$  – расстояние между щелями;  $\sin \varphi \approx \frac{y}{L}$ ,  $y = a\left(N + \frac{1}{2}\right)$ .

Таким образом,  $d\frac{y}{L} = n\lambda$ , откуда

$$\lambda = \frac{ad\left(N + \frac{1}{2}\right)}{nL}.$$

Для  $n = 1$

$$\lambda = \frac{da}{L}\left(N + \frac{1}{2}\right). \quad (611.15)$$

Зная длину волны де Бройля, можно из формул (611.10) – (611.12) определить импульс, полную и кинетическую энергию электрона:

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (611.16)$$

$$E = \sqrt{\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + m^2 c^4}, \quad (611.17)$$

$$T = E - mc^2. \quad (611.18)$$

### 611.6. Порядок выполнения работы

1. Получите у преподавателя задание к лабораторной работе.

2. Промоделируйте на компьютере опыт по дифракции электронов на одной щели. Повторите опыт трижды для 10, 100 и 500 электронов.

3. Для всех трех случаев запишите в таблицу количество электронов, зафиксированных в каждом из 50 детекторов.

4. После выполнения первого упражнения запишите значения расчетных параметров  $L$ ,  $a$  и  $b$ , которые указаны в задании.

5. Промоделируйте на компьютере опыт по дифракции электронов на двух щелях для 10, 100 и 500 и 10 000 электронов.

6. Занесите в таблицу количество электронов, зафиксированных детекторами в каждом из трех случаев.

7. Запишите значения расчетных параметров  $L$ ,  $d$ ,  $b$ ,  $a$  для этого опыта.

8. Постройте гистограммы распределения электронов по детекторам для всех опытов. Сделайте вывод о том, в каком из опытов эффект наблюдается наиболее ярко.

9. Рассчитайте длину волны де Бройля, а также импульсы и энергии электронов по формулам (611.14) – (611.18). Расчеты выполнить по данным, полученным для 10 000 электронов. Сделайте вывод о целесообразности учета релятивистских поправок в рассматриваемых случаях. Для расчетов используйте данные опытов для 500 электронов.

10. Получите в соответствии с правилами определения погрешностей косвенных измерений формулы для расчета погрешностей и рассчитайте, погрешности для  $\lambda$ ,  $E$ ,  $p$  и  $N$ . Проверьте, удовлетворяют ли погрешности в измерении импульса и координаты соотношению неопределенностей Гейзенберга.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое корпускулярно-волновой дуализм частиц света и вещества?

2. Каковы экспериментальные и теоретические предпосылки возникновения гипотезы де Бройля?

3. В чем содержание гипотезы де Бройля?

4. Что такое волновой пакет и в чем необходимость применения волновых пакетов для описания движения частиц?

5. С какой из скоростей волны – фазовой или групповой – следует отождествлять скорость частицы?

6. Исходя из гипотезы де Бройля, вывести выражения, связывающие импульс частицы с волновым вектором и энергию с частотой.

7. Применима ли рассматриваемая теория для релятивистских частиц? нерелятивистских частиц?

8. Будет ли различаться длина волны де Бройля для одного электрона и для большого числа электронов, движущихся в электронном пучке с той же скоростью?

9. Может ли одиночный электрон создать полную дифракционную картину?

10. Каковы особенности применения понятия "траектория" в микромире? Как они связаны с принципом неопределенности?

## **612. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ЗАРЯДА В АТОМЕ ВОДОРОДА**

### **612.1. Цель работы**